

基于不变流形的登月轨道设计^{*}

龚胜平, 李俊峰, 宝音贺西, 高云峰

(清华大学 航天航空学院, 北京 110084)

(叶庆凯推荐)

摘要: 研究了基于三体问题的不变流形设计低成本登月轨道的问题. 考虑了黄道面和白道面之间夹角不为零的三维情况, 将太阳_地球_月亮_卫星组成的四体问题分解成由太阳_地球_卫星和地球_月亮_卫星组成的非共面的两个限制三体问题. 给出了这两个三体系统 Halo 轨道不变流形与两轨道面相交处进行小的变轨来设计低成本探月轨道的一般方法. 比较结果表明用该方法设计的轨道比传统的 Hohmann 变轨节省约 20% 的燃料. 从轨道能量的角度分析了用流形设计轨道比 Hohmann 变轨节省燃料的原因, 并给出了理论表达式. 该方法对于深空探测轨道设计的能量分析具有普遍的适用性, 可为设计提供一个选择参数的标准.

关键词: 三体问题; Lagrange 点; Halo 轨道; 不变流形; 登月轨道

中图分类号: V412.4 **文献标识码:** A

引 言

三体问题研究已经有几百年的历史, 可追溯到 Euler、Lagrange 时代, Poincaré 引入了定性分析的方法. 1955 年 Roy 和 Ovenden 发表了寻找一般 n 体问题周期解的一种理论. 基于该理论, 在 60 年代和 70 年代掀起了一场计算三体问题 Halo 轨道的热潮. 其中 Farquhar 和 Breakwell 是研究 Halo 轨道的先驱, 他们的工作涉及到 Halo 轨道的计算、航天器轨道保持以及 Halo 轨道的航天应用等多方面的内容^[1]. 近期, Gomez、Main、Barden、Howell 等人研究了利用 Halo 轨道的不变流形设计, 从地球驻留轨道 (parking orbit) 到地日系统 L_1 、 L_2 点 Halo 轨道的转移轨道^[2-4]. Lo、Ross 等人研究发现, 在多天体空间存在着类似管道的不变流形 (所谓的 transit tube), 这些流形有通向 Halo 轨道的稳定流形, 也有离开 Halo 轨道的不稳定流形, 利用这些不变流形来设计发射、返回、转移轨道可以节省燃料^[5,6]. 国内对三体问题不变流形的研究相对较少, 周天帅等人介绍了利用三体问题进行轨道转移的问题^[7]. 郑学塘等人研究了太阳光压对限制性三体问题中 Lagrange 点数目影响^[8]. 高云峰等人研究了 Lagrange 点 Halo 轨道及编队飞行在深空探测中的应用^[9]. 刘林等人曾开展 Lagrange 点临近动力学多方面的研究^[10,11].

本文考虑圆型限制性三体问题, 利用 Gomez 等人给出的数值方法^[12], 计算了 Halo 轨道的不变流形, 讨论了如何利用不变流形来设计各种节省燃料的轨道, 并将太阳_地球_月亮_卫星

* 收稿日期: 2005_09_20; 修订日期: 2006_10_30

基金项目: 国家自然科学基金资助项目 (10672084; 10602027)

作者简介: 龚胜平 (1981—), 男, 湖北人, 博士研究生 (联系人. Tel: + 86_10_62773402; E_mail: gs04@mails.tsinghua.edu.cn).

组成的四体问题分解成由太阳_地球_卫星和地球_月亮_卫星组成的非共面的两个限制性三体问题. 给出了在这两个系统 Lagrange 点 Halo 轨道不变流形的重合处, 进行小的变轨来设计低成本探月轨道的一般方法. Koon 等人也讨论过如何利用不变流形来设计登月轨道^[13,15], 并用符号动力学理论说明设计过程. 本文在该思想的基础上考虑了黄道与白道面的夹角不为零的情况, 给出了更接近实际的三维低成本登月轨道设计方法. 从理论上分析了影响发射能量的参数, 给出了参数选择的标准, 对轨道设计具有普遍适用性, 最后将该方法与 Hohmann 变轨进行了比较.

1 基本方程

假设 m_1 和 m_2 绕它们的公共质心作角速度为 ω 的圆周运动. 质量为 m 的物体在 m_1 和 m_2 的引力下在 m_1 和 m_2 的轨道平面内运动, $m \ll m_2 < m_1$ 且 m 不影响 m_1 和 m_2 的运动, 满足上面条件称为圆形限制性三体问题. 以 m_1 和 m_2 的共同的质心为原点, 从 m_1 指向 m_2 的方向为 x 轴, ω 的方向为 z 轴, y 轴与 x 轴和 z 轴组成右手坐标系. 假设 m 在 oxy 平面内运动, 下面给出航天器在动坐标系 oxy 内的运动方程.

令 m_1 和 m_2 的距离 $L = 1$, 角速度 $\omega = 1$, $m_1 + m_2 = 1$, 单位无量纲化后, 万有引力常数取 $G = 1$. 令: $m_2 = \mu$, 在旋转坐标系中得到航天器的运动方程为

$$\ddot{x} - 2y = U_x, \quad \ddot{y} + 2x = U_y, \quad (1)$$

其中

$$U = \frac{1}{2}(x^2 + y^2) + \frac{1-\mu}{r_1} + \frac{\mu}{r_2} + \mu(1-\mu), \quad r_1 = [(x + \mu)^2 + y^2]^{1/2}, \\ r_2 = [(x - 1 + \mu)^2 + y^2]^{1/2}.$$

此系统存在 5 个平衡点, 称为 Lagrange 点或天称动点. 其中 3 个共线 Lagrange 点不稳定而 2 个三角 Lagrange 点为 Liapunov 稳定. 通常, 处于 m_1 和 m_2 中间的 Lagrange 点记为 L_1 , 在 m_1 和 m_2 的延长线上靠近 m_2 的为 L_2 , 由于它们潜在的空间应用价值, 该两个点近几年得到航天界广泛的重视.

本文基于 Koon 等人的思路, 也将太阳、地球、月亮和航天器组成的四体问题分阶段看成是由太阳_地球_航天器和地球_月亮_航天器两个三体问题组成. 并考虑黄道面与白道面的平均夹角 $\theta = 5^\circ 09'$. 按照上面建立方程方法, 在黄道面内以太阳为 m_1 、地球为 m_2 、航天器为 m 建立坐标系 $Ox_{se}y_{se}z_{se}$, 在白道面内以地球为 m_1 、月亮为 m_2 、航天器为 m 建立坐标系 $O'x_{em}y_{em}z_{em}$.

2 Halo 轨道的不变流形计算

在方程(1)的平衡点附近存在绕平衡点的周期轨道, 称为 Halo 轨道, 文献[16]给出了其计算过程. 对于线性微分方程 $\dot{x} = Ax$, A 存在特征对 (λ_i, v_i) ($i = 1, 2, 3, \dots, n$), $\text{Re}(\lambda_i) > 0$ 所对应的特征向量 v_i 所张成的空间称为该系统的不稳定流形, $\text{Re}(\lambda_i) < 0$ 所对应的 v_i 所张成的空间称为该系统的稳定流形. 方程(1)沿 Halo 轨道^[16]线性化的方程为

$$\delta \dot{x}(t) = \left. \frac{\partial f}{\partial X} \right|_{X = \phi(t)} \delta X(t) = A(t) \delta X(t), \quad (2)$$

其中 $f = [x \dot{x} U_x + 2x \dot{y} \dot{y} U_y - 2y \dot{x}]^T$.

上述方程对于周期轨道上的每一点, $A(t)$ 的 4 个特征值分别为: $\pm \lambda(t)$, $\pm \omega(t)i$, 一对互为相反数, 一对共轭纯虚数. 由此可以判定在周期轨道上每点的邻域内存在一维的稳定流形和一维的不稳定流形. 在周期轨道很小的邻域内稳定和 unstable 流形都为与周期轨道相切的一维线性空间; 在远离周期轨道处, 线性化方程已经不适用, 所以流形也不再为特征向量对应的线性不变空间了.

以不稳定流形为例, 下面给出计算流形的数值方法. 取周期轨道上的一点 X_0 , 在 X_0 邻域内计算 $A(X_0)$ 的不稳定流形 v_u , 在不稳定流形上取一点 X , 使 $X = d v_u + X_0$, 其中 d 的选取使 X 在 X_0 的邻域, 然后将 X 作为初值对原方程进行数值积分即可得到整个空间的不稳定流形.

Halo 轨道之间存在着同宿轨道和异宿轨道^[17]. 例如: 从 L_2 的 Halo 轨道出发的航天器, 沿着不稳定流形离开 Halo 轨道, 它绕太阳飞行一圈或几圈后又沿着原 Halo 轨道的稳定流形回到 Halo 轨道上, 这样的轨道称为此 Halo 轨道的同宿轨道. 利用这样的轨道可以收集空间粒子, 然后回到 Halo 轨道, 再将收集到的资料返回地球.

3 登月轨道的设计

利用三体问题的不变流形分别在黄道和白道平面内设计轨道, 通过设计使这两条轨道将在黄道面和白道面的交线上的某处相交形成一条完整的登月轨道.

在黄道面内, 考虑太阳_地球_卫星系统组成的三体问题. 计算 L_2 的 Halo 轨道的不稳定流形, 并取黄道面与白道面的交线为 Poincaré 截面. 图 1 为 L_2 的 Halo 轨道的不稳定流形被截面所截的图形. 由于平面圆型限制性三体问题存在 Jacobi 积分^[11]

$$C = \frac{1}{2}(x^2 + y^2) - \left[\frac{1}{2}(x^2 + y^2) + \frac{1-\mu}{r_1} + \frac{\mu}{r_2} + \mu(1-\mu) \right],$$

可以得出不稳定流形与截面交点的 $y_{se} v_{se}^y$ 曲线(图 2). 取图 2 曲线上的点作为初值对原系统沿时间逆向积分, 轨线将会收敛到 Halo 轨道, 只对交点处的 v_{se}^y 作小的改变使初值在曲线内; 对原系统沿时间逆向积分, 轨线将通过不稳定流形管道远离截面, 对 v_{se}^y 作小的改变使初值在曲线外, 积分轨线将穿过 Halo 轨道然后沿稳定流形到达地球附近. 于是, 可以选择图 2 曲线外一点, 通过逆向积分使其到达地球的驻留圆轨道. 这样可以得到登月轨道的初始机动点, 由积分到地球低轨时的速度和驻留轨道上航天器的速度可以计算出在机动点所需要的速度增量 ΔV .

在白道面内考虑地球_月亮_卫星组成的三体问题. 计算 L_2 的 Halo 轨道的稳定流形. 取黄道面与白道面的交线为 Poincaré 截面, 根据地日连线在白道面内投影与地月连线夹角 β 不同(不同的时间), 可以截得不同 β 时, 在白道面内 L_2 的 Halo 轨道的稳定流形与截面的相对位置, 同样可以得出地月系统稳定流形与截面交点的位置和速度. 式(4) 将截得流形转换到地日坐标系, 先将地月坐标系和地日坐标系的原点都平移到地球, 然后绕 z_{em} 逆时针旋转 β , 再绕 y_{em} 逆时针旋转 θ , 最后将地月系统的无量纲的单位转化到地日系统无量纲单位.

$$\begin{bmatrix} x_{se} \\ y_{se} \\ z_{se} \end{bmatrix} = \lambda_L A_2 A_1 \begin{bmatrix} x_{se} + \mu_m \\ y_{em} \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 - \mu_e \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \tag{3}$$

其中

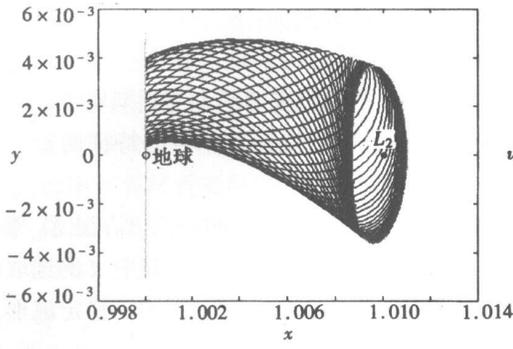


图1 不稳定流形与截面相交

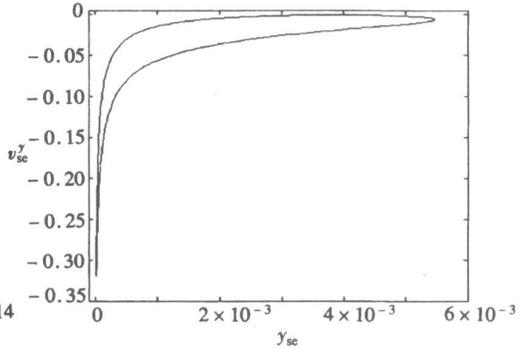


图2 不稳定流形与截面交点的 $y_{se} - v_{se}^y$ 曲线

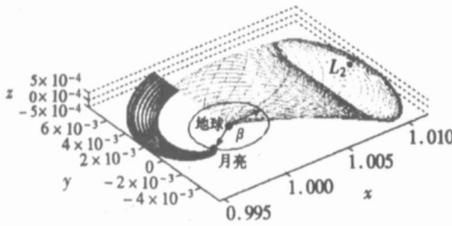


图3 $\beta = 120^\circ$ 截面所截得的流形

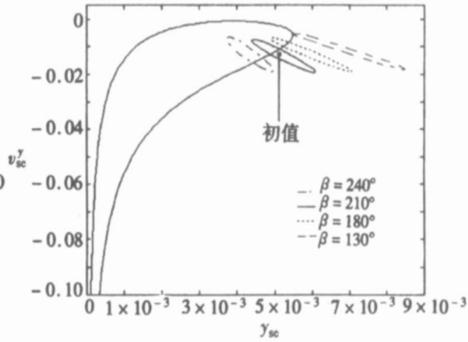


图4 地日系统的不稳定流形与地月系统的稳定流形与截面交点

$$A_1 = \begin{bmatrix} \cos\beta & \sin\beta & 0 \\ -\sin\beta & \cos\beta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad A_2 = \begin{bmatrix} \cos\theta & 0 & -\sin\theta \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin\theta & 0 & \cos\theta \end{bmatrix}, \quad \lambda = \frac{L_{em}}{L_{se}}$$

图3为 $\beta = 120^\circ$ 时截得的地月和地日系统 L_2 的 Halo 轨道的流形. 下面将截面处速度投影到地日坐标系. 转换瞬时将惯性坐标系取为与地日坐标系重合, 由复合运动有

$$v = v_e + v_r. \tag{4}$$

将(5)式在地日坐标系下投影得

$$v_{se} = \lambda A_2 A_1 \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} x_{em} \\ y_{em} \\ 0 \end{bmatrix} + \lambda A_2 A_1 \begin{bmatrix} v_{em}^x \\ v_{em}^y \\ 0 \end{bmatrix}. \tag{5}$$

将截面处的位置和速度转换到地日坐标系可以得到 $y_{se} - v_{se}^y$ 的曲线. 用曲线上的点所对应的位置和速度转换到地月系统, 然后将其作为初值沿时间正向积分, 航天器会到达地月系统的 L_2 的 Halo 轨道. 同样, 通过改变交点处的 v_{em}^y , 可以使得飞行器到达月球或远离月球. 将不同 β 时与截面交点的位置和速度转换到地日坐标系后与图2综合得到图4.

综合上面两个三体问题, 绕地球驻留轨道上出发的航天器, 沿地日系统流形到达截面处时速度将会在图4的封闭曲线内, 从截面出发的航天器要沿地月系统流形到被月球捕捉, 截面处的初速度必须在图4的小的封闭曲线内. 选择 v_{se}^y 使得作为初值沿时间逆向积分能回到地球驻留轨道, 将其转换到地月坐标系沿时间正向积分能被月球捕捉. 但是在截面交点处 x_{se} 和

z_{se} 方向的速度并不连续, 所以需要在交点处施加一个大小为 $\Delta v_1 = \sqrt{(\Delta v_{se}^x)^2 + (\Delta v_{se}^z)^2}$ 的速度增量使速度连续, 只要在地日系统中的能量与地月系统中的能量非常接近, 可以使得速度增量充分的小.

算例 在 200 km 的圆驻留轨道适当位置给航天器一个速度增量 $\Delta V = 3.188\ 14\ \text{km/s}$, 飞行 260.1 d 到达黄道与白道交线处, 此时 $\beta = 210^\circ$, 在截面处给它一个速度增量 $\Delta v_1 = 97.673\ 43\ \text{m/s}$, 它会沿地月系统 L_2 的稳定流形 41.1 d 后被月球捕捉, 此时 $\beta = 92.8^\circ$. 利用 Hohmann 变轨登月所需要的速度增量为 $\Delta v = 3.960\ 75\ \text{km/s}$, 可见利用三体问题中的不变流形可以节省约 20% 能量.

4 能量分析

由上面的分析可知在截面处的速度增量 Δv_1 与在驻留轨道上给航天器的速度增量 ΔV 相比很小, 进行能量分析时只考虑地日系统. 三体问题的积分常数 C 代表系统能量.

$$C = \frac{1}{2}(x^2 + y^2) - \left[\frac{1}{2}(x^2 + y^2) + \frac{1-\mu}{r_1} + \frac{\mu}{r_2} + \mu(1-\mu) \right]. \quad (6)$$

在地球驻留轨道上的航天器在轨运行时, 只有 r_1 变化, 当驻留轨道不高时, $r_1 \approx 1 - \mu$, 设驻留轨道的高度为 h , 地球的半径为 R , 在轨航天器的速度为 $V = \sqrt{GM/(R+h)} = \sqrt{\mu/(R+h)}$, 航天器的能量常数为

$$C_1 = \frac{\mu}{2(R+h)} - \left[\frac{1}{2}(1-\mu)^2 + 1 + \frac{\mu}{R+h} + \mu(1-\mu) \right] = - \left[\frac{1}{2}(1-\mu)^2 + 1 + \frac{\mu}{2(R+h)} + \mu(1-\mu) \right]. \quad (7)$$

设 Halo 轨道与 x 轴交点到 L_2 的距离为振幅 A_x , L_2 的坐标为 $(x_e, 0)$, 由方程(1)的对称性知振幅为 A_x 的 Halo 轨道与 x 的交点为 $(x_e - A_x, 0, 0, y_0)$, 将方程(1)在 L_2 点附近线性化, 再考虑周期轨道是取其稳定模态的关系可知

$$y_0 = -A_x \xi \tau, \quad (8)$$

其中

$$\tau = -\frac{(\xi^2 + 2c + 1)}{2\xi}, \quad \xi = \sqrt{\frac{1}{2}(c - 2 - \sqrt{9c^2 - 8c})},$$

$$c = \mu |x_e - 1 + \mu|^{-3} + (1 - \mu) |x_e + \mu|^{-3}.$$

在振幅为 A_x 的 Halo 轨道的航天器的能量常数为

$$C_2 = \frac{1}{2} A_x^2 \xi^2 \tau^2 - \left[\frac{1}{2}(x_e - A_x)^2 + \frac{1-\mu}{x_e - A_x + \mu} + \frac{\mu}{x_e - A_x - 1 + \mu} + \mu(1-\mu) \right]. \quad (9)$$

因为 $C_1 < C_2$, 所以必须给驻留轨道上的航天器一个速度增量, 使航天器的能量常数 $C_1 = C_2$, 航天器才可能到达 Halo 轨道. 假定施加速度增量的方向与航天器在轨速度方向一致(需要的速度增量最小), 速度增量大小为

$$\Delta V = \sqrt{2(C_2 - C_1) + \frac{\mu}{R+h}} - \frac{\mu}{R+h} = \Delta V(A_x, h). \quad (10)$$

(10) 式给出了速度增量 ΔV 与驻留轨道的高度 h 和 Halo 轨道的振幅 A_x 的近似解析表达式, 给定 Halo 轨道的振幅 A_x 和驻留轨道的高度 h 就可以估算出所需要的速度增量. 图 5 给出

了 ΔV 随 h 和 A_x 变化的关系, 由图 5 知随驻留轨道的高度的增加所需速度增量减小. 随着 Halo 轨道振幅的增加所需速度增量增加. 由于从地球表面将航天器发射到高的驻留轨道需要更多的能量, 为了节省燃料尽量将航天器发射到幅值较小的 Halo 轨道上, 而仿真发现, 幅值过小的 Halo 轨道流形无法到达地球附近, 所以存在一个最小的幅值的 Halo 轨道其流形能达到驻留轨道的问题. 表 1 给出了 Halo 轨道的振幅 A_x 与其流形能到达离地面最小高度关系. 当 $A_x = 0.001\ 346$ 时, Halo 轨道的流形能到达地球的 200 km 高空, 所以选择 $A_x = 0.001\ 346$ 的流形来设计登月轨道. $h < 0$ 表明能达到地面, 只要 Halo 轨道的振幅足够大, 其流形能到达地面附近的任何位置.

表 1 Halo 轨道振幅与能达到离地球的最小高度的关系

Halo 轨道振幅 A_x	流形能到达离地球的最小高度 h_{\min}/km
0.000 700	90 367. 947 649 032 5
0.000 800	70 928. 967 755 344 9
0.000 900	54 535. 667 158 940 9
0.001 000	38 822. 129 801 908 4
0.001 100	24 871. 662 703 673 6
0.001 200	13 011. 580 291 660 0
0.001 300	3 591. 904 014 854 2
0.001 310	2 793. 723 500 689 4
0.001 320	2 038. 143 995 902 8
0.001 330	1 215. 397 752 317 1
0.001 340	601. 440 060 667 8
0.001 346	192. 772 111 874 6
0.001 350	- 73. 117 848 532 3

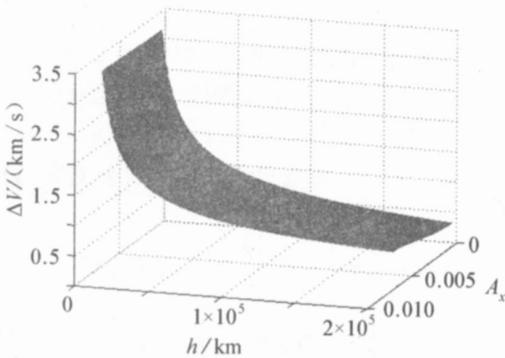


图 5 速度增量与驻留轨道高度和 Halo 轨道振幅的关系

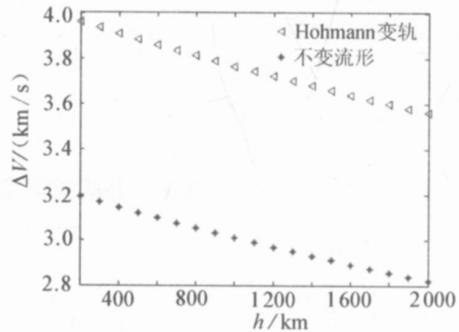


图 6 利用不变流行与 Hohmann 变轨实现登月需要能量的比较

通过上面的分析, 可以将利用不变流形实现登月与 Hohmann 变轨实现登月的能量进行比较. Hohmann 变轨的速度增量只跟驻留轨道的高度 h 有关, 给定 h , 由表 1 得出流形能到达 h 的最小振幅, 于是可以计算出利用不变流形登月的 ΔV_{\min} . 图 6 给出了在不同高度利用不变流形和 Hohmann 变轨实现登月所需速度增量的比较. 从图 6 可以看出, 与 Hohmann 变轨比较节省能量在 20% 左右.

5 结论和讨论

基于三体系统的不变流形设计登月轨道的结果表明,该方法比传统的 Hohmann 变轨节省约 20% 的燃料. 在设计过程中,考虑黄道面和白道面之间夹角的非共面情况比理想的共面情况在界面处需要稍多的速度增量,但在界面处的速度增量仍不超过驻留轨道的速度增量 3%,所以整个登月轨道所需要的能量与理想情况几乎相同. 利用不变流形进行轨道转移时,利用 Halo 轨道振幅越小的流形进行变轨需要的速度增量越小,但是振幅过小的 Halo 轨道无法到达地面附近,所以存在最优的 Halo 轨道振幅,本文给出了计算的方法.

本文从能量的角度分析了利用三体问题不变流形设计登月轨道的优越性,但是节省能量是以牺牲时间为代价的. 从地球到 Lagrange 点所需时间为 160 d 左右,到截面处的时间为 260 d 左右. 此时间随着 Halo 轨道的幅值大小而变化,但变化幅值非常的小. 从轨道面的交点到月球时间由发射时地球与月亮的相位而定,飞行时间相对较短,一般不会超过 60 d. 总的飞行时间会比较长,因此此方法不适合载人和紧急任务,只适合各种对时间要求不高的探测任务.

由于三体问题的非线性,导致问题对初值和中途的各种扰动非常的敏感. 如果中途不施加任何控制,航天器直接进入了 Halo 轨道而不会沿着参考轨道飞行. 因此实际任务中必须通过中途修正来进行轨道控制. 美国 NASA 的 Genesis 是一个 Halo 轨道任务,它的发射轨道采用如下修正策略:为不让发射误差扩大,在发射后 24 h 内进行第一次修正. 7 d 后进行第二次修正,到达 Halo 轨道附近后进行第三次修正. 登月轨道也可以采取类似的修正方法来进行轨道保持.

感谢 本文作者对清华大学基础研究基金的资助表示衷心的感谢.

[参 考 文 献]

- [1] Farquhar R W. The utilization of Halo orbits in advanced lunar operations[R]. Technical Report TN D_6365, NASA, 1971.
- [2] Gomez G, Koon W S, Lo M W, et al. Connecting orbits and invariant manifold in the spatial restricted three_body problem[J]. Nonlinearity, 2004, 17(5): 1571_1606.
- [3] Howell K C, Barden B T, Wilson R S, et al. Trajectory design using a dynamical systems approach with application to GENESIS[A]. In: Proceedings of the AAS/ AIAA Astrodynamics Conference [C]. Idaho: Sun Valley, 1997, 1665—1684.
- [4] Howell K C, Mains D L, Barden B T. Transfer trajectories from Earth parking orbits to Sun_Earth halo orbits[A]. In: Proceedings of the 4th AAS/ AIAA Spaceflight Mechanics Meeting [C]. Cocoa Beach, Florida, 1994, 399_422.
- [5] Lo M W, Ross S D. The lunar L₁ Gateway: portal to the stars and beyond[A]. In: AIAA Space 2001 Conference [C]. Albuquerque, NM, 2001.
- [6] Lo M W. The interplanetary superhighway and the origins program[A]. In: 2002 IEEE Aerospace Conference Proceedings [C]. Vol 7. Big Sky, MT, 2002, 3543_3562.
- [7] 周天帅, 李东, 陈新民, 等. 国外日_地动平衡点卫星应用及转移轨道实现方式[J]. 导弹与航天运载技术, 2004, 272(2): 29_34.
- [8] 郑学塘, 郁丽忠, 覃一平. 光引力限制性三体问题的平动点[J]. 应用数学和力学, 1994, 15(8): 733_739.
- [9] 高云峰, 龚胜平. 编队飞行及拉格朗日平动点在深空探测中的应用前景[J]. 深空探测研究, 2005, 1

- (1): 36_41.
- [10] LIU Lin. Evolution on the orbital resonance in restricted 3_body problem[J]. *Scientia Sinica*, 1988, **31**(8): 123_128.
- [11] ZHAO Zhang_yin, LIU Lin. The stable regions of the triangular libration points of the planets[J]. *ICARUS*, 1992, **100**(1): 136_142.
- [12] Gomez G, Jorba A, Masdemont J J, et al. Study of the transfer from the earth to a halo orbit around the equilibrium point L_1 [J]. *Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy*, 1993, **56**: 541_562.
- [13] Koon W S, Lo M W, Marsden J E, et al. Low energy transfer to the moon[J]. *Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy*, 2001, **81**(5): 63_73.
- [14] Koon W S, Martin W, Lo M W, et al. Shoot the moon[A]. In: *AAS/ AIAA Astrodynamics Specialist Conference* [C]. Florida, 2000.
- [15] Koon W S, Lo M W, Marsden J E, et al. Constructing a low energy transfer between Jovian Moons [J]. *Contemporary Mathematics*, 2000, **292**(1): 129_145.
- [16] Popescu M, Cardos V. The domain of initial conditions for the class of three_dimensional halo periodical orbits[J]. *Acta Astronautica*, 1995, **36**(3): 193_196.
- [17] Wilczak D, Zgliczynski P. Heteroclinic connections between periodic orbits in planar restricted circular three_body problem[J]. *Communications in Mathematical Physics*, 2004, **234**(1): 37_75.

Lunar Landing Trajectory Design Based on Invariant Manifold

GONG Sheng_ping, LI Jun_feng, BAOYIN He_xi, GAO Yun_feng
(School of Aerospace, Tsinghua University, Beijing 100084, P. R. China)

Abstract: The low_energy lunar landing trajectory design using the invariant manifolds of restricted three body problem is studied. Considering angle between the ecliptic plane and lunar orbit plane, the four body problem of Sun_Earth_Moon_spacecraft was divided into two three body problems, the Sun_Earth_spacecraft in the ecliptic plane and the Earth_Moon_spacecraft in the lunar orbit plane. Using the orbit maneuver at the place where the two planes and the invariant manifolds intersect, a general method to design low energy lunar landing trajectory was given. It is found that this method can save the energy by 20% compared with the traditional Hohmann transfer trajectory. The mechanism of the method that can save energy was investigated in the point of view of energy and the expression of the amount of energy saved is given. In addition, some rules of selecting parameters with respect to orbit design were provided. The method of energy analysis can be extended to energy analysis in deep space orbit design.

Key words: three_body problem; Lagrange point; Halo orbit; invariant manifold; lunar landing trajectory