文章编号: 1000_0887(2007) 02_0216_09

一类 N 参数 Gauss 过程的异常震动点集合的 Hausdorff 维数*

林正炎[1], 程宗毛[1,2]

(1. 浙江大学 数学系, 杭州 310028;
2. 杭州电子科技大学 数学系, 杭州 310018)

(郭兴明推荐)

摘要: 引进了一类 N 参数 Gauss 过程, 它具有比 N 参数 Wiener 过程更为一般的性质. 给出了此类 N 参数 Gauss 过程的异常震动点集的定义, 并且定义了此异常震动点集的 Hausdorff 维数. 研究了此类过程的异常震动点集 Hausdorff 维数, 给出了它的一个确切的表达式, 从而获得了与 Zacharie (2001) 的有关两参数 Wiener 过程的类似的结果. 考虑的参数点集是一般的超长方体. 而不是 Zacharie (2001) 考虑的超正方体. 在此更为一般的情况下, 首先建立了文中引进的过程的 Fernique 不等式. 利用此不等式和 Slepian 引理, 证明了过程的 L vy 连续模定理. Zacharie(2001) 关于 Hausdorff 维数公式的证明依赖于两参数 Wiener 过程的独立增量性, 而这里引进的过程不具有这种性质, 因此, 必须采用新的证明途径.

关 键 词: N_ 参数 Gauss 过程; 连续模; Hausdorff 维数
中图分类号: O211.6 文献标识码: A

1 引言和主要结果

设 $\{W(t); t \geqslant 0\}$ 为在概率空间 $(\Omega, \mathscr{F}, P)$ 上的标准 Wiener 过程. 由 L vy 连续模定理, 有

$$\lim_{h \downarrow 0} \sup \frac{|W(t+h) - W(t)|}{\sqrt{2h\ln(1/h)}} = 1 \quad \text{a. s.} \tag{1}$$

对任意 $\lambda \in [0, 1]$, 考虑异常震动(exceptional oscillations) 点集

$$B(\lambda) = \left\{ t \in [0, 1): \lim_{h \downarrow 0} \sup \frac{|W(t+h) - W(t)|}{\sqrt{2h\ln(1/h)}} \geqslant \lambda \right\}. \tag{2}$$

Orey 和 Taylor[1] 证明了 $B(\lambda)$ a. s. 是一个随机分形. 他们给出了 $B(\lambda)$ 的 Hausdorff 维数. $[0, 1]$ 的子集 A 的 Hausdorff 维数 $\dim A$ 定义为

$$\dim A = \inf\{c > 0: s^c\_\mathrm{mes} A = 0\},$$

其中对任意的 $c > 0$, A 的 s^c_ 测度由下式定义(参阅文献[2]) :

* 收稿日期: 2005_09_26; 修订日期: 2006_11_13
基金项目: 国家自然科学基金资助项目(10571159) ; 教育部博士点专项基金资助项目(20060335032)
作者简介: 林正炎(1941—) , 男, 杭州人, 教授, 博士生导师;
程宗毛(1964—) , 男, 江西玉山人, 副教授, 博士(联系人. Tel: + 86_571_88235051; E_mail: zmcheng@ hdu. edu. cn) .

$$s^c\_\mathrm{mes}A = \lim_{h\downarrow 0}\left(\sum_i \|I_i\|^c : A \subseteq \bigcup_i I_i,\ \|I_i\| \leqslant h\right). \tag{3}$$

这里区间 I_i 组成一个 A 的 h 覆盖, $\|I_i\|$ 表示 I_i 的半径. Orey 和 Pruitt[3] 获得了如下的结果:

$$\dim B(\lambda) = 1 - \lambda^2 \qquad \text{a. s.} \tag{4}$$

设 $\{W(s, t): 0 \leqslant s < \infty, 0 \leqslant t < \infty\}$ 表示一个两参数的标准 Wiener 过程. Zacharie[2] 考虑了它的异常震动点集

$$F(\alpha) = \left\{(s, t): 0 < s < 1, 0 < t < 1: \limsup_{h\downarrow 0} \frac{|W(R)|}{\sqrt{2h^2\ln(1/h^2)}} \geqslant \alpha\right\},$$

其中 $R = [s, s+h] \times [t, t+h]$, $W(R) = W(s+h, t+h) - W(s+h, t) - W(s, t+h) + W(s, t)$, 获得了如下的结果: 对于任意 $\alpha \in [0, 1]$,

$$\dim F(\alpha) = 2(1-\alpha^2) \qquad \text{a. s.} \tag{5}$$

本文考虑更一般的多参数 Gauss 过程. 设 $X = \{X(t); t \in R_+^N\}$ 是一个 N 参数中心化的 Gauss 过程, $X(t)$ 的增量表示成 $X([t, t+h]) = \int_{[t, t+h]} X(\mathrm{d}s)$, $t, h \in R_+^N$. 增量的平稳性定义为

$$X([t, t+h]) \overset{\mathrm{def}}{=} X([0, h]).$$

又假设 X 满足条件 A:

$$\mathrm{cov}(X([s, s+t']), X([s', s'+t'])) = \prod_{l=1}^{N} \frac{1}{2}(\sigma_l^2(|s_l + t_l - s_l'|) +$$
$$\sigma_l^2(|s_l' + t_l' - s_l|) - \sigma_l^2(|s_l - s_l'|) - \sigma_l^2(|s_l + t_l - s_l' - t_l'|)), \tag{6}$$

其中 $\sigma_l(s_l)$, $l = 1, \cdots, N$, 满足如下条件: 存在常数 $\alpha_l \in (0, 1)$, 在 0 处缓变的函数 L_l 及正常数 c_1 和 c_2 使得

$$c_1 s_l^{2\alpha_l} L_l(s_l) \leqslant \sigma_l^2(s_l) \leqslant c_2 s_l^{2\alpha_l} L_l(s_l), \qquad \text{对足够小的 } s_l \geqslant 0; \tag{7}$$

且 $\sigma_l^2(s_l)$ 是两阶连续可导的函数, 存在正常数 c_3 和 c_4 使得对足够小的 $s_l > 0$, 有

$$\frac{\mathrm{d}\sigma_l^2(s_l)}{\mathrm{d}s_l} \leqslant c_3 \frac{\sigma_l^2(s_l)}{s_l} \text{ 和 } \left|\frac{\mathrm{d}^2\sigma_l^2(s_l)}{\mathrm{d}s_l^2}\right| \leqslant c_4 \frac{\sigma_l^2(s_l)}{s_l^2}. \tag{8}$$

对于上述 N 参数 Gauss 过程我们将证明类似于式(4)和(5)的结果. 对 $0 \leqslant \lambda < 1$, 记

$$G(\lambda) = \left\{t = (t_1, \cdots, t_N) \in [0, 1)^N: \limsup_{h\downarrow 0} \frac{X([t, t+h])}{\sqrt{2\sigma^2(h)\ln(h^{-1})}} \geqslant \lambda\right\}, \tag{9}$$

其中 $h = \prod_{l=1}^N h_l$, $\sigma^2(h) = \prod_{l=1}^N \sigma_l(h_l)$. 这时式(3) 里的 A 的 s^c_测度定义为

$$s^c\_\mathrm{mes}A = \lim_{h\downarrow 0}\left(\sum_i \lambda_N(I_i)^c : A \subseteq \bigcup_i I_i, I_i = [t_i, t_i + h], \lambda_N(I_i) \leqslant h\right),$$

其中 $\lambda_N(I_i)$ 为 I_i 的 Lebesque 测度.

定理 1.1 对任意 $\lambda \in [0, 1]$, 我们有

$$\dim G(\lambda) = 1 - \lambda^2 \qquad \text{a. s.} \tag{10}$$

文献[2] 中时间点集 R 是 $[s, s+h] \times [t, t+h]$ 形式的闭正方形, 在本文里, 我们考虑的是 $[t_1, t_1+h_1] \times \cdots \times [t_N, t_N + h_N]$ 形式的超长方体, 而且在文献[2] 里, 式(4) 和(5) 的证明依赖于 Wiener 过程的独立增量性. 而我们考虑的过程 X 并不具备这个性质.

2 定理的证明

为了证明定理 1.1, 我们需要一些引理, 引理 2.1 是关于 X 的 Fernique 型不等式.

引理 2.1 对于给定的 $\delta > 0$, 存在常数 $C > 0$ 使得对于任意 $x \geqslant 1$, $h_j \leqslant 1/2$, $j = 1, \cdots,$

N, 有

$$P\left\{\sup_{0\le t\le 1}\sup_{0\le s\le h}|X([t,t+s])|\geqslant x(1+\delta)\sigma(h)\right\}\leqslant Ch^{-1}e^{-x^2/2}. \tag{11}$$

以下是一个有关定理 1.1 中定义的过程 $\left\{X(t),\ t\in R_+^N\right\}$ 的 L vy 连续模定理.

引理 2.2　我们有

$$\lim_{h\to 0}\sup_{0\le t\le 1}\sup_{0\le s\le h}\frac{|X([t,t+s])|}{\sqrt{2\sigma^2(h)\ln h^{-1}}}=1\qquad \text{a.s.} \tag{12}$$

$$\lim_{h\to 0}\sup_{0\le t\le 1}\frac{|X([t,t+h])|}{\sqrt{2\sigma^2(h)\ln h^{-1}}}=1\qquad \text{a.s.} \tag{13}$$

证明　与单参数情形类似我们有

$$\limsup_{h\to 0}\sup_{0\le t\le 1}\sup_{0\le s\le h}\frac{|X([t,t+s])|}{\sqrt{2\sigma^2(h)\ln h^{-1}}}\leqslant 1\qquad \text{a.s.} \tag{14}$$

下面我们来证明

$$\liminf_{h\to 0}\sup_{0\le t\le 1}\frac{X([t,t+h])}{\sqrt{2\sigma^2(h)\ln h^{-1}}}\geqslant 1\qquad \text{a.s.} \tag{15}$$

利用条件(6)和(7), 类似文献[4]中引理 2.2 的证明, 对于固定的 $m=(m_1,\cdots,m_N)\succ 0$ 和 $1\leqslant i_l,j_l\leqslant n_l/m_l,\ l=1,\cdots,N$, 我们有

$$\begin{aligned}&\sigma_l^2\left(\frac{|i_l-j_l|m_l+1}{n_l}\right)+\sigma_l^2\left(\frac{|i_l-j_l|m_l-1}{n_l}\right)-2\sigma_l^2\left(\frac{|i_l-j_l|m_l}{n_l}\right)\leqslant\\&\quad c\sigma_l^2\left(\frac{|i_l-j_l|m_l+1}{n_l}\right)\frac{1}{n_l^2}\Big/\left(\frac{|i_l-j_l|m_l-1}{n_l}\right)^2\leqslant\\&\quad c\sigma_l^2\left(\frac{1}{n_l}\right)(|i_l-j_l|m_l-1)^{\alpha_l-1}.\end{aligned} \tag{16}$$

这里我们利用了有关缓变函数的一个结果: 设 $l(x)$ 是一个在零点缓变的函数, 且当 $x\to 0$, 有 $a(x)\to\infty$, 那么对于任意 $\varepsilon>0$, 我们有 $a(x)^{-\varepsilon}[l(a(x)x)]/[l(x)]\to 0$(参见文献[5]). 因此对于给定的 $\delta>0$, 对 $|i_l-j_l|\geqslant 1$ 以及取 $m_l,\ l=1,\cdots,N$, 充分大, 我们有

$$\begin{aligned}&E\left(X\left(\frac{im}{n},\frac{im+1}{n}\right)X\left(\frac{jm}{n},\frac{jm+1}{n}\right)\right)=\prod_{l=1}^{N}\frac{1}{2}\left(\sigma_l^2\left(\frac{|i_l-j_l|m_l+1}{n_l}\right)+\right.\\&\quad\left.\sigma_l^2\left(\frac{|i_l-j_l|m_l-1}{n_l}\right)-2\sigma_l^2\left(\frac{|i_l-j_l|m_l}{n_l}\right)\right)\leqslant\\&\quad\prod_{l=1}^{N}\sigma_l^2\left(\frac{1}{n_l}\right)\delta^2.\end{aligned}$$

对于 $0\preceq i\preceq[n/m]$ 定义 $\xi_i=X([(im-1)/n,(im)/n])/\sigma(1/n)$, 又设 τ、η_i 是一组零均值的正态随机变量, 具有 $E\eta_i^2=1-\delta^2$ 和 $E\tau^2=\delta^2$. 那么 $E\xi_i^2=E(\eta_i+\tau)^2=1$. 由 Slepian 不等式我们有

$$\begin{aligned}&P\left\{\max_{0\preceq i\preceq[n/m]}\frac{X\left(\left[\frac{im-1}{n},\frac{im}{n}\right]\right)}{\sqrt{2\sigma^2\left(\frac{1}{n}\right)\ln\prod_{l=1}^{N}n_l}}\leqslant 1-2\varepsilon\right\}\leqslant\\&\quad P\left\{\max_{1\preceq i\preceq[n/m]}\frac{\eta_i+\tau}{\sqrt{2\ln\prod_{l=1}^{N}n_l}}\leqslant 1-2\varepsilon\right\}\leqslant\\&\quad P\left\{\max_{1\preceq i\preceq[n/m]}\eta_i\leqslant(1-\varepsilon)\sqrt{2\ln\prod_{l=1}^{N}n_l}\right\}+P\left\{\tau>\varepsilon\sqrt{2\ln\prod_{l=1}^{N}n_l}\right\}=\end{aligned}$$

$$\prod_{i_1=1}^{[n_1/m_1]}\cdots\prod_{i_N=1}^{[n_N/m_N]}P\left\{N(0,1)\leqslant(1-\varepsilon)\left(\frac{2\ln\prod_{l=1}^{N}n_l}{1-\delta^2}\right)^{1/2}\right\}+$$
$$P\left\{N(0,1)\geqslant\frac{\varepsilon}{\delta}\left(2\ln\prod_{l=1}^{N}n_l\right)^{1/2}\right\}.$$

选取 $\delta>0$ 充分小, 使得 $(1-\varepsilon)/\sqrt{1-\delta^2}<1-2\varepsilon/3$ 和 $\varepsilon/\delta>\sqrt{2}$. 那么

$$P\left\{N(0,1)\leqslant(1-\varepsilon)\left(\frac{2\ln\prod_{l=1}^{N}n_l}{1-\delta^2}\right)^{1/2}\right\}\leqslant$$
$$P\left\{N(0,1)\leqslant\left(1-\frac{2}{3}\varepsilon\right)\left(2\ln\prod_{l=1}^{N}n_l\right)^{1/2}\right\}\leqslant$$
$$1-\prod_{l=1}^{N}\frac{1}{n_l^{1-\varepsilon}}\leqslant\exp\left\{-\left(\prod_{l=1}^{N}n_l\right)^{-1+\varepsilon}\right\}$$

且
$$P\left\{N(0,1)\geqslant\frac{\varepsilon}{\delta}\left(2\ln\prod_{l=1}^{N}n_l\right)^{1/2}\right\}\leqslant\prod_{l=1}^{N}n_l^{-2}.$$

因此我们可得

$$P\left\{\max_{1\preceq i\prec[n/m]}\frac{X\left(\left[\frac{im-1}{n},\frac{im}{n}\right]\right)}{\sqrt{2\sigma^2\left(\frac{1}{n}\right)\ln\prod_{l=1}^{N}n_l}}\leqslant1-2\varepsilon\right\}\leqslant$$
$$\exp\left\{-\left(\prod_{l=1}^{N}n_l\right)^{\varepsilon}\Big\backslash\prod_{l=1}^{N}m_l\right\}+\prod_{l=1}^{N}n_l^{-2}.$$

那么有

$$\sum_{n_1=1}^{\infty}\cdots\sum_{n_N=1}^{\infty}P\left\{\max_{1\preceq i\preceq[n/m]}\frac{X\left(\left[\frac{im-1}{n},\frac{im}{n}\right]\right)}{\sqrt{2\sigma^2\left(\frac{1}{n}\right)\ln\prod_{l=1}^{N}n_l}}\leqslant1-2\varepsilon\right\}<\infty.$$

由 Borel_Cantelli 引理可得

$$\liminf_{n_1\to\infty,\cdots,n_N\to\infty}\sup_{0\preceq t\preceq1}\frac{X\left(\left[t,t+\frac{1}{n}\right]\right)}{\sqrt{2\sigma^2\left(\frac{1}{n}\right)\ln\prod_{l=1}^{N}n_l}}\geqslant$$
$$\liminf_{n_1\to\infty,\cdots,n_N\to\infty}\max_{0\preceq t\preceq[n/m]}\frac{X\left(\left[\frac{im-1}{n},\frac{im}{n}\right]\right)}{\sqrt{2\sigma^2\left(\frac{1}{n}\right)\ln\prod_{l=1}^{N}n_l}}\geqslant1-2\varepsilon\quad\text{a. s.}\tag{17}$$

现在考虑 $h_{n+1}\preceq h\preceq h_n$, 其中 $h_n=(1/n_1,\cdots,1/n_N)$, $h_{n+1}=(1/(n_1+1),\cdots,1/(n_N+1))$, 我们有

$$\liminf_{h\to0}\sup_{0\preceq t\preceq1}\frac{X([t,t+h])}{\sqrt{2\sigma^2(h)\ln h^{-1}}}\geqslant$$
$$\liminf_{n_1\to\infty,\cdots,n_N\to\infty}\sup_{0\preceq i\preceq1}\frac{X([t,t+h_n])}{\sqrt{2\sigma^2(h_n)\ln h_n^{-1}}}\frac{\sqrt{\ln h_n^{-1}}}{\sqrt{\ln h_{n+1}^{-1}}}-$$
$$\limsup_{n_1\to\infty,\cdots,n_N\to\infty}\sup_{0\preceq t\preceq1}\sup_{0\preceq s\preceq h_n-h_{n+1}}\frac{|X([t,t+s])|}{\sqrt{2\sigma^2(h_{n+1})\ln h_n^{-1}}}=:L_1-L_2.$$

由式(17), $L_1\geqslant1$ a. s. 注意到当 $n\to\infty$ 时, $(h_{n_l}-h_{n_l+1})/h_{n_l+1}\to0$, 再利用式(14), 我们有 $L_2=0$ a. s. 因此式(15)就被证明. 由式(14)和(15)可得式(12)和(13).

定理 1.1 的证明　首先我们考虑上界. 对任意 $k=(k_1,\cdots,k_N)$, $k_j\geqslant 2, j=1,\cdots,N$, 记 $h_k=(h_{k_1},\cdots,h_{k_N})$, 定义长方体

$$I_{ik}=[i_1h_{k_1},(i_1+1)h_{k_1}]\times\cdots\times[i_Nh_{k_N},(i_N+1)h_{k_N}], \tag{18}$$

其中 $i=(i_1,\cdots,i_N)$, $i_j=1,\cdots,m_{k_j}=[h_{k_j}^{-1}]$, $j=1,\cdots,N$, 而 $h_{k_j}=(1+\gamma)^{-k_j}$ 且 $\gamma\in(0,1)$ 是一个将在后面给定的常数. 又设 λ_1 和 λ_2 是两个常数, 满足 $0<\lambda_1<\lambda_2<\lambda<1$. 再记

$$R_{ik}(\lambda_1)=\begin{cases}I_{ik}, & 若\ 1_{ik}(\lambda_1)=1,\\ \varnothing, & 若\ 1_{ik}(\lambda_1)=0,\end{cases}$$

其中　$$1_{ik}(\lambda_1)=1\left\{\sup_{I\subset I_{ik}}|X(I)|>\lambda_1\sqrt{2\sigma^2(h_k)|\ln h_k|}\right\}. \tag{19}$$

固定 $t=(t_1,\cdots,t_N)\in G(\lambda)$. 选择一列 $\left\{u_n: n\geq 1\right\}\subset R_+^N$, 满足 $u_1\succeq u_2\succeq\cdots$ 且 $u_n\to 0$, 使得对任何足够大的 n_l, $l=1,\cdots,N$,

$$X([t,t+u_n])>\lambda_2\sqrt{2\sigma^2(u_n)|\ln u_n|}. \tag{20}$$

此外, 对足够大的 n, 我们选取 k 和 I_{ik} 满足 $h_{k+2}\preceq u_n\preceq h_{k+1}\prec h_k$ 和 $[t,t+u_n]\subseteq I_{ik}$. 现在选择 $\gamma\in(0,1)$ 足够小, 满足 $0<\gamma<(\lambda_2/\lambda_1)^{1/(3\alpha_*)}-1$, 其中 $\alpha_*=\min_{1\leqslant l\leqslant N}\alpha_l$. 从式(20), 对足够大的 $k_j, j=1,\cdots,N$, 我们有

$$|X([t,t+u_n])|>\lambda_2\sqrt{2\sigma^2(u_n)|\ln u_n|}>\lambda_1\sqrt{2\sigma^2(h_k)\ln|h_k|}. \tag{21}$$

因此　$$t\in\bigcup_k\bigcup_{i_1=1}^{m_{k_1}}\cdots\bigcup_{i_N=1}^{m_{k_N}}R_{ik}(\lambda_1).$$

利用 Hausdorff 测度 s^c_mes 的基本性质(参见文献[2]), 我们有

$$s^c\_\mathrm{mes}(G(\lambda))\leqslant s^c\_\mathrm{mes}\left(\bigcup_k\bigcup_{i_1=1}^{m_{k_1}}\cdots\bigcup_{i_N=1}^{m_{k_N}}R_{ik}(\lambda_1)\right)\leqslant$$

$$\sum_k\sum_{i_1=1}^{m_{k_1}}\cdots\sum_{i_N=1}^{m_{k_N}}\left(\prod_{l=1}^N h_{k_l}\right)^c 1_{ik}(\lambda_1). \tag{22}$$

定义　$S_k=\sum_{i_1=1}^{m_{k_1}}\cdots\sum_{i_N=1}^{m_{k_N}}1_{ik}(\lambda_1)$. 利用引理 2.1, 我们有

$$E(S_k)=\sum_{i_1=1}^{m_{k_1}}\cdots\sum_{i_N=1}^{m_{k_N}}P\left(\sup_{s,t\in I_{ik}}X([s,t])\right)\geqslant\lambda_1\sqrt{2\sigma^2(h_k)|\ln h_k|}\leqslant Ch_k^{-1+\lambda_3^2}, \tag{23}$$

其中 $\lambda_3^2=2\lambda_1^2/(2+\varepsilon)$. 利用 Markov 不等式和式(23), 我们得

$$P\left\{S_k\geqslant h_k^{-1+\lambda_3^2-\varepsilon}\right\}\leqslant h_k^{1-\lambda_3^2+\varepsilon}E(S_k)\leqslant C\prod_{l=1}^N(1+\gamma)^{-k_l\varepsilon}. \tag{24}$$

由 Borel_Cantelli 引理和不等式(24), 对所有充分大的 k_l, $l=1,\cdots,N$, a.s. 有 $S_k\leqslant h_k^{-1+\lambda_3^2-\varepsilon}$. 由式(22) 和(24) 可知, 在条件 $c-1+\lambda_3^2-\varepsilon>0$ 下, a.s. 有 s^c_mes$(G(\lambda))<\infty$. 因此, $\dim G(\lambda)\leqslant 1-\lambda_3^2+\varepsilon$. 选择 λ_1 任意靠近 λ 和 ε 任意小, 我们得证:

$$\dim(G(\lambda))\leqslant 1-\lambda^2\quad \text{a.s.} \tag{25}$$

现在我们来考虑下界, 也就是证明

$$\dim G(\lambda)\geqslant 1-\lambda^2\quad \text{a.s.} \tag{26}$$

首先, 令 $\lambda<\lambda_1<1$. 对 $1\leqslant l\leqslant N$, 设 $\left\{h_{k_l}, k_l\geqslant 1\right\}$ 表示一列常数, 满足:

(i) $0<h_{k_l}<1$, 当 $k_l\to\infty$ 时, $h_{k_l}\to 0$ 且 $k_lh_{k_l}\to\infty$;

(ii) 对任何 $0 < c < 1$ 和任意足够大的 k_l, 有 $\exp(-h_{k_l}^{-c}) < 2^{-k_l}$, $l = 1, \cdots, N$.

令 $i_l = 0, 1, \cdots, m_{k_l} := [h_{k_l}^{-1}] - 1$, $t_k(i) = (i_1 h_{k_1}, \cdots, i_N h_{k_N})$. 对任何闭区间 $E \subset [0, 1]^N$, 记

$$m_k(E) = \#\left\{(i_1, \cdots, i_N): i_l = 0, \cdots, m_{k_l}, l = 1, \cdots, N, [t_k(i), t_k(i+1)] \subseteq E\right\} \tag{27}$$

和

$$N_k(E) = \#\Big\{(i_1, \cdots, i_N): i_l = 0, \cdots, m_{k_l}, l = 1, \cdots, N, [t_k(i), t_k(i+1)] \subseteq E,$$
$$|X([t_k(i), t_k(i+1)])| > \lambda(2\sigma^2(h_k)\ln h_k^{-1})^{1/2}\Big\}. \tag{28}$$

对任何 $i = (i_1, \cdots, i_N)$, $i_l = 0, \cdots, m_{k_l}$, $l = 1, \cdots, N$, 定义

$$G_i = 1_{\left\{|X([t_k(i), t_k(i+1)])| \geqslant \lambda(2\sigma^2(h_k)\ln h_k^{-1})^{1/2}\right\}}.$$

随机变量 G_i, $i \in \left\{(i_1, \cdots, i_N), i_l = 0, \cdots, m_{k_l}, l = 1, \cdots, N\right\}$ 是同分布的, 但可能相依. 记

$$p_k(\lambda) = P\left\{|X([t_k(i), t_k(i+1)])| \geqslant \lambda(2\sigma^2(h_k)\ln h_k^{-1})^{1/2}\right\}. \tag{29}$$

易证(参考文献[2]中的引理2.1)对任何 $\varepsilon > 0$, 以概率1存在 $k^0(\varepsilon) = (k_1^0(\varepsilon), \cdots, k_N^0(\varepsilon))$ 使得对 $k \geq k^0(\varepsilon)$, 我们有

$$h_k^{\lambda^2+\varepsilon} \leqslant p_k(\lambda). \tag{30}$$

考虑 Lebesgue 测度 $\lambda_N(E)$ 不小于 $S \geqslant 3h_k$ 的超长方体的不交并 $E \subseteq [0, 1]^N$. 对所有 $k \geq 1$, 我们有

$$\frac{\lambda_N(E)}{3h_k} \leqslant \left(1 - 2\frac{h_k}{S}\right)\frac{\lambda_N(E)}{h_k} \leqslant m_k(E) \leqslant \frac{\lambda_N(E)}{h_k} \tag{31}$$

(参见文献[2]的引理2.2).

为了完成定理的证明, 我们证明以下引理:

引理2.3 对任意 $\delta > 0$, $\sigma \in (0, 1)$, a.s. 存在一个 $k^0(\delta, \sigma) = (k^0(\delta, \sigma)_1, \cdots, k^0(\delta, \sigma)_N)$, 使得对 $k \geq k^0(\delta, \sigma)$, 有

$$|N_k(E) - m_k(E)p_k(\lambda)| \leqslant \sigma m_k(E)p_k(\lambda), \tag{32}$$

其中 $E \subseteq [0, 1]^N$ 是 Lebesgue 测度大于 $h_k^{1-\lambda^2-\delta}$ 的超长方体的不交并.

证明 因为对所有 $k \geq 1$, $N_k(\cdot)$ 和 $m_k(\cdot)$ 是可加集函数, 所以只要证明式(32)对 $E = I$ 成立就够了, 其中 I 是一个 Lebesgue 测度 $\lambda_N(I) \geqslant h_k^{1-\lambda^2-\delta}$ 的超长方体.

固定 $0 < \delta' < \delta$ 和 $0 < \sigma' < \sigma$. 记 $M(k_l) = [h_{k_l}^{-\lambda^2-\delta'}]$, $J(j, k) = \prod_{l=1}^N [j_l h_{k_l}, (j_l + M(k_l))h_{k_l}]$, $L = ([[\lambda_N(I)/h_k^{1-\lambda^2-\delta'}]^{1/2}] - 2)^2$, $M = ([[\lambda_N(I)/h_k^{1-\lambda^2-\delta'}]^{1/2}] + 2)^2$. 易知 $\lambda_N(J(j, k)) \sim h_k^{1-\lambda^2-\delta'}$. 使用类似于文献[2]中引理2.3的证明方法, 我们能证明存在 $k_0(\sigma, \delta)$, 使得对任意 $k \geq k_0(\sigma, \delta)$, 可以选择 L 个形如 $J(j, k)$ 的不相交超长方体 $J_1, \cdots, J_L$ 和 M 个形如 $J(j, k)$ 的不相交超长方体 $J_1', \cdots, J_M'$, 使得

$$\bigcup_{l=1}^{L} J_l \subseteq I \subseteq \bigcup_{m=1}^{M} J_m'.$$

同时我们也能证明: 如果对 $J_1, \cdots, J_L, J_1', \cdots, J_M'$, 式(32)成立, 那么对 I 本身也成立.

下面我们来证明, 当 E 被形如 $\prod_{l=1}^N [j_l h_{k_l}, (j_l + M(k_l))h_{k_l}]$, 其中 $0 \leqslant j_l \leqslant 2m_{k_l}$, $l = 1, \cdots, N$, 的超长方体 J 替代时, 式(32)成立. 这种超长方体的总数不超过 $2^N h_k^{-1}$. 设 J' 和 J 是两个不交的形如 $\prod_{l=1}^N [j_l h_{k_l}, (j_l + M(k_l))h_{k_l}]$, $0 \leqslant j_l \leqslant 2m_l$, $l = 1, \cdots, N$, 的超长方体, 记 $h_{k_l} =$

$M(k_l)h_{k_l}$, $h_k=\prod_{l=1}^N h_{k_l}$ 和 $I_J=1\left\{|X(J)|>\lambda(2\sigma^2(J)\ln h_k^{-1})^{1/2}\right\}$, $I_{J'}=1\left\{|X(J')|>\lambda(2\sigma^2(J')\ln h_k^{-1})^{1/2}\right\}$, 其中 $\sigma(J)=\sigma(J')=\prod_{l=1}^N\sigma_l(M(k_l)h_{k_l})$.

又记
$$Y_J=\frac{|X(J)|}{\sigma(J)(2\ln h_k^{-1})^{1/2}},\quad Y_{J'}=\frac{|X(J')|}{\sigma(J')(2\ln h_k^{-1})^{1/2}}.$$
我们有
$$\operatorname{cov}(I_J,I_{J'})=P\{Y_J>\lambda,Y_{J'}>\lambda\}-P\{Y_J>\lambda\}P\{Y_{J'}>\lambda\}.\tag{33}$$
利用熟知的不等式
$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{x^3}\right)\mathrm{e}^{-x^2/2}\leqslant 1-\Phi(x)\leqslant\frac{1}{\sqrt{2\pi}x}\mathrm{e}^{-x^2/2},$$
其中 $\Phi(x)=P\{N(0,1)\leqslant x\}$, 再利用 Khoshnevisan 和 Shi[6] 的第 4 节中同样的论证, 我们有
$$P\{Y_J>\lambda,Y_{J'}>\lambda\}=\frac{1}{2\pi\sqrt{1-\rho^2}}\int_a^\infty\int_a^\infty\exp\left\{-\frac{x^2+y^2-2\rho xy}{2(1-\rho^2)}\right\}\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\geqslant$$
$$\frac{1}{2\pi\sqrt{1+\rho^2}}\int_a^\infty\int_a^\infty\exp\left\{-\frac{(1+\rho^-)(x^2+y^2)}{2(1-\rho^2)}\right\}\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=$$
$$\frac{\sqrt{1-\rho^2}}{1+\rho^-}\left(1-\Phi\left(a\sqrt{\frac{1+\rho^-}{1-\rho^2}}\right)\right)^2\geqslant$$
$$\frac{1}{2\pi}\frac{(1-\rho^2)^{3/2}}{(1+\rho^-)^2a^2}\left(1-\frac{1-\rho^2}{(1+\rho^-)a^2}\right)^2\exp\left\{-a^2\frac{1+\rho^-}{1-\rho^2}\right\}$$
和
$$P\{Y_J>\lambda\}=P\{Y_{J'}>\lambda\}\leqslant\frac{1}{\sqrt{2\pi}a}\mathrm{e}^{-a^2/2},$$
其中
$$\rho=\frac{1}{\sigma^2(h_k)}EX(J)X(J'),\ \rho^-=\max\{-\rho,0\},\ \rho^+=\max\{\rho,0\},\ a=\lambda\sqrt{2\ln h_k^{-1}}.$$
因此
$$P\{Y_J>\lambda\mid Y_{J'}>\lambda\}=P\{Y_J>\lambda\}\cdot\frac{P\{Y_J>\lambda,Y_{J'}>\lambda\}}{(P\{Y_J>\lambda\})^2}\geqslant$$
$$P\{Y_J>\lambda\}\frac{(1-\rho^2)^{3/2}}{(1+\rho^-)^2}\left(1-\frac{1-\rho^2}{(1+\rho^-)a^2}\right)^2\exp\left\{-a^2\frac{\rho^-+\rho^2}{1-\rho^2}\right\}.\tag{34}$$
另一方面从文献[7]中的定理 5.2 的证明, 我们有
$$P\{Y_J>\lambda\mid Y_{J'}>\lambda\}\leqslant P\{Y_J>\lambda\}\frac{1-\rho^2}{(1-\rho^+)^{3/2}}(1-a^{-2})\exp\left\{\frac{a^2}{2}\frac{\rho^+-\rho^2}{1-\rho^2}\right\}.\tag{35}$$
令
$$A=\frac{(1-\rho^2)^{3/2}}{(1+\rho^-)^2}\left(1-\frac{1-\rho^2}{(1+\rho^-)a^2}\right)\exp\left\{-a^2\frac{\rho^-+\rho^2}{1-\rho^2}\right\},$$
$$B=\frac{1-\rho^2}{(1-\rho^+)^{3/2}}(1-a^{-2})\exp\left\{\frac{a^2}{2}\frac{\rho^+-\rho^2}{1-\rho^2}\right\}.$$
对于 $j_l\neq j_l'$, $l=1,\cdots,N$, 记 $t_l=j_lh_{k_l}$ 和 $t_l'=j_l'h_{k_l}$,
$$\rho=\frac{1}{\sigma^2(h_k)}E[X([t,t+h_k])X([t',t'+h_k])]=$$
$$\frac{1}{\sigma^2(h_k)}\prod_{l=1}^N(\sigma_l^2(|t_l+h_{k_l}-t_l'|)+\sigma_l^2(|t_l-h_{k_l}-t_l'|)-2\sigma_l^2(|t_l-t_l'|))=:$$
$$\prod_{l=1}^N\rho_l,$$

其中 $\rho_l = \frac{1}{\sigma_l^2(h_k)}\left(\sigma_l^2(|t_l + h_{k_l} - t_l'|) + \sigma_l^2(|t_l - h_{k_l} - t_l'|) - 2\sigma_l^2(|t_l - t_l'|)\right)$.

由式(7)和(8),再利用在文献[7]中定理5.2的证明中使用过的类似方法,我们有

$$|\rho_l| \leqslant c\frac{h_{k_l}^{2-2\alpha_l}}{L_l(h_{k_l})}. \tag{36}$$

所以有

$$a^2\rho \leqslant c^N\lambda^2\prod_{l=1}^N \ln h_{k_l}^{-1}\frac{h_{k_l}^{2-2\alpha_l}}{L_l(h_{k_l})} = o(a^{-4}). \tag{37}$$

由式(37)可得 $A = 1 + o(a^{-4})$ 和 $B = 1 + o(a^{-4})$. 由式(34)、(35)和(36),我们有

$$|\rho_{J,J'}| := \frac{|\operatorname{cov}(I_J, I_{J'})|}{\sqrt{\operatorname{var}(I_J)\operatorname{var}(I_{J'})}} = \left|\frac{P\left\{Y_J > \lambda \| Y_{J'} > \lambda\right\}}{P\left\{Y_J > \lambda\right\}} - 1\right| \leqslant O(a^{-4}) \leqslant c(\ln h_k)^{-2} \to 0.$$

对 $j = (j_1, \cdots, j_N)$, $k = (k_1, \cdots, k_N)$, 把 $J = \prod_{l=1}^N [j_l h_{k_l}, (j_l + M(k_l))h_{k_l}]$ 记作 $J_{j,k}$. 因此我们能将 $Y_{J_{j,k}}$, $k_l \geqslant 1$, $0 \leqslant j_l \leqslant k_l$, $l = 1, \cdots, N$ 看作一个具有混合系数 $\rho_{J,J'}$ 的 ρ^* 混合的随机场. 再注意到 $N_k(J) = \sum_{j_1=1}^{m_{k_1}} \cdots \sum_{j_N=1}^{m_{k_N}} I_J$, 由 N 参数 ρ^* 混合序列的中心极限定理(参看文献[8]),我们有

$$P\left\{N_k(J) > (1+\sigma')m_k(J)p_k(\lambda)\right\} = P\left\{\frac{N_k(J) - m_k(J)p_k(\lambda)}{\sqrt{\operatorname{var}(N_k(J))}} > \frac{\sigma' m_k(J)p_k(\lambda)}{\sqrt{\operatorname{var}(N_k(J))}}\right\} \leqslant$$
$$2P\left\{N(0,1) > \frac{\sigma' p_k(\lambda)}{\sqrt{p_k(\lambda)(1-p_k(\lambda))/(m_k(J))}}\right\} \leqslant$$
$$\frac{\sqrt{1-p_k(\lambda)}}{\sigma'\sqrt{m_k(J)p_k(\lambda)}}\exp\left\{-\frac{\sigma'^2 m_k(J)p_k(\lambda)}{2(1-p_k(\lambda))}\right\}.$$

由关于 $\left\{h_{k_l}\right\}$ 的条件(ii)和式(31)、(32)我们有

$$\sum_{k_1=1}^\infty \cdots \sum_{k_N=1}^\infty \sum_{j_1=1}^{m_{k_1}} \cdots \sum_{j_N=1}^{m_{k_N}} \frac{\sqrt{1-p_k(\lambda)}}{\sigma'\sqrt{m_k(J)p_k(\lambda)}}\exp\left\{-\frac{\sigma'^2 m_k(J)p_k(\lambda)}{2(1-p_k(\lambda))}\right\} <$$
$$\sum_{k_1=1}^\infty \cdots \sum_{k_N=1}^\infty C\prod_{l=1}^N h_{k_l}^{-1-\delta}\exp\left\{-\frac{\sigma'^2}{2}h_{k_l}^{-\delta'}\right\} < \infty.$$

利用 Borel_Camtelli 引理可得, 对所有充分大的 $k_l(l = 1, \cdots, N)$, 以概率1有

$$N_k(J) \leqslant (1+\sigma')m_k(J)p_k(\lambda).$$

类似可证,对所有充分大 k_l, $l = 1, \cdots, N$, 以概率1有

$$N_k(J) \geqslant (1-\sigma')m_k(J)p_k(\lambda).$$

因此对任何形如 $\prod_{l=1}^N [(j_l h_{k_l}, (j_l + M_l(k_l))h_{k_l})]$, 其中 $0 \leqslant j_l \leqslant 2m_{k_l}$, $l = 1, \cdots, N$, 的超长方体, 式(32)得证. 所以当 $E = J$ 时式(32)是正确的. 从而当 E 是一个测度大于 $h_k^{1-\lambda^2-\delta}$ 的超长方体的不交并时也成立. 引理2.3得证.

式(26)证明的其余部分类似于文献[2]中式(2.5)的证明的相应部分,从略. 定理证毕.

感谢 作者感谢杭电基金(KYS09150604)对本文的资助.

[参 考 文 献]

[1] Orey S, Taylor S J. How often on a Brownian path does the law of the iterated logarithm fail? [J].

Proceedings of the London Mathematical Society, 1974, **28**(1): 174_192.

[2] Zacharie D. On the Hausdorff dimension of the set generated by exceptional oscillions of a two_parameter Wiener process[J]. Journal of Multivariate Analysis, 2001, **79**(1): 52_70.

[3] Orey S, Pruitt W E. Sample functions of the N_parameter Wiener process[J]. The Annals of Probability, 1973, **1**(1): 138_163.

[4] Lin Z Y, Choi Y K. Some limit theorems for fractional L vy Brownian fields[J]. Stochastic Processes and Their Applications, 1999, **82**(2): 229_244.

[5] Bingham N, Goldie C, Teugels J. Regular Variation[M]. London: Cambridge University Press, 1987.

[6] Khoshnevisan D, Shi Z. Fast Sets and Points for Fractional Brownian Motion. S minaire de Probabiliti s[M]. **34**. Lecture Notes of Mathematics. Berlin: Springer, 2000.

[7] Khoshnevisan D, Peres Y, Xiao Y. Limsup random fractals[J]. Electronic Journal of Probability, 2000, **5**(4): 1_24.

[8] Bradley R C. On the spectral density and asymptotic normality of weakly dependent random fields [J]. Journal of Theoretical Probability, 1992, **5**(2): 355_373.

Hausdorff Dimension of the Set Generated by Exceptional Oscillations of a Class of *N*_Parameter Gaussian Processes

LIN Zheng_yan[1], CHENG Zong_mao[1,2]

(1. Department of Mathematics, Zhejiang University, Hangzhou 310028, P.R. China;
2. Department of Mathematics, Hangzhou Dianzi University,
Hangzhou 310018, P.R. China)

Abstract: A class of N_parameter Gaussian processes were introduced, which are more general than the N_parameter Wiener process. The definition of the set generated by exceptional oscillations of class of these processes was given. And then the Hausdorff dimension of this set was defined. The Hausdorff dimensions of these processes were studied and an exact representative for them was given, which is similar to that for the two_parameter Wiener process by Zacharie (2001). Moreover, the time set considered is a hyperrectangle which is more general than a hyper_square used by Zacharie (2001). For this more general case, a Fernique_type inequality was established and then using this inequality and the Slepian lemma, a L vy' s continuity modulus theorem was shown. Independence of increments is required for showing the representative of the Hausdorff dimension by Zacharie (2001). This property is absent for the processes introduced here, so a different way is to be found.

Key words: N_parameter Gaussian process; modulus of continuity; Hausdorff dimension