

一类二维对偶积分方程的解及其应用

范天佑, 孙竹凤

(北京理工大学 物理系 北京 100081)

(程昌钧推荐)

摘要: 二维对偶积分方程的理论与方法, 在数学上尚未建立, 因而完全的分析解不可能得到, 从而使一些力学、物理与工程问题无法求解. 利用双重展开和边界配置方法, 得到了在数学和物理学上有着广泛应用的一类二维对偶积分方程的解答. 把二维对偶积分方程化简成无限代数方程组, 此方法的精确度取决于计算点的配置(即所谓边界配置). 通过对固体力学中某些复杂的初值-边值问题的应用说明此是方法有效的.

关键词: 二维对偶积分方程; 二重展开; 边界配置

中图分类号: O175.5 **文献标识码:** A

引 言

人们熟知, 关于一维对偶积分方程

$$\begin{cases} \int_0^1 y f(y) J(xy) dy = g(x), & 0 < x < 1, \\ \int_0^1 f(y) J(xy) dy = 0, & x > 1 \end{cases} \quad (1)$$

的理论已有较完整的论述, 如文献[1-11]所述, 它比普通积分方程复杂得多. 而在科学与工程中出现的二维对偶积分方程, 又比一维对偶积分方程的求解具有根本性困难. 本文对一类二维对偶积分方程(例如, 它来源于生产实践中提出的力学问题^[12])进行求解, 其形式为

$$\begin{cases} \int_0^1 \int_0^1 g_1(\alpha, \beta, s, x_1, x_2) f(\alpha, \beta, s) J(\alpha x_1) J(\beta x_2) d\alpha d\beta = \\ \quad h(x_1, x_2, s), & (x_1, x_2) \in \Omega_1, \\ \int_0^1 \int_0^1 g_2(\alpha, \beta, s, x_1, x_2) f(\alpha, \beta, s) J(\alpha x_1) J(\beta x_2) d\alpha d\beta = 0, & (x_1, x_2) \in \Omega_2 \end{cases} \quad (2)$$

其中 g_1, g_2, h 为已知函数, f 为待定的未知函数, J_1 与 J_2 为第一类 ν_1 阶与 ν_2 阶 Bessel 函数, α, β, x_1, x_2 为实变量, s 为复变量, Ω_1 与 Ω_2 为 $x_1 x_2$ 平面上的任意二维区域, 且互补, 即 $\Omega_1 + \Omega_2$ 代表整个 $x_1 x_2$ 平面.

方程(2)的求解困难不仅在于其维数较一维对偶积分方程(1)高, 还在于区域 Ω_1 与 Ω_2 复

收稿日期: 2006_04_03; 修订日期: 2006_11_30

基金项目: 国家自然科学基金资助项目(K19672007)

作者简介: 范天佑(1939), 男, 江苏人, 教授(联系人, E-mail: liorgtzh@263.net)

杂 由于它们的制约, 方程(2) 中的 x_1 与 x_2 的变化是互相关联的, 给解析求解带来极大的困难, 使推导一维对偶积分方程的解的那些方法在这里无效, 必须寻求其他求解方法

1 近似分析解

本文建议把未知函数 $f(x_1, x_2, s)$ 作二重展开, 即

$$f(x_1, x_2, s) = \sum_{m,n=0}^{\infty} C_{m,n}(s) J_m(a_1) J_n(b_2), \quad (3)$$

其中 $C_{m,n}$ 为待定系数, J_m 与 J_n 为上面所说第一类 m 阶与 n 阶 Bessel 函数, a 与 b 为任选的常数, 目的使 Bessel 函数的宗量无量纲化

把式(3) 代入式(2) 之后, 我们得到关于 $C_{m,n}$ 的代数方程组, 因而把求二维对偶积分方程的解的问题(2) 化成求代数方程组的解的问题, 而后者相对比较容易处理 以下讨论它的数值计算和计算机实现问题

在实际计算时, 取 $m = 0, 1, 2, \dots, M; n = 0, 1, 2, \dots, N$ 同时在区域 Ω_1 上取 P 个点, 在 Ω_2 上取 Q 个点, 要求 $P + Q = (M + 1)(N + 1)$ 这样, 对偶积分方程(2) 近似地化成下列代数方程组

$$BD = R, \quad (4)$$

$$D_{(m+1)(n+1)} = C_{m,n}, \quad (5)$$

$$B = B_{p,q}, \quad (6)$$

$$D = (D_1, D_2, \dots, D_{(M+1)(N+1)})^T, \quad (7)$$

$$R = (R_1, R_2, \dots, R_{(M+1)(N+1)})^T, \quad (8)$$

其中

$$B_{i,(m+1)(n+1)} = \int_0^1 \int_0^1 g_1(x_1, x_2, s, x_1^{(i)}, x_2^{(i)}) J_m(a_1) J_n(b_2) J(x_1 x_1^{(i)}) J(x_2 x_2^{(i)}) dx_1 dx_2, \quad i = 1, 2, \dots, P, \quad (9)$$

$$B_{j+P,(m+1)(n+1)} = \int_0^1 \int_0^1 g_2(x_1, x_2, s, x_1^{(j+P)}, x_2^{(j+P)}) J_m(a_1) J_n(b_2) J(x_1 x_1^{(j+P)}) J(x_2 x_2^{(j+P)}) dx_1 dx_2, \quad j = 1, 2, \dots, Q, \quad (10)$$

$$R_i = h(x_1^{(i)}, x_2^{(i)}, s), \quad i = 1, 2, \dots, P, \quad (11)$$

$$R_{j+P} = 0, \quad j = 1, 2, \dots, Q, \quad (12)$$

$x_1^{(i)}, x_2^{(i)}$ 代表在 Ω_1 或 Ω_2 上所取点的坐标, T 代表转置算子

解出方程组(4), 就得出前 $(M + 1)(N + 1)$ 个 $C_{m,n}$, 因而得到近似解

$$f(x_1, x_2, s) \approx \sum_{m,n=0}^{M,N} C_{m,n}(s) J_m(a_1) J_n(b_2) \quad (13)$$

原则上, 区域 Ω_1 与 Ω_2 中的点可以任意选取, 点的数目也可以任意选取 由两个不同的点的配置方式和不同的点的数目计算得到的 $f(x_1, x_2, s)$ 值记为 $f(x_1, x_2, s)$ 与 $f(x_1, x_2, s)$ 若

$$|f(x_1, x_2, s) - f(x_1, x_2, s)| < \epsilon, \quad (14)$$

则认为计算稳定, 它们中的任何一个可以认为是方程(2) 所需要的解, ϵ 为问题所要求的计算精度

本文所建议的方法简单, 计算工作量又很小(方程组(4) 仅仅是一个几十阶的代数方程组), 也解决了长期困扰人们无法求解的二维对偶积分方程问题 这一方法的提出不仅解决了力学中一些困难的高维的边值_初值问题, 还可以用到热传导、电磁场一些问题的求解中去

本文研究的区域 Ω_1 与 Ω_2 是物理问题的边界, 在采用二重展开(3) 的基础上, 仅在边界 Γ_1 与 Γ_2 上取有限个计算点计算, 就能得到对偶积分方程(2) 的近似解 这实质上发展了一种广义边界配置法, 同过去用于其他问题中的不同的边界配置法一样, 其收敛性很难从数学上给出证明

2 应 用

以上我们用级数展开的方法得到二维对偶积分方程的近似解, 我们把它用于三维动态断裂力学中, 得到三维椭圆盘状裂纹在冲击应力下的解 所得结果同有限元解^[13] 很接近, 这表明本文求二维对偶积分方程的方法有效 现在针对这一极具实际意义和理论意义的实例, 给出二维对偶积分方程组(2) 的具体结果 这里 Ω_1 代表椭圆区域, Ω_2 为椭圆外的区域

如图 1 所示, 在一无限三维弹性介质中, 存在一个椭圆盘状裂纹 设裂纹位于 x_1x_2 平面上, 其法线方向与 x_3 方向重合, $x_3 = \sigma^+$, $(x_1, x_2) \in \Omega_1$ 和 $x_3 = \sigma^-$, $(x_1, x_2) \in \Omega_1$ 代表裂纹的上下表面, a 与 b 为椭圆的长、短半轴, 在无限远处, 作用单向拉伸 $\sigma_{33}(x_1, x_2, 0, t) = p_0 f(t)$, σ_{ij} 代表应力分量, 其中 p_0 为一常数, $f(t)$ 为任意的时间函数

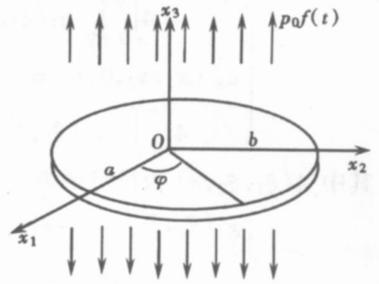


图 1 受冲击椭圆盘状裂纹

由于此问题关于 x_1x_2 平面对称, 研究半空间($x_3 > 0$, 或 $x_3 < 0$) 即可, 这时可以假定在无限远处不受力, 在裂纹面上受压应力 针对半空间, 此问题的初始条件和边界条件如下:

$$u_i(x_1, x_2, x_3, 0) = 0, \quad \dot{u}_i(x_1, x_2, x_3, 0) = 0, \tag{15}$$

$$\begin{cases} \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2} > \sqrt{a^2 + b^2} & : & \sigma_{ij} = 0, \\ x_3 = 0, \quad x_1^2/a^2 + x_2^2/b^2 \leq 1 & : & \sigma_{33} = -p_0 f(t), \\ x_3 = 0, \quad x_1^2/a^2 + x_2^2/b^2 \leq 1 & : & u_3 = 0, \\ x_3 = 0, \quad -\infty < x_1, x_2 < \infty & : & \sigma_{13} = \sigma_{23} = 0, \end{cases} \tag{16}$$

这里 u_i 代表位移分量 在计算中取

$$f(t) = H(t), \tag{17}$$

$H(t)$ 为 Heaviside 函数

此问题由波动方程组

$$\Delta^2 u = \frac{1}{c_1^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}, \quad \Delta^2 v = \frac{1}{c_2^2} \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} \tag{18}$$

控制, 其中 Δ 与 ∇ 为 Lam 标势与矢势:

$$\mathbf{u} = \nabla \phi + \nabla \times \mathbf{v}, \tag{19}$$

\mathbf{u} 为位移矢量, ∇ 与 $\nabla \times$ 为梯度与旋度算子, c_1 与 c_2 为纵波与横波波速

$$c_1 = [(\lambda + 2\mu)/\rho]^{1/2}, \quad c_2 = (\mu/\rho)^{1/2}, \tag{20}$$

与 ρ 代表材料的 Lam 常数, ρ 为质量密度

这里的三维裂纹动力学问题化成在初始条件(15) 与边界条件(16) 下求解偏微分方程组

(18)

参考文献[12]给出了方程(18)解的积分表达式,根据 Laplace 变换

$$f^*(x_1, x_2, x_3, s) = \int_0^\infty f(x_1, x_2, x_3, t) e^{-st} dt$$

和双重 Fourier 变换

$$f^*(\alpha_1, \alpha_2, x_3, s) = \iint_{-\infty}^{\infty} f^*(x_1, x_2, x_3, s) e^{i(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2)} dx_1 dx_2,$$

其中 $f(x_1, x_2, x_3, t)$ 表示 (x_1, x_2, x_3, t) 或 (x_1, x_2, x_3, t) 的任一分量, x_i 表示空间坐标, t 是时间, s 是 Laplace 变换参量, α_1, α_2 是 Fourier 变换参量, $i = \sqrt{-1}$

所有的场变量(如应力和位移)都能通过广义 Hooke 定律由 Lam 势函数的 Laplace-Fourier 变换表示 我们发现在 Laplace 变换下的法向正应力和位移间有非常简单的表达式,即在平面 $x_3 = 0$ 时,有如下关系:

$$\begin{cases} \sigma_{33}(x_1, x_2, 0, s) = \\ \quad - 4 \int_0^\infty \int_0^\infty g_1(\alpha_1, \alpha_2, s) A(\alpha_1, \alpha_2, s) \cos(\alpha_1 x_1) \cos(\alpha_2 x_2) d\alpha_1 d\alpha_2 \\ u_3^*(x_1, x_2, 0, s) = \\ \quad 4 \int_0^\infty \int_0^\infty g_2(\alpha_1, \alpha_2, s) A(\alpha_1, \alpha_2, s) \cos(\alpha_1 x_1) \cos(\alpha_2 x_2) d\alpha_1 d\alpha_2, \end{cases} \quad (21)$$

其中 $A(\alpha_1, \alpha_2, s)$ 为待定函数,与方程(2)中的 $f(\alpha_1, \alpha_2, s)$ 相当,以及

$$\begin{cases} g_1(\alpha_1, \alpha_2, s, x_1, x_2) = \left\{ (\alpha_1^2 - \alpha_1^2 - \alpha_2^2)(\alpha_2^2 + \alpha_1^2 + \alpha_2^2) + 2 \left[\alpha_1^2 (\alpha_2^2 + \alpha_1^2 + \alpha_2^2) - 2 \alpha_1 \alpha_2 (\alpha_1^2 + \alpha_2^2) \right] \right\} \frac{1}{2} (\alpha_1, \alpha_2, x_1, x_2)^{1/2} \left(\alpha_2^2 + \alpha_1^2 + \alpha_2^2 \right), \\ g_2(\alpha_1, \alpha_2, s, x_1, x_2) = \\ \quad \left[\alpha_1 (\alpha_1^2 + \alpha_2^2 - \alpha_2^2) / (\alpha_2^2 + \alpha_1^2 + \alpha_2^2) \right] \frac{1}{2} (\alpha_1, \alpha_2, x_1, x_2)^{1/2}, \end{cases} \quad (22)$$

其中 $\alpha_1 = \left[\alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \frac{s^2}{c_1^2} \right]^{1/2}$, $\alpha_2 = \left[\alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \frac{s^2}{c_2^2} \right]^{1/2}$,

α_1 和 α_2 已由前面定义, p_0 是均匀压应力 考虑到 Bessel 函数与三角函数之间的熟知的关系,上述公式代入边界条件(16),即得到由式(2)给出的二维对偶积分方程,这里的待定函数为 $A(\alpha_1, \alpha_2, s)$,并且由式(16)、(17),这里 $h(x_1, x_2, s) = -p_0/s$, p_0 代表常压力

在计算时,比值 ν 仅与 Poisson 系数有关,取 $\nu = 0.01$, $b/a = 0.25$ 与 0.50 在区域 α_1 和 α_2 中分别取 25 个点和 24 个点,采用 Laplace 变换的数值反演方法^[14],即

$$s = s_l = (\alpha + l), \quad l = 1, 2, \dots, \quad (23)$$

这里 α 和 β 是为保证计算稳定可适当选择的两个参数 这样得到前 49 个 $C_{m,n}$ 的数值,因而得到式(13)的近似解,再进行 Laplace 反变换得到物理空间的位移 这里的计算结果和文献[13]用有限元方法得到的结果十分一致

设在裂纹前缘内侧距离为 r 处, s 平面上(即 Laplace 变换域中的)裂纹张开位移 $u_3^*(x_1, x_2, 0, s) = u_3^*(r, \alpha, 0, s)$, 其中 $\alpha = \arctan(x_2/x_1)$ 因为裂纹顶端前缘为平面应变状态,有如下公式

$$u_3(r, \alpha, 0, s) = \frac{2(1-\nu^2)}{E \sqrt{r}} (2r)^{1/2} K^*(b/a, \alpha, s) \quad (24)$$

此公式揭示了裂纹张开位移与 α 型应力强度因子的关系,普遍适用,其中 E 为弹性模量, ν 为

Poisson 比, K^* 为 Laplace 变换域(s 平面)上的 \tilde{N} 型动态应力强度因子, 即

$$K^*(b/a, U, s) = \lim_{r, y \rightarrow 1} \sqrt{2Pr} K_{33}^*(x_1, x_2, 0, s),$$

其中 $x_1 = ar \cos U, x_2 = br \sin U$, 此应力强度因子也可以由公式(24) 令 $E_y = 0$ 时取极值而得到, 而且由位移计算比由应力计算精度高 1 由式(24) 得到 $K^*(b/a, U, s)$ 之后, 再实施 Laplace 变换的反演, 即

$$K(b/a, U, s) = L^{-1}(K^*(b/a, U, s)), \tag{25}$$

即得到物理时间_空间中的动态应力强度因子, 其中 L^{-1} 代表 Laplace 逆变换 1 显然它除了与外应力 p_0 大小和 $f(t)$ 以及 Poisson 比 M 有关之外, 还与几何因素 b/a , 角分布 U 有关 1 在整理计算结果时, 我们用了无量纲化应力强度因子, 即比值 $K(b/a, U, t)/K^{static}$ 随 b/a 、 U 和 t 的变化而变化, 其中 b/a 与 U (以及 M) 作为参量, 应力强度因子随时间 t 的演化则充分揭示了其动力学特征 1 这一 Laplace 反变换的数值方法在文献[14] 中有系统的研究 1

我们计算时取无量纲化的动态应力强度因子

$$K(t)/K^{static} \tag{26}$$

随无量纲化时间 c_2t/a 变化, 其中 K^{static} 为静态应力强度因子

$$K^{static} = \frac{p_0 \sqrt{P}}{E(k)} \left(\frac{b}{a} \right)^{1/2} (a^2 \sin^2 U + b^2 \cos^2 U)^{1/4}, \tag{27}$$

$E(k)$ 为第二类完全椭圆积分, 即

$$E(k) = \int_0^{\pi/2} (1 - k^2 \sin^2 H)^{1/2} dH \quad k = \left(\frac{a^2 - b^2}{a^2} \right)^{1/2}$$

图 2 中给出了 $M = 0.29$, 几何参数 $b/a = 0.25$ 与 $b/a = 0.50$ 情况下的无量纲动态应力强度因子的结果 1 此结果与我们用动态有限元所得的结果^[13] 进行比较, 说明本文的计算结果是 很好的 1

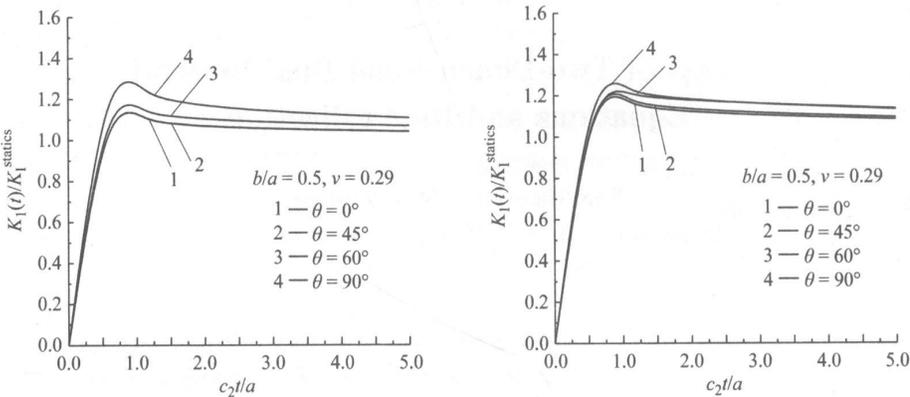


图 2 无量纲动态应力强度因子随无量纲时间的变化

3 结论和讨论

由图 2 所示的结果不难发现, 所有动态应力强度因子的早期响应行为十分相似, 因此这一结果可以用来刻画动态断裂行为 1

此前只有二维裂纹和圆盘形裂纹在轴对称冲击载荷作用下的解, 它们可视为本文工作的特例, 即 $b/a = 0$ 和 $b/a = \infty$ 的情况 1 对于瞬态动力学的响应问题, 其早期行为是人们关注的焦点, 就这一点而言, 各种动态裂纹的响应具有共同的特征, 这里引进了几何参数 b/a 和 U 来

揭示三维动态裂纹的特征,不妨说是本文的创新1

[参 考 文 献]

- [1] Titchmarsh B C. Introduction to the Theory of Fourier Integrals [M]. Oxford: Clarendon Press, 1937.
- [2] Busbridge I W. Dual integral equations [J]. Math Soc Proc , 1938, 44(2) : 115_129.
- [3] Weber H. Bber die Besselschen Funktionen und ihre Anwendung auf die Theorie der electrischen Str me [J]. Journal f r die Reihe und Angew andte Mathem atik , 1873, 75(1) : 5_105.
- [4] McDonald H M. The electrical distribution induced on a circular disk placed in any field of force [J]. Phil Mag , 1895, 26(1) : 257_260.
- [5] King L V. On the acoustic radiation pressure on circular disk [J]. Roy Soc London Proc Ser A , 1935, 153(1) : 1_16.
- [6] Copson E T. On the problem of the electrified disk [J]. Edin burgh Math Soc Proc , 1947, 8(1) : 5_14.
- [7] Tranter C J. On some dual integral equations [J]. Quar J Math Ser 2, 1951, 2(1) : 60_66.
- [8] Gordon A N. Dual integral equations [J]. London Math Soc J , 1954, 29(5) : 360_369.
- [9] Nobel B. On some dual integral equations [J]. Quar J Math , 1955, 6(2) : 61_67.
- [10] Nobel B. The solutions of Bessel_function dual integral equations by a multiplying factor method [J]. Proceeding of Cambridge Philosophical Society , 1963, 59(4) : 351_362.
- [11] 范天佑. 对偶积分方程与对偶积分方程组及其在固体力学和流体力学中的某些应用 [J]. 应用数学学报, 1979, 2(3) : 212_230.
- [12] Fan T Y, Hahn H G, Violet A. Three_dimensional problem of transient contact dynamics [J]. Science in China A , 1996, 39(10) : 1096_1105.
- [13] Sun Z F, Wu X F, Fan T Y. Three_dimensional elliptic crack under impact loading [J]. Acta Mechanica Solida Sinica , 2001, 14(4) : 312_318.
- [14] 范天佑. Laplace 变换的数值反演 [J]. 数学认识与实践, 1987, 16(3) : 68_75.

A C l a s s o f T w o _ D i m e n s i o n a l D u a l I n t e g r a l E q u a t i o n s a n d I t s A p p l i c a t i o n

FAN Tian_you, SUN Zhu_feng

(Department of Physics , Beijing Institute of Technology ,
Beijing 100081, P . R . China)

Abstract: Because exact analytic solution was not available, the double expansion and boundary collocation were used to construct an approximate solution for a class of two-dimensional dual integral equations in mathematical physics. The integral equations by this procedure were reduced to infinite algebraic equations. The accuracy of the solution lies in the boundary collocation technique. The application of which for some complicated initial-boundary value problems in solid mechanics indicates the method is powerful.

Key words: two-dimensional dual integral equations; double expansion; boundary collocation