

考虑阻尼的状态向量方程和层合板的振动分析

卿光辉¹, 徐建新¹, 邱家俊²

(1. 中国民航大学 机电分院, 天津 300300;
2. 天津大学 机械工程学院 力学系, 天津 300072)

(钟万勰推荐)

摘要: 基于考虑弹性体粘滞阻尼的修正后的 Hellinger-Reissner (H_R) 变分原理, 推导了相应的状态向量方程。结合精细积分法和 Muller 法为四边简支矩形层合板的简谐振动分析提出了新的方法。依据线性阻尼振动理论, 简要地给出了复合材料层合板欠阻尼、临界阻尼和过阻尼 3 种自由运动的通解公式。通过数值实例研究了粘滞阻尼对复合材料层合板振动的影响。丰富了状态向量方程的理论体系和应用领域。

关键词: 层合板; 阻尼; 振动; H_R 变分原理; 状态向量方程
中图分类号: O343.2; O176 **文献标识码:** A

引 言

从弹性力学基本方程导出的状态向量方程或 Hamilton 正则方程^[1,6]和 Stroh 公式^[7]都有一个明显的特点, 即方程中包含了位移和应力变量。基于这些理论的解析法有以下的优点: 1) 不需引入任何有关位移和应力模式的假设; 2) 可考虑剪切效应的影响; 3) 由于传递矩阵的引入可保证层间的位移和应力的连续性; 4) 在理论上不限制结构的厚度。近年来, 不少研究人员利用这两种理论处理了很多实际问题和进一步的完善、推广研究。

就一般的工程结构来说, 结构的刚性较大, 在研究其动力学问题时, 通常不考虑阻尼对结构的振动作用。对于柔性结构, 阻尼对结构振动有较大的影响, 应该重视, 例如, 航天器和空间站等结构。动力学问题中的阻尼理论是相关工程结构和精密仪器振动控制或有效利用阻尼的基础。

在振动理论中, 考虑阻尼力的多自由度的质点振动系统方程, 可以通过变换化成状态向量方程或 Stroh 公式的形式。假设这里也考虑阻尼因素, 那么描述弹性连续体板壳结构的状态向量方程, 是否也有一套完整阻尼振动理论? 这是本文工作的主要出发点之一。

收稿日期: 2005_11_01; 修订日期: 2006_12_06

作者简介: 卿光辉(1968), 男, 湖南人, 副教授, 博士(联系人, Tel/Fax: + 86_22_24092421; E_mail: Qingluke@126.com)

1 基本公式

假设各向异性材料的本构方程如下

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{C} \boldsymbol{\varepsilon}, \quad (1)$$

其中 $\boldsymbol{\sigma}$ 是应力列向量(分量 $\sigma_{11}, \sigma_{22}, \sigma_{33}, \sigma_{23}, \sigma_{13}, \sigma_{12}$), $\boldsymbol{\varepsilon}$ 是应变列向量(分量 $\varepsilon_{11}, \varepsilon_{22}, \varepsilon_{33}, 2\varepsilon_{23}, 2\varepsilon_{13}, 2\varepsilon_{12}$, $\varepsilon_{ij} = (u_{i,j} + u_{j,i})/2$, u_i 是对应坐标的位移, $i = 1, 2, 3$), \mathbf{C} 是刚度系数矩阵(分量 $c_{\bar{j}}$, $c_{\bar{j}} = c_{ji}$, $i, j = 1, 2, \dots, 6$)

考虑阻尼力的运动方程为

$$\ddot{u}_i + b_i \dot{u}_i = u_i + c_i u_i, \quad (2)$$

式中 b_i ($i = 1, 2, 3$) 分别为对应坐标方向的体积力, ρ 是材料密度, c_i ($i = 1, 2, 3$) 分别为 3 个坐标方向上的粘滞阻尼系数, \ddot{u}_i 是加速度, \dot{u}_i 是速度

为了方便, 下面在直角坐标系中讨论具体的问题 对本构方程(1)进行变换有

$$\begin{Bmatrix} \mathbf{D}_1 \\ \mathbf{P}_2 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{K}_{11} & \mathbf{K}_{12} \\ \mathbf{K}_{21} & \mathbf{K}_{22} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{P} \\ \mathbf{D}_2 \end{Bmatrix}, \quad (3)$$

式中

$$\mathbf{P} = [\sigma_x \quad \sigma_y \quad \sigma_z]^T, \quad \mathbf{P}_2 = [\sigma_{xx} \quad \sigma_{yy} \quad \sigma_{xy}]^T,$$

$$\mathbf{D}_1 = [w_{,x} + u_{,z} \quad w_{,y} + v_{,z} \quad w_{,z}]^T, \quad \mathbf{D}_2 = [u_{,x} \quad v_{,y} \quad u_{,y} + v_{,x}]^T$$

根据修正后的 Hellinger-Reissner(H_R) 变分原理或 Hamilton 原理^[1,4,8] 有

$$\delta \int_V (\mathbf{P}^T \mathbf{Q}_{,z} - H) dV - \int_S \mathbf{T}^T \mathbf{Q} dS - \int_{S_u} \mathbf{T}^T (\mathbf{Q} - \mathbf{Q}_0) dS, \quad (4)$$

其中

$$\mathbf{Q} = [u \quad v \quad w]^T, \quad \mathbf{T} = [T_x \quad T_y \quad T_z]^T, \quad \mathbf{Q}_0 = [u_0 \quad v_0 \quad w_0]^T,$$

H 是 Hamilton 函数

$$\mathbf{P}^T \mathbf{Q}_{,z} - H = \mathbf{P}^T (\mathbf{D}_1 - \mathbf{K}_{21}^T \mathbf{D}_2) + \frac{1}{2} \mathbf{D}_2^T \mathbf{K}_{22} \mathbf{D}_2 - \frac{1}{2} \mathbf{P}^T \mathbf{K}_{11} \mathbf{P} - \frac{1}{2} \mathbf{Q}^T \mathbf{Q} - \mathbf{Q}^T \mathbf{F}, \quad (5)$$

式中

$$= \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \frac{2}{t^2} + \begin{bmatrix} c_x & 0 & 0 \\ 0 & c_y & 0 \\ 0 & 0 & c_z \end{bmatrix} \frac{1}{t}$$

将应变_位移关系写成向量形式

$$\mathbf{D}_1 = \mathbf{Q}_{,z} + \mathbf{G}_1 \mathbf{Q}, \quad \mathbf{D}_2 = \mathbf{G}_2 \mathbf{Q}, \quad (6)$$

其中

$$\mathbf{G}_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{G}_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \frac{1}{x}, \quad \frac{1}{y}$$

将(6)式代入(4)式, 以 \mathbf{P} 和 \mathbf{Q} 为独立的变量, 对(4)式进行变分, 其状态向量方程为

$$\frac{d}{dz} \begin{Bmatrix} \mathbf{P} \\ \mathbf{Q} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{G}_1^T + \mathbf{G}_2^T \mathbf{K}_{21} & \mathbf{G}_2^T \mathbf{K}_{22} \mathbf{G}_2 - \\ \mathbf{K}_{11} & -(\mathbf{G}_1 + \mathbf{K}_{21}^T \mathbf{G}_2) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{P} \\ \mathbf{Q} \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} \mathbf{F} \\ \mathbf{0} \end{Bmatrix}, \quad (7)$$

式中

$$-(\mathbf{G}_1 + \mathbf{K}_{21}^T \mathbf{G}_2) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & - \\ 0 & 0 & - \\ C_1 & C_5 & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{G}_2^T \mathbf{K}_{22} \mathbf{G}_2 - = \begin{bmatrix} a & b & 0 \\ b & d & 0 \\ 0 & 0 & e \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{K}_{11} = \begin{bmatrix} C_7 & 0 & 0 \\ 0 & C_8 & 0 \\ 0 & 0 & C_9 \end{bmatrix},$$

$$a = -C_2^2 - C_6^2 + \frac{2}{t^2} + c_x \frac{1}{t}, \quad d = -C_4^2 - C_6^2 + \frac{2}{t^2} + c_y \frac{1}{t},$$

$$e = \frac{2}{t^2} + c_z \frac{1}{t}, \quad b = -C_3 - C_6, \quad C_1 = -C_{13}/C_{33}, \quad C_2 = C_{11} - C_{13}^2/C_{33},$$

$$C_3 = C_{12} - C_{13}C_{23}/C_{33}, \quad C_6 = C_{66}, \quad C_4 = C_{22} - C_{23}^2/C_{33}, \quad C_5 = -C_{23}/C_{33},$$

$$C_7 = 1/C_{33}, \quad C_8 = 1/C_{55}, \quad C_9 = 1/C_{44}, \quad \mathbf{F} = [b_x \quad b_y \quad b_z]^T$$

值得注意的是因为分部积分, 算子矩阵 \mathbf{G}_1 和 \mathbf{G}_2 的转置矩阵 \mathbf{G}_1^T 和 \mathbf{G}_2^T 中的偏导符号前带负号

在(3)式中平面内向量 \mathbf{P}_2 可由向量 \mathbf{P} 和 \mathbf{Q} 表示

$$\mathbf{P}_2 = \mathbf{K}_{21}\mathbf{P} + \mathbf{K}_{22}(\mathbf{G}_2\mathbf{Q}) \quad (8)$$

2 状态向量方程的精确解

考虑图 1 所示的四边简支矩形层合板, 侧面边界条件为:

$$\begin{cases} \text{在 } x = 0, a \text{ 处: } & x_x = w = v = 0; \\ \text{在 } y = 0, b \text{ 处: } & y_y = w = v = 0 \end{cases} \quad (9)$$

满足边界条件(9)式的级数解可表示为

$$\begin{cases} (x_z, u) = \sum_m \sum_n (x_z(z), u(z)) \cos(\alpha_m x) \sin(\beta_n y) e^{st}, \\ (y_z, v) = \sum_m \sum_n (y_z(z), v(z)) \sin(\alpha_m x) \cos(\beta_n y) e^{st}, \\ (z, w) = \sum_m \sum_n (z(z), w(z)) \sin(\alpha_m x) \sin(\beta_n y) e^{st}, \end{cases} \quad (10)$$

其中 $\alpha_m = m/a, \beta_n = n/b$

将方程(10)代入(7)式中, 有任意一层的一阶齐次微分方程组(忽略体积力)

$$\frac{d}{dz} \begin{Bmatrix} \mathbf{P}^{mn}(z) \\ \mathbf{Q}^{mn}(z) \end{Bmatrix} = \mathbf{K} \begin{Bmatrix} \mathbf{P}^{mn}(z) \\ \mathbf{Q}^{mn}(z) \end{Bmatrix}, \quad (11)$$

这里的 \mathbf{K} 是以 s 为未知量的等效刚度系数矩阵

方程(11)的精确解为

$$\mathbf{R}(z) = \mathbf{T}(z)\mathbf{R}(0), \quad z \in [0, h], \quad (12)$$

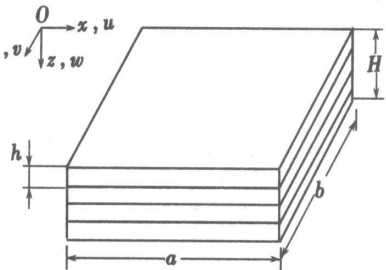


图 1 矩形层合板

式中 $\mathbf{R}(z) = [\mathbf{P}^{mn}(z) \quad \mathbf{Q}^{mn}(z)]^T$, $\mathbf{T}(z) = e^{Kz}$, $\mathbf{R}(0) = [\mathbf{P}^{mn}(0) \quad \mathbf{Q}^{mn}(0)]^T$

本文采用精细积分法^[2]求解 e^{Kz} , 当 $z = h$ 时, 有

$$\mathbf{R}(h) = \mathbf{T}(h)\mathbf{R}(0), \tag{13}$$

其中 $\mathbf{T}(h)$ 称为状态转移矩阵, $\mathbf{R}(0)$ 是初始值向量

对于 n 层的板, 可令(13) 式中的 $h = h_j$ 对应于第 j 层的厚度 根据层间应力和位移的连续性, 使用传递矩阵方法有

$$\begin{Bmatrix} \mathbf{P}^{mn}(z) \\ \mathbf{Q}^{mn}(z) \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} T_{11} & T_{12} \\ T_{21} & T_{22} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{P}^{mn}(0) \\ \mathbf{Q}^{mn}(0) \end{Bmatrix} \tag{14}$$

考虑自由振动问题, 板上下表面的应力向量 $\mathbf{P}(z) = \mathbf{P}(0) = 0$, 从(14) 式可导出特征方程

$$T_{12}\mathbf{Q}(0) = 0 \tag{15}$$

就方程(15) 的非零解而言, 有行列式

$$|T_{12}| = 0 \tag{16}$$

从理论上讲, 方程(16) 是一个高次多项式, 每给定一对 m 和 n 有无穷多个特征根 通过 Muller 法^[9] 可求出式(16) 的解, 其解是复数还是实数, 由阻尼系数 c 的大小决定

3 数值实例和讨论

例 1 四边简支矩形板(如图 1), $a = b = 1$, 厚度为 H 考虑两种情况: $H/a = 0.1$, $H/a = 0.2$, $C_{11} = 21.0 \text{ GPa}$, $\rho = 800 \text{ kg/m}^3$, $c = 0$; 刚度系数比: $C_{12}/C_{11} = 0.233 \ 19$, $C_{13}/C_{11} = 0.010 \ 776$, $C_{22}/C_{11} = 0.543 \ 103$, $C_{23}/C_{11} = 0.098 \ 276$, $C_{33}/C_{11} = 0.530 \ 172$, $C_{44}/C_{11} = 0.262 \ 931$, $C_{55}/C_{11} = 0.159 \ 914$, $C_{66}/C_{11} = 0.266 \ 81$ 分析板的固有频率

表 1 前 3 阶固有频率 $\omega_n (m = n = 1, \text{例 } 1)$ Hz

阶数	n					
	$H/a = 0.1$			$H/a = 0.2$		
	1	2	3	1	2	3
本文	2 435.0	11 120.7	2 023.7	4 346.9	11 117.7	20 232.6
文献[6]	2 432.8	11 114.6	2 021.2	4 343.2	11 114.4	20 230.3

表 2 特征根和前 3 阶固有频率 ω_n 和 $\omega_d (m = n = 1, H/a = 0.2, \text{例 } 2)$ Hz

$c/(N \ s/m)$	阶数					
	1		2		3	
	s_1, s_2	ω_n 或 ω_d	s_1, s_2	ω_n 或 ω_d	s_1, s_2	ω_n 或 ω_d
0	4 332.8i	4 332.8	10 639.3i	10 639.3	19 342.5i	19 342.5
2E+ 5	- 206.2 4 327.9i	4 327.9	- 209.2 10 637.3i	10 637.3	- 212.2 19 341.5i	19 341.5
3E+ 5	- 309.3 4 321.8i	4 321.8	- 313.7 10 634.5i	10 634.5	- 318.3 193 40.3i	19 340.3
4E+ 5	- 412.5 4 313.3i	4 313.3	- 418.2 10 631.3i	10 631.3	- 424.4 193 38.5i	19 338.5

例 2 设 3 层的层合板总厚度为 H , 子层厚度分别为 h_1, h_2, h_3 , 且 $h_1 = h_3 = 0.2H$, $h_2 = 0.6H$ 每层的刚度系数比与例 1 相同 第 1 层和第 3 层相同, 第 2 层与第 1 层的关系为 $C_{11}^{(1)}/C_{11}^{(2)} = 4$, $\rho_1/\rho_2 = 3$, $C_{11}^{(1)}$ 和 $C_{11}^{(2)}$ 分别是第 1 层和第 2 层的 C_{11} 值, ρ_1 和 ρ_2 分别为第 1 层和第 2 层的密度 ($C_{11} = 21.0 \text{ GPa}$, $\rho = 800 \text{ kg/m}^3$) 若考虑阻尼, 设各层板和 3 个方向的阻尼

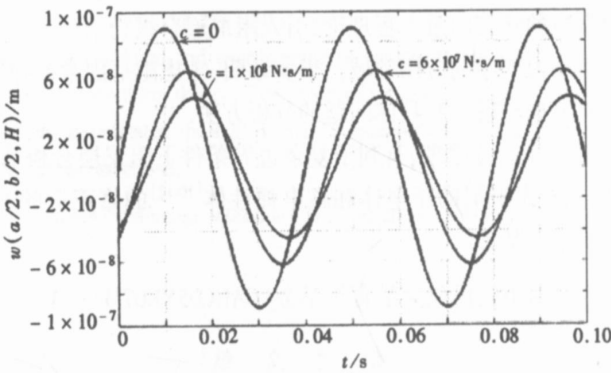
系数相同

表2说明, 阻尼自由振动的固有频率 ω_d 总是小于无阻尼自由振动的固有频率 ω_n , 并随着阻尼系数 c 的增加而减小

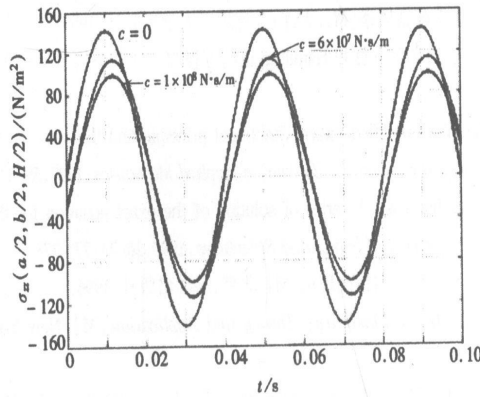
表3 一阶临界阻尼和过阻尼的特征根 ($m = n = 1, H/a = 0.2$, 例2)

$c/(N \cdot s/m)$	s_1	s_2
4.197 340 19E+ 6	- 4 332. 8	- 4 332. 8
5E+ 6	- 2 358. 4	- 7 986. 1
6E+ 6	- 1 769. 0	- 10 662. 2
7E+ 6	- 1 444. 1	- 13 083. 8

表3说明结构在临界阻尼情况下: 特征根 s_1 和 s_2 是相等的负实数, 其绝对值与阻尼系数 $c = 0$ 时的固有频率 ω_n 相等 过阻尼时, 特征根 s_1 和 s_2 是不相等的负实数, 随着阻尼系数 c 的增加, s_1 增加, s_2 减小



(a) 激振函数 $\sin(50 t)$



(b) 激振函数 $\cos(50 t)$

图2 阻尼对结构响应的影响

根据以上的分析和相关的线性振动理论, 下面简要地给出层合板结构欠阻尼、临界阻尼和过阻尼3种自由运动的通解公式:

设 $m = n = 1$, 欠阻尼情况下, 第 j 对特征根 $s_j = -re - \omega_d j i$, 则自由振动的通解为

$$\mathbf{R}(x, y, z, t) = \mathbf{X} e^{-re_j t} \sin(\omega_j t + \varphi_j), \quad (17)$$

式中 $\mathbf{R}(x, y, z, t) = [\mathbf{P}(x, y, z, t) \quad \mathbf{Q}(x, y, z, t)]^T$

临界阻尼情况下, 第 j 对特征根 $s_j = -\omega_j i$, 则指数衰减运动的通解为

$$\mathbf{R}(x, y, z, t) = (\mathbf{X}_1 + \mathbf{X}_2 t) e^{-\omega_j t} \quad (18)$$

过阻尼情况下, 第 j 对特征根 $s_{1j} = -re_{1j}$, $s_{2j} = -re_{2j}$, 则指数衰减运动的通解为

$$\mathbf{R}(x, y, z, t) = \mathbf{X}_1 e^{-re_{1j} t} + \mathbf{X}_2 e^{-re_{2j} t} \quad (19)$$

式(17)到式(19)中列向量 \mathbf{X} 、 \mathbf{X}_1 、 \mathbf{X}_2 由初始条件决定

类似于一般振动理论的方法, 下面在复数域内分析层合板简谐振动问题

例 3 层数、材料和几何参数同例 2, $H/a = 0.2$, 上表面的载荷幅值 $p = 100 \text{ N}$; 初始条件为零

从图 2 可以看出阻尼对结构响应有明显影响; 响应与激振函数不同步

4 结 论

本文将弹性力学中的状态向量方程理论, 引入阻尼层合板壳结构的振动研究, 扩展了状态向量方程处理层合板动力问题的应用领域。事实证明, 考虑阻尼因素的弹性体状态向量方程, 同样有一套完整的阻尼振动理论和具体问题的分析方法

本文的修正后的 H_R 变分原理, 有利于复杂边界条件下阻尼层合板动力学问题半解析法的推导, 是进一步研究考虑阻尼的压电体和磁电弹性体^[10,12]的修正后的 H_R 变分原理、状态向量方程及其半解析法的基础

感谢 本文作者感谢中国民航大学青年基金(CAUC05YK07M)对本工作的资助

[参 考 文 献]

- [1] 钟万勰. 条形域平面弹性问题和哈密尔顿体系[J]. 大连理工大学学报, 1991, 31(4): 373-384.
- [2] 钟万勰. 弹性力学求解新体系[M]. 大连: 大连理工大学出版社, 1995.
- [3] 唐立民. 弹性力学的混合方程和 Hamilton 正则方程[J]. 计算结构力学及其在应用, 1991, 8(4): 343-349.
- [4] Steele C R, Kim Y Y. Modified mixed variational principle and the state_vector equation for elastic bodies and shells of revolution[J]. Journal of Applied Mechanics, 1992, 59(3): 587-595.
- [5] FAN Jia_rang, YE Jian_qiao. A series of solution of the exact equation for thick orthotropic plates [J]. International Journal of Solids and Structures, 1990, 26(7): 773-778.
- [6] 范家让. 强厚度叠层板壳的精确理论[M]. 北京: 科学出版社, 1996.
- [7] Ting T C T. Anisotropic Elasticity: Theory and Application [M]. New York: Oxford University Press, 1996.
- [8] Reissner E. On a variational theorem in elasticity[J]. Journal Mathematics Physics, 1950, 29(1): 90-95.
- [9] Johnston R L. Numerical Methods [M]. New York: John Wiley, 1982.
- [10] 姚伟岸. 电磁弹性固体三维问题的广义变分原理[J]. 计算力学学报, 2003, 20(4): 487-489.
- [11] 丁皓江, 江爱民. 横观各向同性磁电弹性体的基本解和边界积分方程[J]. 中国科学, E 辑, 2003, 33(9): 845-855.
- [12] 卿光辉, 邱家俊, 刘艳红. 磁电弹性体修正后的 H_R 混合变分原理和状态向量方程[J]. 应用数学

和力学, 2005, 26(6): 665_670.

State_Vector Equation With Damping and Vibration Analysis of Laminates

QING Guang_hui¹, XU Jian_xin¹, QIU Jia_jun²

(1. Aeronautical Mechanics and Avionics Engineering College, Civil Aviation
University of China, Tianjin 300300, P. R. China;

(2. Department of Mechanics and Engineering Measurement, School of Mechanical
Engineering, Tianjin University, Tianjin 300072, P. R. China)

Abstract: Based on the modified mixed Hellinger_Reissner(H_R) variational principle for elastic bodies with damping, the state_vector equation was directionally derived from the principle. A new solution for the harmonic vibration of simply supported rectangular laminates with damping was proposed by using the precise integration method and Muller method. The general solutions for the free vibration of underdamping, critical damp and overdamping of composite laminates were given simply in terms of the linear damping vibration theory. The effect of viscous damping force on the vibration of composite laminates was investigated through numerical examples. The state_vector equation theory and its application areas are extended.

Key words: laminated plates; damping; vibration; H_R variational theorem; state_vector equation