文章编号: 1000_0887(2007) 02_0238_07

c 应用数学和力学编委会, ISSN 1000_0887

# 大气运动基本方程组的稳定性分析*

施惟慧[1], 徐 明[2], 王曰朋[3]

(1. 上海大学 数学系, 上海 200072;
2. 中国气象局 上海台风研究所, 上海 200030;
3. 南京信息工程大学 数学系, 南京 210044)

(周哲玮推荐)

摘要: 以分层理论提供的基本方法分析大气运动基本方程组的拓扑学特征; 证明局地直角坐标系中的大气运动基本方程组在无穷可微函数类中是稳定方程; 给出局部解意义下使方程组典型定解问题适定的充要条件; 讨论大气动力学中有关“以过去推测未来”以及当涉及应用问题时如何修改定解条件和下垫面的选择等问题; 指出在通常假设下, 基本方程组中的 3 个运动方程和连续方程完全决定了这个方程组的性质.

关 键 词: 大气运动基本方程组; 稳定性; 分层理论; 横截层
中图分类号: O175.29 文献标识码: A

## 引 言

根据动量、质量、能量守恒以及水汽、气溶胶物质的质量守恒定律, 导出的大气运动基本方程组是大气动力学的基本方程. 在实际应用中使用的各种理论模式, 都是以这个基本方程组为基础, 经尺度分析或线性化等手段简化而来. 因此, 这个方程组的稳定性是应该首先得到确认的. 在对大气运动方程性质的研究中, 顾震潮、曾庆存、丑纪范、穆穆等曾在不同的函数类中对这个方程的若干问题, 进行了深入讨论[1_7]. 受他们工作的启发, 本文将在可微函数类中讨论局地直角坐标系中大气运动基本方程组的稳定性, 在此基础上, 寻找使两类典型定解问题适定的充要条件.

局地直角坐标系中的大气基本方程组原型如下:

$$
\begin{aligned}
&\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial P}{\partial x} + fv - fw + F_1, \quad \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial P}{\partial y} - fu + F_2,\\
&\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}t} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial P}{\partial z} + fu - g + F_3, \quad \frac{\mathrm{d}\rho}{\mathrm{d}t} + \rho\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z}\right) = 0,\\
&\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t} = F_\theta + S_5,\\
&\frac{\mathrm{d}q_l}{\mathrm{d}t} = F_l + S_l, \qquad l = 6, 7, 8,
\end{aligned}
$$

* 收稿日期: 2005_11_01; 修订日期: 2006_12_06
基金项目: 国家自然科学基金资助项目(40175014; 90411006)
作者简介: 施惟慧(1936—), 女, 北京人, 教授, 博导, 法国国家博士(联系人. E_mail: eduwyp@163.com).

$$\frac{\mathrm{d}\chi_r}{\mathrm{d}t} = F_r + S_r, \qquad r = 8+1, \cdots, 8+m.$$

状态方程 $P = \rho RT$, 位温 $\theta$ 与 $T$ 之间由下式联系:

$$\theta = T\left(\frac{P_{00}}{P}\right)^{R/c_p}.$$

方程中的各种符号含义均按大气动力学的约定, 此外 $q_l$ 分别代表固态、液态、汽态水的比湿; $\chi_r$ 代表除水汽以外的各种气溶胶物质; $F_1$、$F_2$、$F_3$、$F_\theta$ 代表分子粘性力与湍流粘性力及耗散之和; $F_l$、$F_r$ 分别代表由于湍流运动引起的湍流粘性耗散等附加项; $S_5$、$S_l$、$S_r$ 代表汇、源项, 它们将按照约定取不同表达式.

设 $(x, y, z, t) = (x_1, x_2, x_3, x_4) \in R^4 = V$,

未知函数

$$(u, v, w, \rho, \theta, q_l, \chi_r) = (u_1, \cdots, u_8, \cdots, u_{8+m}) \in R^3 \times (R_+^*)^{5+m} = Z,$$

将上述方程组简记为 D. (大气运动基本方程组来源请参看文献[4, 8_10]等大气动力学著作).

应用分层理论[11_13]研究偏微分方程组 D 稳定性的过程中所涉及的有关符号、定义、定理证明, 请参看文献[11_13]. 为方便起见, 此处叙述以后要引用的一个定理, 其详细论述请参看文献[11, 13].

设 $V$、$Z$ 是两个 $C^\infty$ 微分流形, $\dim V = n \geqslant 2$, $\dim Z = m$, $\mathrm{D} \subseteq J^{k_0}(V, Z)$ 是一个 $k_0$ 阶偏微分方程组, 出现在方程中的所有参数均假设为其变量的无穷可微函数, 同时还假设已确定了 D 的本方程 $\mathrm{D}_*$[13].

关于偏微分方程组的稳定性判别定理

如果在纤维空间

$$\rho: E_{n-1, k_0-1}(\mathrm{D}) \to W_{n-1, k_0-1}(V, Z)$$

的分层中, D 的 $(n-1, k_0-1)$ 阶横截层不是空集: $S^t_{n-1, k_0-1}(\mathrm{D}) \neq \varnothing$, 则 D 是 $C^\infty$ 稳定方程[11_13]. 事实上, "横截层非空" 是一个偏微分方程组稳定的充要条件.

按照半经验理论公式[8_9], 湍流粘性力 $\boldsymbol{F} = (F_1, F_2, F_3)$,

$$F_1 = \frac{1}{\rho}\left[\frac{\partial}{\partial x_1}\left(\rho k_\mathrm{L}\frac{\partial u_1}{\partial x_1}\right) + \frac{\partial}{\partial x_2}\left(\rho k_\mathrm{L}\frac{\partial u_1}{\partial x_2}\right) + \frac{\partial}{\partial x_3}\left(\rho k_\mathrm{H}\frac{\partial u_1}{\partial x_3}\right)\right],$$

$$F_2 = \frac{1}{\rho}\left[\frac{\partial}{\partial x_1}\left(\rho k_\mathrm{L}\frac{\partial u_2}{\partial x_1}\right) + \frac{\partial}{\partial x_2}\left(\rho k_\mathrm{L}\frac{\partial u_2}{\partial x_2}\right) + \frac{\partial}{\partial x_3}\left(\rho k_\mathrm{H}\frac{\partial u_2}{\partial x_3}\right)\right],$$

$$F_3 = \frac{1}{\rho}\left[\frac{\partial}{\partial x_1}\left(\rho k_\mathrm{L}\frac{\partial u_3}{\partial x_1}\right) + \frac{\partial}{\partial x_2}\left(\rho k_\mathrm{L}\frac{\partial u_3}{\partial x_2}\right) + \frac{\partial}{\partial x_3}\left(\rho k_\mathrm{H}\frac{\partial u_3}{\partial x_3}\right)\right];$$

湍流粘性耗散

$$F_\theta = F_5 = \frac{1}{\rho}\left[\frac{\partial}{\partial x_1}\left(\rho k_{\theta\mathrm{L}}\frac{\partial u_5}{\partial x_1}\right) + \frac{\partial}{\partial x_2}\left(\rho k_{\theta\mathrm{L}}\frac{\partial u_5}{\partial x_2}\right) + \frac{\partial}{\partial x_3}\left(\rho k_{\theta\mathrm{H}}\frac{\partial u_5}{\partial x_3}\right)\right],$$

$$F_l = \frac{1}{\rho}\left[\frac{\partial}{\partial x_1}\left(\rho k_{1,l}\frac{\partial u_l}{\partial x_1}\right) + \frac{\partial}{\partial x_2}\left(\rho k_{1,l}\frac{\partial u_l}{\partial x_2}\right) + \frac{\partial}{\partial x_3}\left(\rho k_{2,l}\frac{\partial u_l}{\partial x_3}\right)\right], \qquad l = 6, 7, 8,$$

$$F_r = \frac{1}{\rho}\left[\frac{\partial}{\partial x_1}\left(\rho k_{1,r}\frac{\partial u_r}{\partial x_1}\right) + \frac{\partial}{\partial x_2}\left(\rho k_{1,r}\frac{\partial u_r}{\partial x_2}\right) + \frac{\partial}{\partial x_3}\left(\rho k_{2,r}\frac{\partial u_r}{\partial x_3}\right)\right],$$

$$r = 8+1, \cdots, 8+m.$$

各粘性系数严格大于零, 且均假设为 $(x, y, z, t) = (x_1, x_2, x_3, x_4)$ 和未知函数的已知并充分光滑的函数(这里还假设两个水平粘性系数以及水平耗散系数是相等的: $k_x = k_y = k_\mathrm{L}$, $k_{\theta x} =$

$k_{\theta y} = \hat{k}_L, k_{x,l} = k_{y,l} = k_{1,l}, k_{x,r} = k_{y,r} = k_{1,r})$. 作为理论分析的需要,此处还假设

$$S_n = g_n(x_j, u_i, \partial u_i) \in C^{\infty},$$
$$j = 1, 2, 3, 4; i = 1, 2, \cdots, 8 + m; n = 5, \cdots, 8 + m.$$

分子粘性力

$$\boldsymbol{F} = \frac{1}{3}\frac{\mu}{\rho}\nabla(\nabla\cdot\boldsymbol{u}) + \frac{\mu}{\rho}\nabla^2\boldsymbol{u},$$

$\mu$ 是动力粘性系数, $\boldsymbol{u} = (u_1, u_2, u_3)$.

在以下的分析和有关定理的叙述、证明中,不可避免的会使用分层理论的一些术语,详细内容请参看文献[11_13].

# 1 D 的 $C^{\infty}$ 稳定性

假设不计分子粘性力. 首先使用 Ehresmann 空间 $J^k(V, Z)$ 的局部坐标改写方程:所论方程 $D \in J^2(V, Z)$. 设 $\beta = (x_j, u_i, p_j^i, p_{jk}^i) \in J^2(V, Z)$, 在不计分子粘性力的假设下,方程 D 可改写为:

$$f_1:\ k_L(p_{11}^1 + p_{22}^1) + k_H p_{33}^1 + \Phi_1 = 0,$$
$$f_2:\ k_L(p_{11}^2 + p_{22}^2) + k_H p_{33}^2 + \Phi_2 = 0,$$
$$f_3:\ k_L(p_{11}^3 + p_{22}^3) + k_H p_{33}^3 + \Phi_3 = 0,$$
$$f_4:\ p_4^4 + u_1 p_1^4 + u_2 p_2^4 + u_3 p_3^4 + u_4(p_1^1 + p_2^2 + p_3^3) = 0,$$
$$f_5:\ \hat{k}_L(p_{11}^5 + p_{22}^5) + \hat{k}_H p_{33}^5 + \Phi_5 = 0,$$
$$f_l:\ k_{1,l}(p_{11}^l + p_{22}^l) + k_{2,l} p_{33}^l + \Phi_l = 0,$$
$$f_r:\ k_{1,r}(p_{11}^r + p_{22}^r) + k_{2,r} p_{33}^r + \Phi_r = 0,$$
$$l = 6, 7, 8;\ r = 8 + 1, \cdots, 8 + m.$$

将上述各式的左侧依次记为 $f_i$,

$$f_i:\ J^2(V, Z) \to R, \qquad i = 1, 2, \cdots, 8 + m,$$

则方程组可表示为

$$D = V(f_1, f_2, \cdots, f_{8+m}),$$

即对应 $f_i$ 的公共零点. 在上述诸假定之下,显然 $f_i \in C^{\infty}$. 式中的 $\Phi_i$ 是原来方程组中微分阶数小于 2 的所有项之和在 $J^2(V, Z)$ 的局部坐标之下的表达式.

预备定理 D 的本方程 $D_*$ 与其准本方程 $D'_*$ 重合

$$D_* = \bigcup_k D_k,\ D'_* = \bigcup_k D'_k,$$
$$D_k = D'_k \subseteq J^k(V, Z), \qquad k = -1, 0, 1, 2, \cdots$$

证明 根据定义[11_13]计算准本方程 $D'_* = \bigcup_k D'_k (k = -1, 0, 1, 2, \cdots)$, 然后可证明本方程与准本方程重合:

$$D_* = D'_* = \bigcup_k D_k,\ D_k = D'_k \subset J^k(V, Z), \qquad k = -1, 0, 1, 2, \cdots.$$

(这里略去了繁复的计算过程).

定理 1 大气运动基本方程组 D 是 $C^{\infty}$ 稳定方程.

证明(简述) 通过对纤维空间

$$\rho:\ E_{3,k-1}(D) \to W_{3,k-1}(V, Z)$$

的分层(也称为 D 的典则分层), 证明横截层非空 $S^t_{3,k-1}(\mathrm{D}) \neq \emptyset (k \geqslant k_0)$ 即可.

所论方程 $\mathrm{D} \subseteq J^2(V, Z)$, 即 $k_0 = 2$. 根据横截层的特性可知[11-13], 只要证明 $S^t_{3,k_0-1}(\mathrm{D}) = S^t_{3,1}(\mathrm{D}) \neq \emptyset$, 对任何 $k \geqslant 3$ 都成立.

现在只须讨论下面代数方程组解的性质:

$$
\begin{cases}
[k_{\mathrm{L}}(\lambda_1^2 + \lambda_2^2) + k_{\mathrm{H}}\lambda_3^2]X_1 = Y_1(\tau), \\
[k_{\mathrm{L}}(\lambda_1^2 + \lambda_2^2) + k_{\mathrm{H}}\lambda_3^2]X_2 = Y_2(\tau), \\
[k_{\mathrm{L}}(\lambda_1^2 + \lambda_2^2) + k_{\mathrm{H}}\lambda_3^2]X_3 = Y_3(\tau), \\
(u_4\lambda_1)X_1 + (u_4\lambda_2)X_2 + (u_4\lambda_3)X_3 - \\
\qquad (1 - u_1\lambda_1 - u_2\lambda_2 - u_3\lambda_3)X_4 = Y_4(\tau), \\
[\hat{k}_{\mathrm{L}}(\lambda_1^2 + \lambda_2^2) + \hat{k}_{\mathrm{H}}\lambda_3^2]X_5 = Y_5(\tau), \\
[k_{1,l}(\lambda_1^2 + \lambda_2^2) + k_{2,l}\lambda_3^2]X_l = Y_l(\tau), \qquad l = 6, 7, 8, \\
[k_{1,r}(\lambda_1^2 + \lambda_2^2) + k_{2,r}\lambda_3^2]X_r = Y_r(\tau), \qquad r = 8 + 1, \cdots, 8m,
\end{cases}
\tag{*}
$$

其中 $Y_i(\tau)(i = 1, 2, \cdots, 8 + m)$ 由原来的方程确定. 记

$$\Lambda = \lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2, \quad \Lambda_u = 1 - u_1\lambda_1 - u_2\lambda_2 - u_3\lambda_3.$$

显然, 上述代数方程组非奇异的充要条件是

$$\Lambda = \lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2 \neq 0, \tag{1}$$

$$\Lambda_u = 1 - u_1\lambda_1 - u_2\lambda_2 - u_3\lambda_3 \neq 0. \tag{2}$$

这就是横截层非空集的一种表达形式. 根据横截层在 $W_{3,k-1}(V, Z)$ 中的稠密性可知[11-13], 对于 $W_{3,k-1}(V, Z)$ 的开覆盖的另外开集, 都有相似的结论, 于是, 大气运动基本方程组是 $C^\infty$ 稳定方程. 定理证毕.

事实上 D 的典则分层结果如下:

$$
\begin{aligned}
W_{3,k-1}(V, Z) &= W_{3,k-1}(\mathrm{D}) \cup T_{3,k-1}(\mathrm{D}) = \\
&\quad S^t_{3,k-1}(\mathrm{D}) \cup S^1_{3,k-1}(\mathrm{D}) \cup S^{7+m}_{3,k-1}(\mathrm{D}) \cup T_{3,k-1}(\mathrm{D}),
\end{aligned}
$$

下面的子纤维空间都是局部平凡的纤维空间:

$$\rho^t: E^t_{3,k-1}(\mathrm{D}) \to S^t_{3,k-1}(\mathrm{D}),$$

$$\rho^1: E^1_{3,k-1}(\mathrm{D}) \to S^1_{3,k-1}(\mathrm{D}),$$

$$\rho^{7+m}: E^{7+m}_{3,k-1}(\mathrm{D}) \to S^{7+m}_{3,k-1}(\mathrm{D}),$$

上标代表纤维的维数. 对于横截层, 就大气运动基本方程组来讲, 其纤维的维数为零, 现在是一个点(对于线性或拟线性偏微分方程组, 如果它的横截层非空, 则分层后的子纤维空间的纤维就只有一个点, 这正好表明了对原方程组解的唯一性要求被满足[11-13]).

## 2 典型初值问题的适定性条件

定理 1 的结论是本节所要讨论问题的基础.

**定理 2** 设 $C^\infty$ 超曲面 $\Sigma_4: \{x_4 = g_4(x_1, x_2, x_3)\} \subset V$. 初值问题

$$
\begin{cases}
\mathrm{D}, \\
u_i|_{\Sigma_4} = u_i^0(Q)
\end{cases}
$$

$(Q \in \Sigma_4,\ g_4 \in C^\infty,\ u_i^0 \in C^\infty,\ i = 1, 2, \cdots, 8 + m)$

适定的充要条件是

$$\left(\frac{\partial g_4}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial g_4}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial g_4}{\partial z}\right)^2\neq 0, \tag{3}$$

$$1-u_1^0\frac{\partial g_4}{\partial x}-u_2^0\frac{\partial g_4}{\partial y}-u_3^0\frac{\partial g_4}{\partial z}\neq 0 \tag{4}$$

(称此初值问题为第 4 初值问题) .

证明(简述) 根据定理 1, 此时的 $\lambda_i$ 分别为

$$\lambda_1=\frac{\partial g_4}{\partial x},\quad \lambda_2=\frac{\partial g_4}{\partial y},\quad \lambda_3=\frac{\partial g_4}{\partial z}.$$

再根据定理 1, 方程组( * ) 非奇异的充要条件就是上述初值问题适定的充要条件. 定理证毕.

推论 1 D 在超平面 $\{t=0\}\subset R^4$ 上的任何初值问题都不适定.

下面考虑动力气象学中常见的边值问题的适定性条件.

定理 3 设 $C^\infty$ 超曲面 $\Sigma_3:\{z=g_3(x,y,t)\}\subset V$. 边值问题

$$\begin{cases}D,\\ u_i\mid_{\Sigma_3}=u_i^0(Q)\end{cases}$$

$(Q\in\Sigma_3,\ g_3\in C^\infty,\ u_i^0\in C^\infty,\ i=1,2,\cdots,8+m)$

适定的充要条件是

$$u_3^0-u_1^0\frac{\partial g_3}{\partial x}-u_2^0\frac{\partial g_3}{\partial y}-\frac{\partial g_3}{\partial t}\neq 0. \tag{5}$$

证明(简述) 使用横截层非空的另一种表达形式, 即使用 $W_{3,k-1}(V,Z)$ 开覆盖的第三开集讨论, 即可得到本定理的结论(详细步骤请参看文献[13]) .

推论 2 D 在超平面 $\{z=0\}\subset R^4$ 上的边值问题

$$\begin{cases}D,\\ u_i\mid_{z=0}=u_i^0(Q)=0\end{cases}$$

不适定.

## 3 几 点 说 明

1) 当同时考虑分子粘性力和湍流粘性力时, 以上的分析和结论不变. 换句话说, 此时的大气运动基本方程组仍为 $C^\infty$ 稳定方程. 而两类典型初值问题的适定性条件的表现形式则略有不同.

2) 如果所有的湍流粘性系数、耗散系数等不但依赖时空坐标、未知函数, 同时还分别依赖某些未知函数的一阶偏导数(按照半经验理论公式[8,9]) , 这时的大气运动基本方程组仍然是 $C^\infty$ 稳定方程, 不过稳定性条件和典型定解问题的适定性条件稍显复杂.

3) 定理 2 和定理 3 所涉及的初、边值问题, 在大气动力学中就是最一般的初值和边值问题. 以定理 2 所述的初值问题为例说明一些问题. 在大气运动状态的研究中, 单纯的初值问题指的是: 在三维超平面 $\pi:\{t=0\}\subset R^4=V$ 上, 给出未知函数的初值 $u_i\mid_{t=0}=u_i^0(x,y,z)(i=1,2,\cdots,8+m)$, 然后找出使这个问题适定的条件. 根据式(3) 、(4) , 可以看到在可微函数类中这种初值问题不适定. 但是这并不代表对此类问题无法可想. 顾震潮、曾庆存、丑纪范先生等曾就大气历史观测资料的使用提出过“以过去推测未来”的理论[1,4], 而定理 2 则对如何实现这种“推测”提供了参考.

4) 定理3给出的式(5),可以作为在考虑大气运动方程单纯的边值问题时,就如何选择下垫面(方程)以使问题适定的参考.

5) 大气运动基本方程组混合问题的适定性条件,则必须考虑类似式(3)、(4)和(5)某种形式的组合条件.

6) 在定理1的证明过程中,曾提到"分层"的概念. 除了横截层以外的其它"层",比如$S^1_{3,k-1}(D)$或$S^{7+m}_{3,k-1}(D)$,其作用有三:第一,它们属于D的完整拓扑构造中的两部分;第二,给出了不适定初值问题所涉及的两种拓扑性质;第三,如果想对不适定问题构造解(即形式解),借助它们就有可能计算出这种解. 但是形式解并没有什么实际用处,只是在必要时用它们说明一些问题. 至于$T_{3,k-1}(D)$,则给出了所涉及定解问题的定解条件必须"回避"的准则,否则就连"形式解"也可能没有了. 正因为如此,才将其称为陷阱!

7) 本文对大气运动基本方程组的分析,采用了它在局地直角坐标系中的表达式. 根据大气动力学,基本方程组的这种局地直角坐标表示,可以用来处理、分析位于中纬度的问题. 因而本文的一些相关结论对于涉及中纬度局部区域的问题是适用的. 在大气动力学中,对于不同尺度的问题采用不同的坐标系[4,8,9],因此不同尺度下的大气运动基本方程组就有不同的形式. 由于这些表现形式不同的基本方程组并非经单纯的坐标变换而来,其间还按照尺度要求进行了简化,因此不能说这些表现形式不同的大气基本方程组是"等价"的. 也就是说,必须对大气运动基本方程组的各种不同表现形式进行独立的稳定性分析. 至于包括两极在内的问题,必须采用基本方程组在球坐标系中的表达式. 但目前尚有若干问题不清楚. 因此,期望通过球坐标系中的大气运动基本方程组,对有关问题进行整体理论分析还得有待时日.

8) 查看使大气运动基本方程组稳定和两类典型初值问题适定的充要条件,可以很清楚地看到,这些条件只涉及大气运动基本方程组中的前4个方程:3个运动方程和连续方程,而与方程组中的其它方程无关. 这个事实提醒我们,无论根据什么方法去简化方程组时,要非常小心地绕过由于简化而改变这4个方程的表现形式而可能出现的麻烦.

## [参 考 文 献]


[1] 顾震潮. 作为初值问题的天气形式预报与由地面天气历史演变做预报的等值性[J]. 气象学报, 1958, **29**(2): 93_98.

[2] 顾震潮. 天气数值预报中过去资料的使用问题[J]. 气象学报, 1958, **29**(3): 176_184.

[3] 丑纪范. 天气预报中使用过去资料的问题[J]. 中国科学, 1974, **17**(6): 814_825.

[4] 曾庆存. 数值天气预报的数学物理基础. 第一卷[M]. 北京: 科学出版社, 1979, 1_44.

[5] 穆穆. 斜压准地转_准无辐散模式初边值问题古典解的存在唯一性[J]. 大气科学, 1986, **10**(2): 114_119.

[6] 穆穆. 广义涡度方程初边值问题的整体光滑解及其应用[J]. 中国科学, A辑, 1986(11): 1153_1163.

[7] 汪守宏, 黄建平, 丑纪范. 大尺度大气运动方程组解的一些性质[J]. 中国科学, B辑, 1989(3): 308_336.

[8] 吕美仲, 侯志明, 周毅. 动力气象学[M]. 北京: 气象出版社, 2004, 1_53.

[9] 刘式适, 刘式达. 大气动力学[M]. 北京: 北京大学出版社, 1999, 1_34.

[10] 张玉玲. 中尺度大气动力学引论[M]. 北京: 气象出版社, 1999, 1_20.

[11] SHIH Wei_hui. Stratifications et Equations aux Derivees Partielles, Singularities of Maps, and Applications to Differential Equations[M]. Paris: Hermann, Collections Travaux en Cours **54**, 1997: 95_124.

[12] SHIH Wei_hui. Solutions Analytiques de Quelques Equations aux Derivees Partielles en Mecanique des Fluids [M]. Paris: Hermann, 1992: 1_65.

[13] 施惟慧, 陈达段, 何幼桦. 分层理论与非线性偏微分方程基础[M]. 上海: 上海大学出版社, 2001, 1_134.

# Stability for the Basic System of Equations of Atmospheric Motion

SHI Wei_hui[1], XU Ming[2], WANG Yue_peng[3]

(1. Department of Mathematics, Shanghai University, Shanghai 200072, P.R.China;
2. Shanghai Typhoon Institute, China Meteorological Administration, Shanghai 200030, P.R. China;
3 Department of Mathematics, Nanjing University of Information Science and Technology, Nanjing 210044, P.R.China)

**Abstract:** The topological characteristics for the basic system of equations of atmospheric motion were analyzed with the help of method provided by stratification theory; It was proved that in the local rectangular coordinate system the basic system of equations of atmospheric motion was stable equations in infinitely differentiable function class; In the sense of local solution, the necessary and sufficient conditions by which the typical problem for determining solution was well posed were also given. Such problems as something about "speculating future from past" in atmospheric dynamics and how to amend the conditions for determining solution as well as the choice of underlying surface when involving the practical application were further discussed; It is also pointed out that under the usual conditions, three motion equations and continuity equation in the basic system of equations determine entirely the property of this system of equations.

**Key words:** basic system of equations of atmospheric motion; stability; stratification theory; transversal stratum