文章编号: 1000_0887(2007) 02_0245_08 c 应用数学和力学编委会, ISSN 1000_0887

联系投影不等式 Petty 猜想的 L_p_形式的不等式*

王 卫东[1,2], 冷岗 松[1]

(1. 上海大学 数学系, 上海 200436;
2. 湖北民族学院 数学系, 湖北 恩施 445000)

(郭兴明推荐)

摘要: 在凸体理论中, 投影不等式的 Petty 猜想是一个著名的公开问题. 首先通过利用 L_p_混合体积和 L_p_对偶混合体积的概念、L_p_投影体和几何体 $\Gamma_{-p}K$ 的关系、Bourgain_Milman 不等式和 L_p_Busemann_Petty 不等式, 建立了一个联系投影不等式 Petty 猜想的 L_p_形式的不等式. 继而对于每一个关于原点对称的凸体, 应用 Jensen 不等式和几何体 $\Gamma_{-p}K$ 的单调性, 分别给出了投影不等式 Petty 猜想的 L_p_形式的一个逆向不等式和 L_p_Petty 投影不等式的一个逆向不等式.

关 键 词: L_p_形式; Petty 投影不等式; 投影不等式的 Petty 猜想; L_p_投影体; 逆向不等式

中图分类号: O184 文献标识码: A

引 言

本文将采用如下记号: 用 $\mathscr{K}^n$ 表示 n 维欧氏空间 R^n 中的凸体(有非空内点的紧凸集) 的集合, $\mathscr{K}^n_o$ 和 $\mathscr{K}^n_s$ 分别表示包含原点为内点的凸体的集合和关于原点对称的凸体的集合, S^{n-1} 表示 R^n 中的单位球面, $V(K)$ 表示 R^n 中几何体 K 的 n 维体积, 对 R^n 中标准单位球 B, 记 $V(B)=\omega_n$.

几何断层学研究的主要内容是几何体的投影和截面, 投影体作为几何断层学理论中一个重要而有趣的研究对象, 最近几十年已成为凸体理论中的热点研究内容. 特别是 Bolker[1] 发现投影体是众多重要领域的研究对象后, 投影体的研究已引起了许多学者的广泛关注(见文献[2_8]或著作[9_10]) .

在仿射等周不等式研究领域里, 一个至今未有解决的问题是关于投影不等式的 Petty 猜想. 1971 年, Petty[6] 提出了如下猜想: 在 n 维欧氏空间 R^n 中, 如果 $K\in\mathscr{K}^n$, 那么是否有不等式

$$V(\Pi K)V(K)^{1-n}\geqslant\omega_{n-1}^{n}\omega_n^{2-n} \tag{1}$$

成立? 其中等号成立, 当且仅当 K 是一个椭球. 这里 ΠK 表示凸体 K 的经典投影体. 关于投

* 收稿日期: 2005_06_27; 修订日期: 2006_11_30
基金项目: 国家自然科学基金资助项目(10671117); 湖北省教育厅重点科研项目(2003A005)
作者简介: 王卫东(1959—), 男, 湖北巴东人, 教授, 博士(联系人. Tel: + 86_718_8960711; Fax: + 86_718_8437732; E_mail: wdwxh722@163.com).

影不等式的Petty 猜想, Brannen[11], Lutwak[12]和 Schneider[13]已分别进行了研究.

2000 年, Lutwak, Yang 和 Zhang(张高勇)[14]给出了 L_p_投影体的概念: 对于 $K\in\mathscr{K}^n$ 和实数 $p\geqslant 1$, K 的L_p_投影体 Π_pK 是一个关于原点对称的凸体, 它的支撑函数定义为: 对任意的 $\boldsymbol{u}\in S^{n-1}$,

$$h_{\Pi_pK}(\boldsymbol{u})=\left[\frac{1}{n\,\omega_n c_{n-2,p}}\int_{S^{n-1}}|\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{v}|^p\,\mathrm{d}S_p(K,\boldsymbol{v})\right]^{1/p},\tag{2}$$

其中 $\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{v}$ 表示单位向量 $\boldsymbol{u}$ 和 $\boldsymbol{v}$ 的标准内积, 且

$$c_{n,p}=\omega_{n+p}/(\omega_2\omega_n\omega_{p-1}).\tag{3}$$

$S_p(K,\cdot)$ 是 S^{n-1} 上的一个正的Borel 测度, 称之为 K 的L_p_表面积测度, $S_1(K,\cdot)$ 即是 K 的经典表面积测度 $S(K,\cdot)$, 且测度 $S_p(K,\cdot)$ 关于 $S(K,\cdot)$ 是绝对连续的并具有Radon_Nikodym 导数:

$$\frac{\mathrm{d}S_p(K,\cdot)}{\mathrm{d}S(K,\cdot)}=h(K,\cdot)^{1-p}.\tag{4}$$

定义式(2) 中标准的选择, 是为了对于 R^n 中的标准单位球B, 我们有 $\Pi_pB=B$. 特别当 $p=1$ 时, Π_1K 即是在定义式(2) 标准化下的经典投影体 ΠK, 并且有 $\Pi B=B$(而不是经典定义下的 $\Pi B=\omega_{n-1}B$[9, 14]).

进一步, Lutwak, Yang 和 Zhang[14]建立了 L_p_Petty 投影不等式如下: 如果$K\in\mathscr{K}_o^n$, 且 $p\geqslant 1$, 则成立不等式

$$V(\Pi_p^*K)\,V(K)^{(n-p)/p}\leqslant\omega_n^{n/p},\tag{5}$$

等号成立, 当且仅当 K 是一个中心在原点的椭球. 这里 Π_p^*K 表示L_p_投影体 Π_pK 的极. 当 $p=1$ 时, 我们采用定义式(2) 的标准, 则不等式(5) 恰好是经典的 Petty 投影不等式[14], 它的逆形式称之为张投影不等式[8]. 关于经典 Petty 投影不等式的推广研究, 可参见文献[14_16].

注记 在定义式(2) 的标准化下, 取 $p=1$, 则投影不等式的 Petty 猜想(1) 可以被改写为: 如果 $K\in\mathscr{K}^n$, 那么是否有不等式

$$V(\Pi K)\,V(K)^{1-n}\geqslant\omega_n^{2-n}$$

成立? 且其中等号成立, 当且仅当 K 是一个椭球.

现在, 一个自然的问题是: 如果 $K\in\mathscr{K}_o^n$, 且 $p\geqslant 1$, 那么仿射不变量

$$f_p(K)=V(\Pi_pK)\,V(K)^{(p-n)/p}$$

的最大下界是多少? 若 $p=1$, Petty 猜想当 K 是一个椭球时,$f_p(K)$ 取得最小值.

在这篇文章里, 我们首先给出了仿射不变量$f_p(K)$ 的一个下界, 即我们证明了一个联系投影不等式 Petty 猜想的 L_p_形式的不等式如下:

定理 1 如果 $K\in\mathscr{K}_o^n$, 且 $p\geqslant 1$, 则存在一个通用常数 $c>0$, 使得

$$f_p(K)=V(\Pi_pK)\,V(K)^{(p-n)/p}\geqslant c^n\omega_n^{(2p-n)/p}.\tag{6}$$

如果 $K\in\mathscr{K}_s^n$, 我们还分别给出了$f_p(K)$ 的一个上界和 L_p_Petty 投影不等式的一个逆如下:

定理 2 如果 $K\in\mathscr{K}_s^n$, 且 $1\leqslant p\leqslant\infty$, 则成立不等式

$$f_p(K)=V(\Pi_pK)\,V(K)^{(p-n)/p}\leqslant(c_{n-2,p})^{-n/p}\omega_n^{(2p-n)/p},\tag{7}$$

等号成立, 当 $1\leqslant p<\infty$时当且仅当 $n=1$ 且K 是一条关于原点对称的线段, 当 $p=\infty$ 时当

且仅当 K 是一个中心在原点的椭球.

定理 3 如果 $K\in\mathscr{K}_s^n$, 且 $1\leqslant p\leqslant\infty$, 则成立不等式

$$V(\Pi_p^*K)V(K)^{(n-p)/p}\geqslant(c_{n-2,p})^{n/p}\omega_n^{n/p},\tag{8}$$

等号成立, 当 $1\leqslant p<\infty$ 时当且仅当 $n=1$ 且 K 是一条关于原点对称的线段或者当且仅当 $p=\infty$.

1 几个基本概念

1.1 支撑函数, 径向函数和极体

如果 $K\in\mathscr{K}^n$, 则它的支撑函数 $h_K=h(K,\cdot):R^n\to(0,\infty)$ 定义为[9_10]: $h(K,\boldsymbol{x})=\max\left\{\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{y}:\boldsymbol{y}\in K\right\}$, $\boldsymbol{x}\in R^n$, 这里 $\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{y}$ 表示 $\boldsymbol{x}$ 和 $\boldsymbol{y}$ 的标准内积.

如果 K 是 R^n 中一个紧的星形(关于原点), 则它的径向函数 $\rho_K=\rho(K,\cdot):R^n\setminus\left\{0\right\}\to[0,+\infty)$ 定义为[9_10]: $\rho(K,\boldsymbol{x})=\max\left\{\lambda\geqslant0:\lambda\boldsymbol{x}\in K\right\}$, $\boldsymbol{x}\in R^n\setminus\left\{0\right\}$. 当 ρ_K 是正的连续函数时, 称 K 是一个星体(关于原点). 我们记 $\mathscr{S}^n$ 为 R^n 中星体(关于原点)的集合. 如果 $K,L\in\mathscr{S}_o^n$ 且 $\rho_K(\boldsymbol{u})/\rho_L(\boldsymbol{u})$ 与 $\boldsymbol{u}\in S^{n-1}$ 无关, 则称 K 和 L 中一个是另一个的膨胀.

对于 $K\in\mathscr{K}_o^n$, K 的极体 K^* 定义为[9, 10]:

$$K^*=\left\{\boldsymbol{x}\in R^n:\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{y}\leqslant1,\ \boldsymbol{y}\in K\right\}.\tag{9}$$

显然, 我们有 $(K^*)^*=K$. 由定义式(9)我们还知道: 如果 $K\in\mathscr{K}_o^n$, 则有

$$h_{K^*}=\frac{1}{\rho_K},\quad \rho_{K^*}=\frac{1}{h_K}.\tag{10}$$

如果 $K,L\in\mathscr{K}_o^n$ 且 $\lambda>0$ 时, 我们有:

$$K\subseteq\lambda L\Leftrightarrow K^*\supseteq\frac{1}{\lambda}L^*.\tag{11}$$

1.2 L_p_混合体积和 L_p_对偶混合体积

对于 $K,L\in\mathscr{K}_o^n$ 和实数 $p\geqslant1$, K 和 L 的 L_p_混合体积 $V_p(K,L)$ 给出为[17]:

$$V_p(K,L)=\frac{1}{n}\int_{S^{n-1}}h_L^p(\boldsymbol{v})\,\mathrm{d}S_p(K,\boldsymbol{v}).\tag{12}$$

关于 L_p_混合体积的 Minkowski 不等式, 称之为 L_p_Minkowski 不等式. 它可叙述为[18]: 如果 $K,L\in\mathscr{K}_o^n$ 且 $p\geqslant1$, 则有

$$V_p(K,L)\geqslant V(K)^{(n-p)/n}V(L)^{p/n},\tag{13}$$

等号成立, 当 $p=1$ 时当且仅当 K 和 L 是位似的, $p>1$ 时当且仅当 K 和 L 中一个是另一个的膨胀.

对于 $K,L\in\mathscr{S}_o^n$ 和实数 $p\geqslant1$, Lutwak[18] 给出了 K 和 L 的 L_p_对偶混合体积 $V_{-p}(K,L)$ 为:

$$V_{-p}(K,L)=\frac{1}{n}\int_{S^{n-1}}\rho_K^{n+p}(\boldsymbol{v})\rho_L^{-p}(\boldsymbol{v})\,\mathrm{d}S(\boldsymbol{v}),\tag{14}$$

这里 S 是 S^{n-1} 上的球面 Lebesgue 测度. 由公式(14), 我们直接得到: 对于每一个 $K\in\mathscr{S}_o^n$, $p\geqslant1$, 则有

$$V_{-p}(K,K)=V(K).\tag{15}$$

1.3 L_p_质心体和几何体 $\Gamma_{-p}K$

对于 R^n 中的星形(关于原点) K 和实数 $p\geqslant1$, K 的 L_p_质心体 Γ_pK 是关于原点对称的凸体, 它的支撑函数定义为[19]: 对任意的 $\boldsymbol{u}\in S^{n-1}$,

$$h^p_{\Gamma_p K}(\boldsymbol{u}) = \frac{1}{c_{n,p}V(K)}\int_K |\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{x}|^p \mathrm{d}x. \tag{16}$$

由定义式(16)，我们容易得到：对任意的 $\boldsymbol{u}\in S^{n-1}$，

$$h^p_{\Gamma_p K}(\boldsymbol{u}) = \frac{1}{(n+p)c_{n,p}V(K)}\int_{S^{n-1}} |\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{v}|^p \rho_K^{n+p}(\boldsymbol{v})\mathrm{d}S(\boldsymbol{v}). \tag{17}$$

几何体 $\Gamma_{-p}K$ 的概念最近由 Lutwak, Yang 和 Zhang 提出[20]．如果 $K\in\mathscr{K}^n_o$，$p>0$，则几何体 $\Gamma_{-p}K$ 是一个关于原点对称的体，它的径向函数定义为：对任意的 $\boldsymbol{u}\in S^{n-1}$，

$$\rho^{-p}_{\Gamma_{-p}K}(\boldsymbol{u}) = \frac{1}{V(K)}\int_{S^{n-1}} |\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{v}|^p \mathrm{d}S_p(K,\boldsymbol{v}). \tag{18}$$

特别当 $p\geqslant 1$ 时，$\Gamma_{-p}K$ 是一个关于原点对称的凸体[20]．对于 $p=\infty$，定义 $\Gamma_{-\infty}K$ 为[20]

$$\Gamma_{-\infty}K = \lim_{p\to\infty}\Gamma_{-p}K. \tag{19}$$

由此，如果 $K\in\mathscr{K}^n_s$，则有

$$\Gamma_{-\infty}K = K. \tag{20}$$

2　定理 1 的证明

为证明定理 1，我们需要若干引理．首先，我们直接给出著名的 Bourgain_Milman 不等式[21]和 L_p_Busemann_Petty 不等式[14]如下：

引理 1[21]　如果 $K\in\mathscr{K}^n_s$，则存在一个通用常数 $c>0$，使得

$$V(K)V(K^*) \geqslant c^n\omega_n^2. \tag{21}$$

引理 2[14]　如果 $K\in\mathscr{S}^n$，$p\geqslant 1$，则成立不等式

$$V(\Gamma_p K) \geqslant V(K), \tag{22}$$

等号成立，当且仅当 K 是一个中心在原点的椭球．

引理 3　如果 $K\in\mathscr{K}^n_o$，$p\geqslant 1$，则存在一个通用常数 $c>0$，使得

$$V(\Gamma_p\Gamma_{-p}K)V(\Gamma^*_{-p}K) \geqslant c^n\omega_n^2. \tag{23}$$

这里 $\Gamma^*_{-p}K$（不写为 $(\Gamma_{-p}K)^*$）表示几何体 $\Gamma_{-p}K$ 的极．

证明　因为 $p\geqslant 1$ 时，$\Gamma_{-p}K$ 是一个关于原点对称的凸体，于是，利用不等式(21)知，存在一个通用常数 $c>0$，使得

$$V(\Gamma_{-p}K)V(\Gamma^*_{-p}K) \geqslant c^n\omega_n^2.$$

因此，结合不等式(22)，我们有

$$V(\Gamma_p\Gamma_{-p}K)V(\Gamma^*_{-p}K) \geqslant V(\Gamma_{-p}K)V(\Gamma^*_{-p}K) \geqslant c^n\omega_n^2.$$

证毕．

引理 4　如果 $K\in\mathscr{K}^n_o$，$L\in\mathscr{S}^n$ 且 $p\geqslant 1$，则有

$$V_p(K,\Gamma_p L) = \frac{V(K)}{nc_{n-2,p}V(L)}V_{-p}(L,\Gamma_{-p}K). \tag{24}$$

证明　依次利用式(12)、(17)、(18)和(14)，我们有

$$V_p(K,\Gamma_p L) = \frac{1}{n}\int_{S^{n-1}} h^p_{\Gamma_p L}(\boldsymbol{u})\mathrm{d}S_p(K,\boldsymbol{u}) =$$

$$\frac{1}{n(n+p)c_{n,p}V(L)}\int_{S^{n-1}}\int_{S^{n-1}} |\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{v}|^p\rho_K^{n+p}(\boldsymbol{v})\mathrm{d}S(\boldsymbol{v})\mathrm{d}S_p(K,\boldsymbol{u}) =$$

$$\frac{V(K)}{n(n+p)c_{n,p}V(L)}\int_{S^{n-1}} \rho_K^{n+p}(\boldsymbol{v})\rho^{-p}_{\Gamma_{-p}K}(\boldsymbol{v})\mathrm{d}S(\boldsymbol{v}) =$$

$$\frac{V(K)}{(n+p)c_{n,p}V(L)}V_{-p}(L,\Gamma_{-p}K),$$

而从等式(3)容易得出 $(n+p)c_{n,p}=nc_{n-2,p}$，由此我们得到了式(24)．证毕.

引理 5　如果 $K\in\mathscr{K}_o^n$, $p\geqslant 1$, 则成立不等式

$$V(K)\geqslant(nc_{n-2,p})^{n/p}V(\Gamma_p\Gamma_{-p}K),\tag{25}$$

等号成立, 当 $p=1$ 时当且仅当 K 和 $\Gamma_p\Gamma_{-p}K$ 是位似的, 当 $p>1$ 时当且仅当 K 和 $\Gamma_p\Gamma_{-p}K$ 中一个是另一个的膨胀.

证明　在等式(24)中取 $L=\Gamma_{-p}K$, 并利用式(15)和(13), 我们有

$$V(K)=nc_{n-2,p}V_p(K,\Gamma_p\Gamma_{-p}K)\geqslant nc_{n-2,p}V(K)^{(n-p)/n}V(\Gamma_p\Gamma_{-p}K)^{p/n},$$

由此, 我们得到不等式(25)．根据不等式(13)取等号的条件, 我们知道: 在不等式(25)中等号成立, 当 $p=1$ 时当且仅当 K 和 $\Gamma_p\Gamma_{-p}K$ 是位似的, 当 $p>1$ 时当且仅当 K 和 $\Gamma_p\Gamma_{-p}K$ 中一个是另一个的膨胀．证毕.

结合不等式(23)和(25), 我们可以直接给出:

引理 6　如果 $K\in\mathscr{K}_o^n$, $p\geqslant 1$, 则存在一个通用常数 $c>0$, 使得

$$V(K)V(\Gamma_{-p}^*K)\geqslant c^n(nc_{n-2,p})^{n/p}\omega_n^2.\tag{26}$$

引理 7　如果 $K\in\mathscr{K}_o^n$, $p\geqslant 1$, 则有

$$\Gamma_{-p}^*K=(nc_{n-2,p}\,\omega_n/V(K))^{1/p}\Pi_pK.\tag{27}$$

证明　根据定义式(2)、(10)和定义式(18), 对于所有的 $\boldsymbol{u}\in S^{n-1}$, 我们有

$$\rho_{\Gamma_{-p}K}^p(\boldsymbol{u})=(nc_{n-2,p}\,\omega_n/V(K))\rho_{\Pi_p^*K}^p(\boldsymbol{u}).$$

因此

$$\Gamma_{-p}K=(V(K)/(nc_{n-2,p}\,\omega_n))^{1/p}\Pi_p^*K.\tag{28}$$

再结合式(11)和(28), 我们容易得到式(27)．证毕.

定理 1 的证明　利用式(27), 我们有

$$V(\Gamma_{-p}^*K)=(nc_{n-2,p}\,\omega_n/V(K))^{n/p}V(\Pi_pK),$$

再结合不等式(26), 则有

$$(nc_{n-2,p}\,\omega_n/V(K))^{n/p}V(K)V(\Pi_pK)\geqslant c^n(nc_{n-2,p})^{n/p}\omega_n^2,$$

由此整理即得不等式(6)．定理 1 证毕.

3　定理 2 和定理 3 的证明

引理 8　如果 $K\in\mathscr{K}_o^n$, $0<p\leqslant q\leqslant\infty$, 则有

$$n^{1/q}\Gamma_{-q}K\subseteq n^{1/p}\Gamma_{-p}K,\tag{29}$$

等号成立, 当 $p\neq q$ 时当且仅当 $n=1$ 且 K 是一个关于原点对称的线段或者当且仅当 $p=q$.

证明　根据定义式(18)和公式(4), 并结合 Jensen 不等式[22], 则对 $0<p\leqslant q<\infty$ 有

$$\rho_{\Gamma_{-p}K}^{-1}(\boldsymbol{u})=\left(\frac{1}{V(K)}\int_{S^{n-1}}|\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{v}|^p\,\mathrm{d}S_p(K,\boldsymbol{v})\right)^{1/p}=$$

$$n^{1/p}\left(\frac{1}{nV(K)}\int_{S^{n-1}}\left(\frac{|\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{v}|}{h_K(\boldsymbol{v})}\right)^p h_K(\boldsymbol{v})\,\mathrm{d}S(K,\boldsymbol{v})\right)^{1/p}\leqslant$$

$$n^{1/p}\left(\frac{1}{nV(K)}\int_{S^{n-1}}\left(\frac{|\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{v}|}{h_K(\boldsymbol{v})}\right)^q h_K(\boldsymbol{v})\,\mathrm{d}S(K,\boldsymbol{v})\right)^{1/q}=$$

$$n^{1/p-1/q}\left(\frac{1}{V(K)}\int_{S^{n-1}}|\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{v}|^{p}\,\mathrm{d}S_q(K,\boldsymbol{v})\right)^{1/q}=n^{1/p-1/q}\rho^{-1}_{\Gamma_{-q}K}(\boldsymbol{u}),$$

对所有的 $\boldsymbol{u}\in S^{n-1}$ 成立. 由此, 我们得到: 对所有的 $\boldsymbol{u}\in S^{n-1}$,

$$n^{1/q}\rho_{\Gamma_{-q}K}(\boldsymbol{u})\leqslant n^{1/p}\rho_{\Gamma_{-p}K}(\boldsymbol{u}).$$

因而, 我们有式(29). 对于式(29)中 $q=\infty$ 的情形, 可在式(29)中令 $q\to\infty$, 并结合定义式(19)得出.

根据 Jensen 不等式取等号的条件, 我们知道: 在式(29)中等号成立, 当 $p\neq q$ 时当且仅当对于给定的 $\boldsymbol{u}\in S^{n-1}$ 和任意的 $\boldsymbol{v}\in S^{n-1}$, $|\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{v}|/h_K(\boldsymbol{v})$ 是一个常数, 或者当且仅当 $p=q$, 即当 $p\neq q$ 时当且仅当 $n=1$ 且 K 是一条关于原点对称的线段, 或者当且仅当 $p=q$. 证毕.

由引理8, 若 $K\in\mathscr{K}^n_s$, 我们结合式(19)和(20)可直接得到:

引理 9 如果 $K\in\mathscr{K}^n_s$, $0<p\leqslant\infty$, 则有

$$K\subseteq n^{1/p}\Gamma_{-p}K,\tag{30}$$

等号成立, 当 $0<p<\infty$ 时当且仅当 $n=1$ 且 K 是一条关于原点对称的线段, 或者当且仅当 $p=\infty$.

定理 2 的证明还需要如下著名的 Blaschke_Santalы 不等式:

引理 10[9,10] 如果 $K\in\mathscr{K}^n_s$, 则

$$V(K)V(K^*)\leqslant\omega_n^2,\tag{31}$$

等号成立, 当且仅当 K 是一个椭球.

定理 2 的证明 结合式(11)和(30), 则对 $K\in\mathscr{K}^n_s$, $1\leqslant p\leqslant\infty$ 有

$$K^*\supseteq n^{-1/p}\Gamma^*_{-p}K,$$

所以

$$V(\Gamma^*_{-p}K)\leqslant n^{n/p}V(K^*).$$

由此, 利用不等式(31), 我们有

$$V(K)V(\Gamma^*_{-p}K)\leqslant n^{n/p}V(K)V(K^*)\leqslant n^{n/p}\omega_n^2.\tag{32}$$

而根据式(27), 我们又有

$$V(\Gamma^*_{-p}K)=(nc_{n-2,p}\,\omega_n/V(K))^{n/p}V(\Pi_pK),$$

将上式与式(32)结合, 整理即得不等式(7). 根据式(30)和(31)中取等号的条件, 我们得知: 不等式(7)中等号成立, 当 $1\leqslant p<\infty$ 时当且仅当 $n=1$ 且 K 是一条关于原点对称的线段, 当 $p=\infty$ 时 K 是一个中心在原点的椭球. 定理 2 证毕.

定理 3 的证明 利用式(30)和(28), 我们分别有

$$V(K)\leqslant n^{n/p}V(\Gamma_{-p}K),$$

$$V(\Gamma_{-p}K)=(V(K)/(nc_{n-2,p}\,\omega_n))^{n/p}V(\Pi^*_pK),$$

由此我们得到

$$V(K)\leqslant n^{n/p}(V(K)/(nc_{n-2,p}\,\omega_n))^{n/p}V(\Pi^*_pK),$$

整理上式即得不等式(8). 结合式(30)中等号成立的条件, 我们易知: 不等式(8)中等号成立, 当 $1\leqslant p<\infty$ 时当且仅当 $n=1$ 且 K 是一条关于原点对称的线段, 或者当且仅当 $p=\infty$. 定理 3 得证.

[参 考 文 献]

[1] Bolker E D. A class of convex bodies[J]. Trans Amer Math Soc, 1969, **145**(1): 323_345.

[2] Bourgain J, Lindenstrauss J. Projection Bodies [M]. Geometric Aspects of Functional Analysis, Lecture Notes in Math, **1317**. Heidelbery: Springer, 1988, 250_270.

[3] Chakerian G D, Lutwak E. Bodies with similar projections[J]. Tans Amer Math Soc, 1997, **349**(5): 1811_1820.

[4] Goodey P R, Weil W. Zonoids and Generalizations [M]. Handbook of Convex Geometry. Amsterdam: North_Holland, 1993, 1297_1326.

[5] Ludwig M. Projection bodies and valuations[J]. Adv Math, 2002, **172**(2): 158_168.

[6] Petty C M. Isoperimetric problems[A]. In: Proc Conf Convexty and Combinatorial Geometry [C]. (Univ Oklahoma, 1971). Norman, OK: University of Oklahoma Press, 1972, 26_41.

[7] Schneider R, Weil W. Zonoids and Related Topics [M]. Convexity and Its Applications. Birkh¼user: Basel, 1983, 296_317.

[8] Zhang G Y. Restricted chord projection and affine inequalities[J]. Geom Dedicata, 1991, **39**(2): 213_222.

[9] Gardner R J. Geometric Tomography [M]. Cambridge: Cambridge University Press, 1995.

[10] Schneider R. Convex Bodies: The Brunn_Minkowski Theory [M]. Cambridge: Cambridge University Press, 1993.

[11] Brannen N S. Volumes of projection bodies[J]. Mathematika, 1996, **43**(2): 255_264.

[12] Lutwak E. On a conjectured projection inequality of Petty[J]. Contemp Math, 1990, **113**(1): 171_181.

[13] Schneider R. Geometric inequalities for Poisson processes of convex bodies and cylinders[J]. Result–sate Math, 1987, **11**(1): 165_185.

[14] Lutwak E, Yang D, Zhang G Y. L_p affine isoperimetric inequalities[J]. J Differential Geom, 2000, **56**(1): 111_132.

[15] Lutwak E. Selected Affine Isoperimetric Inequalities [M]. Handbook of Convex Geometry. Amsterdam: North_Holand, 1993, 151_176.

[16] Lutwak E. Inequalities for mixed projection bodies[J]. Amer Math Soc, 1993, **339**(2): 901_916.

[17] Lutwak E. The Brunn_Minkowski_Firey theory Ⅰ: mixed volumes and the Minkowski problem[J]. J Differential Geom, 1993, **38**(1): 131_150.

[18] Lutwak E. The Brunn_Minkowski_Firey theory Ⅱ: affine and geominimal surface areas[J]. Adv Math, 1996, **118**(2): 244_294.

[19] Lutwak E, Zhang G Y. Blaschke_SantalÏ inequalities[J]. J Differential Geom, 1997, **47**(1): 1_16.

[20] Lutwak E, Yang D, Zhang G Y. L_p John ellipsoids[J]. Proc London Math Soc, 2005, **90**(2): 497_520.

[21] Bourgain J, Milman V D. New volume ratio properties for convex symmetric bodies in R^n [J]. Invent Math, 1987, **88**(2): 319_340.

[22] Hardy G H, Littlewood J E, PÏlya G. Inequalities [M]. Cambridge: Cambridge University Press, 1959.

Inequalities Relating to L_p_Version of the Petty's Conjectured Projection Inequality

WANG Wei_dong[1,2], LENG Gang_song[1]

(1. Department of Mathematics, Shanghai University, Shanghai 200436, P. R. China;
2. Department of Mathematics, Hubei Institute for Nationalities,
Enshi, Hubei 445000, P. R. China)

Abstract: Petty's conjectured projection inequality is a famous open problem in convex bodies theory. It was shown that an inequality relating to L_p_version of the Petty's conjectured projection inequality by using the notions of the L_p_mixed volume and the L_p_dual mixed volume, the relation of the L_p_projection body and the geometric body $\Gamma_{-p}K$, the Bourgain_Milman inequality and the L_p_Busemann_Petty inequality. In addition, for each origin_symmetric convex body, applying the Jensen inequality and the monotonicity of the geometric body $\Gamma_{-p}K$, the reverses of L_p_version of the Petty's conjectured projection inequality and the L_p_Petty projection inequality were given respectively.

Key words: L_p_version; Petty projection inequality; Petty's conjectured projection inequality; L_p_projection body; reverse