

# 基流风速包含垂直变化时的三维无旋 Non-Boussinesq 流的地形重力波拖曳解\*

唐锦, 汤杰, 王元

(南京大学 中尺度灾害性天气教育部重点实验室、大气科学系, 南京 210093)

(鲁传敬推荐)

摘要: 用 WKB 近似方法建立了表达三维地形重力波拖曳的解析 Non-Boussinesq 扰动模型, 其中在大 Richardson 数条件下给出了(静力和非静力模型的)重力波拖曳及其地表扰动气压的二阶表达式. 通过针对经典的理想化三维圆钟型山体的一个算例证明, 当基流风速切变为线性时, 重力波拖曳随着切变的增强而减弱; 并且前向垂直切变(forward-shear, 风速随高度增加)所对应的重力波拖曳比反向切变(backward-shear, 风速随高度减小)所对应的重力波拖曳减弱得更快. 这种现象与模型是否采用静力近似无关.

关键词: 重力波拖曳; Taylor-Goldstein 方程; 风切变; WKB 近似; 圆钟型山体  
中图分类号: O175.8; O351.2 文献标识码: A

## 引 言

通常认为地形触发的重力波拖曳与基本气流的风速垂直结构具有非常密切的关系<sup>[1]</sup>. 最近, Teixeira 等人<sup>[2]</sup>研究了 Boussinesq 层结流体跨越三维地形时触发的重力波拖曳, 结果明确地肯定了这一点. 本文则利用三维 Non-Boussinesq 扰动模型重新研究了重力波拖曳在基流包含垂直风速切变和曲率变化下的解析形态, 并据此解释了一些在数值模拟中被发现而 Boussinesq 模型却无法解释的现象<sup>[2]</sup>.

在第 1 节, 利用 WKB 近似方法<sup>[2]</sup>求得了变系数 Taylor-Goldstein 方程(即文中的垂直扰动速度方程)的二阶近似解. 第 2 节则给出了考虑基流风速垂直变化后的地形重力波拖曳和地表扰动气压(根据牛顿第 3 运动定律可知, 地形重力波拖曳应和上游与下游地表处的气体压力的差相平衡<sup>[1]</sup>)的解析公式, 并进一步得到了静力近似下的结果. 第 3 节则通过一个理想算例证明, 当扰动气流为 Non-Boussinesq 流, 并且基流水平风速具有垂直线性切变时, 重力波拖曳不仅表现为切变强度<sup>[2]</sup>的函数, 同时也是切变方向的函数; 与此相反, 即使是非静力的 Boussinesq 模型, 仍无法揭示出重力波拖曳对于风速切变方向的依赖性.

\* 收稿日期: 2005-10-18; 修订日期: 2006-10-31

基金项目: 国家(重点)基础研究发展规划资助项目(973: 2004CB418301); 国家自然科学基金资助项目(40575017, 40333031)

作者简介: 唐锦 (1981—), 男, 江苏人, 博士;

王元(1959—), 男, 江苏人, 教授, 博士生导师(联系人, E-mail: yuanasm@netra.nju.edu.cn).

## 1 WKB 近似模型

不失一般性,假定三维 Non-Boussinesq 流满足定常、无旋、绝热、无粘条件<sup>[3-6]</sup>并设基流速度场  $\mathbf{U} = (U(z), V(z))$  和密度场  $\rho(z)$  在垂直方向上缓慢变化,而无纲高度  $h \equiv Nh_0 / \| \mathbf{U}(z=0) \| \ll 1$  (其中  $h_0$  为山体最大高度,  $N$  为浮力频率(假定为常数),  $\| \cdot \|$  则表示对矢量取模)。

在对小扰动方程组进行一系列处理之后(详见附录 A),得到 Non-Boussinesq 流的 Taylor-Goldstein 方程如下

$$\hat{w}_{zz} + \left[ \frac{N^2}{U_n^2} - 2 \frac{\Gamma_1 U_{nz}}{U_n} - \frac{U_{nzz}}{U_n} - \delta_1 K^2 - \Gamma_1^2 \right] \hat{w} = 0, \quad (1)$$

其中下标  $z$  表示  $\partial(\ ) / \partial z$ ,  $\Gamma_1$  为层结参数;  $U_n = U \cos \sigma + V \sin \sigma$  为基流风速沿水平波数矢量  $\mathbf{K} = (k, l) = K(\cos \sigma, \sin \sigma)$  方向的分量. 参数  $\delta_1 = 0$  时,表示模型采用静力近似,而  $\delta_1 = 1$  时则不采用静力近似。

因前面已假定  $\mathbf{U}$  垂直缓变,故  $U_n$  也垂直缓变,所以方程(1)可以用 WKB 近似方法求解之. 于是,引入小参数  $\epsilon$  及变换  $Z = \epsilon z$ , 改写方程(1),得到

$$\epsilon^2 \hat{w}'' + \left[ \frac{N^2}{U_n^2} - 2 \Gamma_1 \frac{U_{nz}}{U_n} \epsilon - \frac{U_{nzz}}{U_n} \epsilon^2 - \delta_1 K^2 - \Gamma_1^2 \right] \hat{w} = 0, \quad (2)$$

式中点号(')表示  $\partial(\ ) / \partial Z$ .

设方程(2)满足上边界条件为辐射条件<sup>[5]</sup>(即  $\text{Re}(m)$  与  $U_n$  同号)的波动形式解为

$$\hat{w}(Z) = \hat{w}(Z=0) \exp \left[ i \cdot \epsilon \int_0^Z m(\xi) d\xi \right], \quad (3)$$

式中  $m(\xi) = \sum_{j=0}^{\infty} \epsilon^j m_j(\xi)$  为垂直波数函数,  $i$  为虚数单位;接着,给定下边界条件<sup>[2]</sup>

$$\hat{w}(Z=0) = \hat{w}(z=0) = iK U_{n0} \eta(k, l), \quad (4)$$

其中  $U_{n0}$  表示  $U_n$  在  $z=0$  (即  $Z=0$ ) 的值,  $\eta(k, l)$  为地形函数  $\eta(x, y)$  的傅立叶变换,则(2)式、(3)式、(4)式即构成完备的二阶常微分方程边值问题。

将(3)式代入到(2)式,并按阶数整理结果到二阶  $O(\epsilon^2)$ , 有

$$m_0 = \frac{N}{U_n} L^{1/2}, \quad (5)$$

$$\epsilon m_1 = \frac{N}{U_n} \left[ - \frac{\Gamma_1 U_n \cdot U_{nz}}{N} \cdot L^{-1/2} - \frac{i}{2} \frac{U_{nz}}{N} L^{-1} \right], \quad (6)$$

$$\begin{aligned} \epsilon^2 m_2 = \frac{N}{U_n} \left\{ \left[ - \frac{U_n U_{nzz}}{2N^2} \cdot L^{-1/2} + \frac{1}{4} \left[ \frac{U_n U_{nzz}}{N^2} - \frac{U_{nz}^2}{N^2} \right] \cdot L^{-3/2} + \right. \right. \\ \left. \frac{U_{nz}^2}{2N^2} \cdot \left[ \frac{5}{4} - L \right] L^{-5/2} - \frac{1}{2} \left[ \frac{\Gamma_1 U_n}{N} \right]^2 \cdot \left[ \frac{U_{nz}}{N} \right]^2 \cdot L^{-3/2} \right] - \\ \left. i \left[ \frac{\Gamma_1 U_n \cdot U_n U_{nzz}}{2N} \cdot L^{-1} + \frac{\Gamma_1 U_n \cdot U_{nz}}{2N} \cdot \left[ \frac{U_{nz}}{N} \right]^2 \cdot (2-L) L^{-2} \right] \right\}, \quad (7) \end{aligned}$$

式中  $L = 1 - (\Gamma_1 U_n / N)^2 - \delta_1 (K U_n / N)^2$ .

从(5)式至(7)式,我们发现  $\epsilon \sim |U_{nz} / N| \sim Ri^{-1/2}$ . 因此,本文的 WKB 近似方法的准确性要求 Richardson 数  $Ri$  足够大。

## 2 地形重力波拖曳

计算地形重力波拖曳的公式<sup>[7]</sup>为

$$F_d = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} p'(z=0) \cdot \dot{\cdot}_H \mathfrak{r} dx dy = \rho_0 \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} p(z=0) \cdot \dot{\cdot}_H \mathfrak{r} dx dy, \quad (8)$$

其中第 2 个式子已引用了变量代换(A7)式; 并令  $\dot{\cdot}_H(\cdot) \equiv [\partial(\cdot)/\partial x, \partial(\cdot)/\partial y]$ .

在谱空间<sup>[8]</sup>中改写(8)式, 得到

$$F_d = i\rho_0 \int_0^{\infty} \int_0^{2\pi} (\cos \sigma, \sin \sigma) \hat{p}^*(z=0) \mathfrak{r} K^2 d\sigma dK, \quad (9)$$

其中星号上标表示取复数共轭.

为求(9)式, 先利用约化扰动气压  $\hat{p}$  和垂直扰动速度  $\hat{w}$  之间的关系(即略去(A8)式左边括号中的第 1 项后的式子)

$$\hat{p} = iU_n \left[ \left( \frac{U_{nz}}{U_n} + \Gamma_1 \right) \hat{w} - \hat{w}_z \right], \quad (10)$$

结合(3)式, 得到

$$\begin{aligned} \hat{p}(Z) &= \frac{U_n}{K} (i\Gamma_1 + m_0) \hat{w} + \frac{\epsilon}{K} (iU_n^2 + U_n m_1) \hat{w} + \frac{\epsilon^2}{K} U_n \cdot m_2 \hat{w} = \\ &\hat{p}_0 + \epsilon \hat{p}_1 + \epsilon^2 \hat{p}_2, \end{aligned} \quad (11)$$

然后, 对上式在高度  $Z = 0$  (即  $z = 0$ ) 处取值, 并代入边值条件(4)式, 则有

$$\hat{p}_0(Z=0) = U_n^2 q [im_0(Z=0) - \Gamma_1] \mathfrak{r}(k, l), \quad (12)$$

$$\epsilon \hat{p}_1(Z=0) = \left\{ iU_n^2 q [\epsilon m_1(Z=0)] - U_n U_{n0z} \right\} \mathfrak{r}(k, l), \quad (13)$$

$$\epsilon^2 \hat{p}_2(Z=0) = iU_n^2 q [\epsilon^2 m_2(Z=0)] \mathfrak{r}(k, l), \quad (14)$$

式中(含下文)  $U_{n0z}$  均表示  $U_n$  对  $z$  的偏导数在  $z = 0$  处的值.

因此, 将(12)式至(14)式逐个代入到(9)式即可求得零到二阶的重力波拖曳; 注意

$$F = \sum_{j=0}^2 \epsilon^j F_{\psi}.$$

## 2.1 静力(或小水平 $Fr$ 数)近似

在静力近似下, 有  $(KU_n/N)^2 \sim (\|U\|/aN)^2 = Fr^2 \ll 1^{[2], [9]}$ , 又  $(\Gamma_1 U_n/N)^2 \ll 1^{[5]}$ , 于是  $L \approx 1$ . 将后者代入(5)式至(7)式, 并利用(12)式至(14)式, 可求得

$$\hat{p}_0(Z=0) = \hat{p}_{0TMV} - \Gamma_1 U_{n0}^2 \mathfrak{r}(k, l), \quad (15)$$

$$\epsilon \hat{p}_1(Z=0) = \epsilon \hat{p}_{1TMV} - i\Gamma_1 U_{n0}^2 \frac{U_{n0z}}{N} \mathfrak{r}(k, l), \quad (16)$$

$$\begin{aligned} \epsilon^2 \hat{p}_2(Z=0) &= \epsilon^2 \hat{p}_{2TMV} + \\ &\frac{\Gamma_1}{2} U_{n0}^2 \left[ \left( \frac{U_{n0z}}{N} \right)^2 + \frac{U_{n0} U_{n0z}}{N^2} - i \frac{\Gamma_1 U_{n0}}{N} \left( \frac{U_{n0z}}{N} \right)^2 \right] \mathfrak{r}(k, l), \end{aligned} \quad (17)$$

这里, 用下标“TMV”标识的为静力 Boussinesq 流的解<sup>[2]</sup>(详见附录 B). 显然, 若令  $\Gamma_1 = 0$ , (15)式至(17)式即刻变为文献[2]中关于静力 Boussinesq 流的(39)式至(41)式, 即这里的模型能完全包容文献[2]中的结果.

接着, 将(15)式至(17)式逐个代入到(9)式, 得到静力 Non-Boussinesq 模型的重力波拖曳为

$$F_{d0} = \rho_0 N \int_0^{\infty} \int_0^{2\pi} (\cos \sigma, \sin \sigma) U_{n0} |\mathfrak{r}|^2 K^2 d\sigma dK, \quad (18)$$

$$\mathfrak{F}_{d1} = -\rho_0 N \int_0^{\infty} \int_0^{2\pi} (\cos \sigma, \sin \sigma) U_{n0} |\mathfrak{r}|^2 K^2 \left[ \frac{\Gamma_1 U_{n0}}{N} \frac{U_{n0z}}{N} \right] d\sigma dK, \quad (19)$$

$$\epsilon^2 F_{d2} = -\rho_0 \frac{N}{8} \int_0^{\infty} \int_0^{2\pi} (\cos \sigma, \sin \sigma) U_{n0} |\mathfrak{r}|^2 K^2 \left[ 2 \frac{U_{n0} U_{n0z}}{N^2} + \right.$$

$$\left[ \frac{U_{n0z}}{N} \right]^2 + 4 \left[ \frac{\Gamma_1 U_{n0}}{N} \right]^2 \left[ \frac{U_{n0z}}{N} \right]^2 d\sigma dK, \quad (20)$$

注意,对(19)式,我们可以验证,在分量形式下有  $\text{sgn}(\mathbf{E}_{dx}) = -\text{sgn}(U_{0z})$ ,  $\text{sgn}(\mathbf{E}_{dy}) = -\text{sgn}(V_{0z})$ , 其中  $\text{sgn}(x)$  为熟悉的符号函数. 显然,这种反相关关系将会使得风矢量前向切变(即风速随高度增加,如  $U_{0z} > 0$ ,  $V_{0z} = 0$ )时的重力波拖曳力比后向切变(即风速随高度减小,如  $U_{0z} < 0$ ,  $V_{0z} = 0$ )时的小. 另外还能验证,当地形为轴对称时<sup>[2]</sup>(此时  $|\eta|^2$  与  $\sigma$  无关),  $F_{d0}$ 、 $F_{d1}$  和  $F_{d2}$  之间的相对比值不变.

### 3 一个理想算例

给出圆钟型地形函数的谱形式<sup>[2]</sup>如下

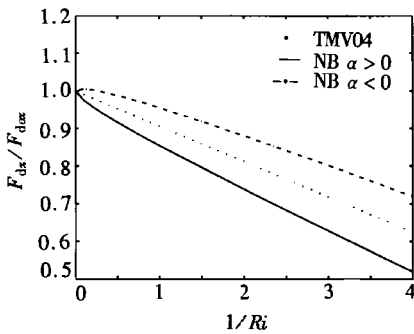
$$\eta = h_0 a^2 \exp(-aK), \quad (21)$$

其中  $a$  为山体的半宽.

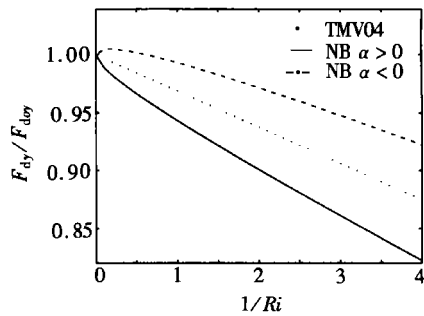
将(21)式代入到(18)式至(20)式,并将结果相加,得到  $F_d$  的分量形式为

$$F_{dx} = F_{dx}^{\text{TMV}} + \frac{\pi}{4} \rho_0 N a h_0^2 U_0 \left[ -\frac{1}{4} \frac{\Gamma_1}{N^2} \left( 3U_0 U_{0z} + V_0 V_{0z} + V_0^2 \frac{U_{0z}}{U_0} \right) - \frac{1}{16} \frac{\Gamma_1^2}{N^4} \left( 6U_0 V_0 U_{0z} V_{0z} + 5U_0^2 U_{0z}^2 + 3V_0^2 U_{0z}^2 + 3V_0^2 V_{0z}^2 + 2\frac{V_0^3}{U_0} U_{0z} V_{0z} + U_0^2 V_{0z}^2 \right) \right], \quad (22)$$

$$F_{dy} = F_{dy}^{\text{TMV}} + \frac{\pi}{4} \rho_0 N a h_0^2 V_0 \left[ -\frac{1}{4} \frac{\Gamma_1}{N^2} \left( 3V_0 V_{0z} + 2U_0 U_{0z} + U_0^2 \frac{V_{0z}}{V_0} \right) - \frac{1}{16} \frac{\Gamma_1^2}{N^4} \left( 6U_0 V_0 U_{0z} V_{0z} + 5V_0^2 V_{0z}^2 + 3U_0^2 U_{0z}^2 + 3U_0^2 V_{0z}^2 + 2\frac{U_0^3}{V_0} U_{0z} V_{0z} + V_0^2 U_{0z}^2 \right) \right], \quad (23)$$



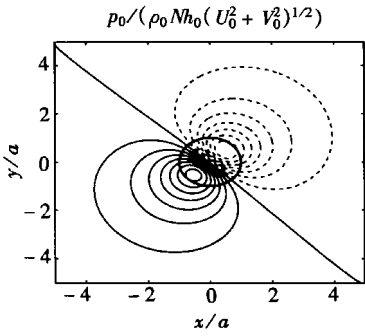
(a) 重力波拖曳力的  $x$  方向分量



(b)  $y$  方向分量

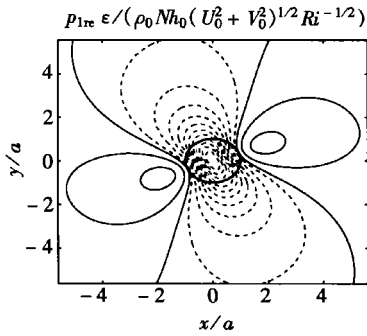
图1 无量纲化重力波拖曳力(由(25)式和(26)式算得)关于 Richardson 数倒数的函数图像(风廓线由(24)式给出. 其中“TMV04”标识的为 Boussinesq 模型结果,“NB”标识的为本文 Non-Boussinesq 模型的结果. 前向切变( $\alpha > 0$ )和反向切变( $\alpha < 0$ )的重力波拖曳力之间的最大差值约为 0.1 相对单位,出现在  $Ri = 0.25$ ).

其中  $(F_{dx}^{\text{TMV}}, F_{dy}^{\text{TMV}})$  为 Teixeira 等人<sup>[2]</sup> 给出的关于静力 Boussinesq 流的结果(见附录 B);  $U_0$ 、 $V_0$  分别为基本流在  $x$ 、 $y$  方向的风速,它们对  $z$  的导数则用下标表示.

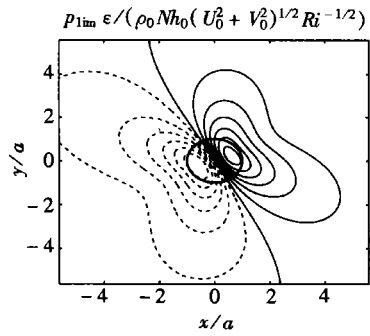


(a) 零阶地表扰动气压图

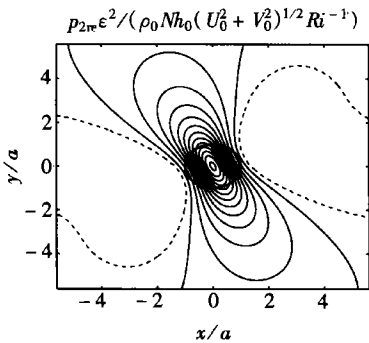
从(22)式、(23)式,我们注意到,除第2节提到的  $F_{d1}$  对切变方向和大小的依赖性之外(见与  $\Gamma_1$  相乘的项),根据与  $\Gamma_1^2$  相乘的项以及文献[2]中的结果还能断言,只要  $U$  随高度连续地改变方向,(如假定  $U(z=0) = (U_0, 0)$ , 于是  $V_{0z} \neq 0$ ), 总有  $F_{dy} (\sim V_{0z}) \neq 0$ , 表明在垂直于地面风矢量的方向上总能诱导出一个举力<sup>[10]</sup>(关于这一点,本文不作详细讨论)作用,从而使得  $F_d$  偏离于  $U(z=0)$ . 这即推广了 Boussinesq 模型<sup>[2]</sup>在当风的方向和大小都发生变化时将诱导导出横向举力的论断.



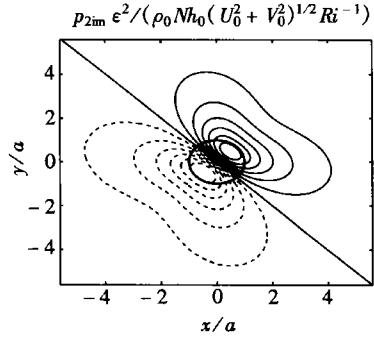
(b) 一阶地表扰动气压图



(c) 一阶地表扰动气压图



(d) 二阶地表扰动气压图



(e) 二阶地表扰动气压图

图2 无量纲化地表扰动气压的横截面图((按阶数绘制),对应的风速廓线由(24)式给出.粗实线绘制的圆圈表示高度为  $h_0/2$  处的山体截面,落在区域中心.实线表示正值,虚线表示负值.等值线隔距,从(a)到(e),分别为 0.05, 0.015, 0.0015, 0.0005 和 0.0005. “re” (“im”) 标识的表示根据  $\beta_j, j = 1, 2$  的实部(虚部)绘制).

在下面的算例中,我们取  $\Gamma_1 = N/(20U_0)$  (约为  $10^{-5} \text{ m}^{-1}$ ), 并为了避开参数不稳定域,令  $Ri \geq 1/4$ <sup>[11-12]</sup>.

### 3.1 算例: 线性风切变-风向随高度变化

给定风速廓线为

$$U = U_0 + \alpha, \quad V = U_0, \tag{24}$$

其中  $\alpha$  和  $U_0$  为常数. 于是,把  $Ri = N^2/\alpha^2$  和(24)式代入到(22)式、(23)式,得到

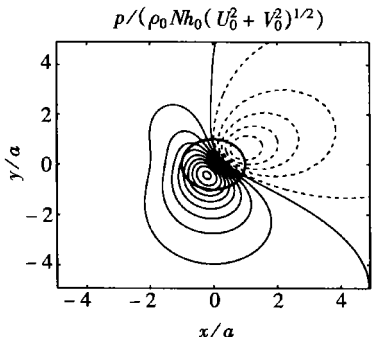
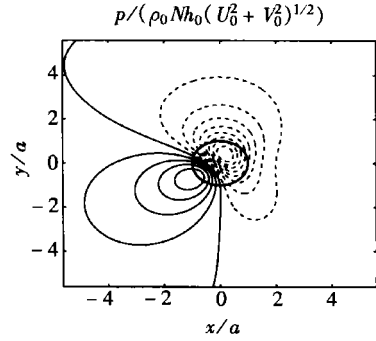
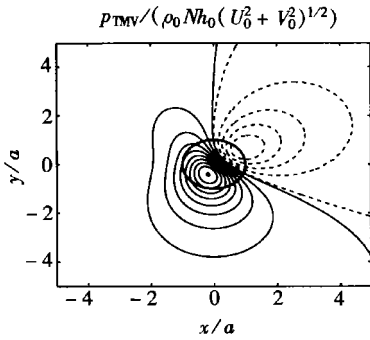
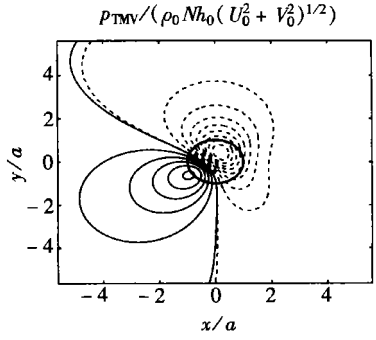
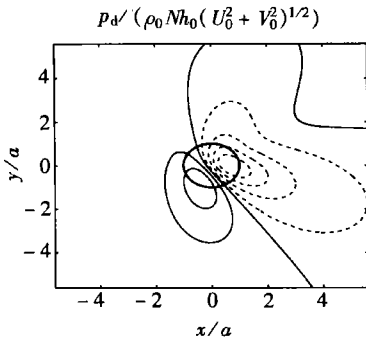
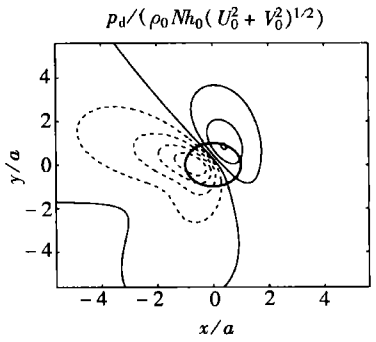
(a) Non-Boussinesq 模型图 ( $\alpha < 0$ )(d) Non-Boussinesq 模型图 ( $\alpha > 0$ )(b) Boussinesq 模型<sup>[2]</sup>图 ( $\alpha < 0$ )(e) Boussinesq 模型<sup>[2]</sup>结果图 ( $\alpha > 0$ )(c) Non-Boussinesq 模型结果减去 Boussinesq 模型<sup>[2]</sup>结果图 ( $\alpha < 0$ )(f) Non-Boussinesq 模型减去 Boussinesq 模型<sup>[2]</sup>结果图 ( $\alpha > 0$ )

图 3 总的无量纲化地表扰动气压横截面图(风廓线由(24)式给出,其中  $Ri = 0.35$ 。粗实线绘制的圆圈代表高度  $h_0/2$  处的山体横截面,落在区域中心。实线表示正值;虚线表示负值。等值线隔距,从(a)到(c),分别为 0.05, 0.05, 0.005;从(d)到(f),分别为 0.05, 0.05 和 0.005)。

$$F_{dx} = F_{d0x} \left[ 1 - \frac{3}{32} \frac{1}{Ri} - \operatorname{sgn}(\alpha) \frac{1}{\sqrt{Ri}} - \frac{1}{800} \frac{1}{Ri} \right], \quad (25)$$

$$F_{dy} = F_{d0y} \left[ 1 - \frac{1}{32} \frac{1}{Ri} - \operatorname{sgn}(\alpha) \frac{1}{40} \frac{1}{\sqrt{Ri}} - \frac{1}{1600} \frac{1}{Ri} \right], \quad (26)$$

式中  $(F_{d0x}, F_{d0y}) = U_0 \rho_0 N h_0^2 a \pi / 4$  为 0 阶重力波拖曳(即不计切变时的解)。

这里,我们注意到,由于  $V_0 = U_0 \neq 0$ , 有  $F_{dy} \neq 0$ ; 并且只要  $\alpha \neq 0$ , 就有  $F_{dx} \neq F_{dy}$ , 从而  $F_d$  偏离于  $U_0$ 。而且,从图 1, 我们看到切变为前向时( $\alpha > 0$ ) 的重力波拖曳总比反向时( $\alpha < 0$ )

的小, 并且它们之间的差异随着切变强度 ( $|\alpha| \sim Ri^{-1/2}$ ) 的增加而增大. 与此对应, 在图 2(c) 中, 我们则发现, 与图 2(a) 和图 2(e) 类似, 由  $\hat{p}_1$  的虚部  $\text{Im}(\hat{p}_1)$  决定的地表扰动气压也描绘了一个与  $|\alpha|$  成正比从迎风坡到背风坡的非对称结构; 且当  $\alpha < 0$  时, 它将使得 Non-Boussinesq 模型预测的扰动气压比 Boussinesq 模型的结果多出一个由上游指向下游的气压梯度力增量 (见图 3(c)), 而  $\alpha > 0$  时则反之 (图 3(f)). 这正好解释了 Teixeira 等人<sup>[2]</sup> 在数值模拟中的发现, 即当切变增强时, 前向切变的重力波拖曳比反向切变的重力波拖曳减小得快得多.

## 4 总 结

引入密度的垂直变化 ( $\Gamma_1$  表征) 后, 本文建立了预测地形重力波拖曳的解析 Non-Boussinesq 模型, 其中在基流风速垂直缓变的条件下给出了零到二阶的地形重力波拖曳和扰动气压的解析表达式, 而通过令参数  $\Gamma_1 = 0$ , 则能够完全再现 Boussinesq 模型的结果<sup>[2]</sup>.

理论分析和理想算例表明, 本文的 Non-Boussinesq 模型能够揭示出更多 Boussinesq 模型<sup>[2]</sup> 不能解释的现象.

## 附 录

### A Taylor-Goldstein 方程

线性化定常、绝热、无粘、无旋条件下的动量方程、连续方程和热力学方程<sup>[10]</sup> 之后得到扰动场的控制方程为

$$U \frac{\partial \hat{u}'}{\partial x} + V \frac{\partial \hat{u}'}{\partial y} + w' U_z = - \frac{1}{\rho} \frac{\partial \hat{p}'}{\partial x}, \quad (\text{A1})$$

$$U \frac{\partial \hat{v}'}{\partial x} + V \frac{\partial \hat{v}'}{\partial y} + w' V_z = - \frac{1}{\rho} \frac{\partial \hat{p}'}{\partial y}, \quad (\text{A2})$$

$$\delta_1 \left( U \frac{\partial \hat{w}'}{\partial x} + V \frac{\partial \hat{w}'}{\partial y} \right) = - \frac{1}{\rho} \frac{\partial \hat{p}'}{\partial z} - \frac{\hat{\rho}'}{\rho} g, \quad (\text{A3})$$

$$U \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\hat{\rho}'}{\rho} \right) + V \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\hat{\rho}'}{\rho} \right) + w' S + \frac{\partial \hat{u}'}{\partial x} + \frac{\partial \hat{v}'}{\partial y} \frac{\partial \hat{w}'}{\partial z} = 0, \quad (\text{A4})$$

$$U \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\hat{\theta}'}{\theta} \right) + V \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\hat{\theta}'}{\theta} \right) + \beta \hat{w}' = 0, \quad (\text{A5})$$

$$- \frac{\hat{\rho}'}{\rho} = \frac{\hat{\theta}'}{\theta} - \frac{1}{c_s^2} \frac{\hat{p}'}{\rho}. \quad (\text{A6})$$

其中  $(\hat{u}', \hat{v}', \hat{w}')$  分别为  $x, y$  和  $z$  方向的速度扰动,  $\hat{\rho}'$  为密度扰动,  $\hat{\theta}'$  为位温扰动; 其余带横杠的变量为基本量 (仅为高度  $z$  的函数), 且已定义稳定度参数  $\beta = \theta_z / \theta = -S - g / c_s^2 = N^2 / g$ , 其中  $c_s$  为绝热声速; 层结参数  $S = \rho_z / \rho$  和  $\Gamma_1 = -\beta - S/2$  (但是, 在这里和正文中, 我们在提到层结参数时总是指  $\Gamma_1$  而不是  $S$ ).

对(A1)式至(A6)式做下面的变量代换

$$(u, v, w, \rho, b) = \sqrt{\frac{\rho}{\rho_0}} \left( \hat{u}', \hat{v}', \hat{w}', \frac{\hat{\rho}'}{\rho}, g \frac{\hat{\theta}'}{\theta} \right), \quad p = \sqrt{\frac{\rho_0}{\rho}} \frac{\hat{p}'}{\rho_0}, \quad (\text{A7})$$

其中  $\rho_0 = \rho(z=0)$ , 为常数.

在对变换后的式子进行简单的运算之后, 可得到约化后的扰动气压  $p$  和扰动垂直速度  $w$  在谱空间中的控制方程分别为

$$\left[ \frac{K^2 U_n^2}{c_s^2} - K^2 \right] \hat{p} = iK U_n \left[ \frac{\partial}{\partial z} - \Gamma_1 \right] \hat{w} - iK U_{nz} \hat{w}, \quad (\text{A8})$$

$$(-\delta_1 K^2 U_n^2 + N^2) \hat{w} = -iK U_n \left[ \left[ \frac{\partial}{\partial z} + \Gamma_1 \right] \hat{p} \right], \quad (\text{A9})$$

其中引用的傅立叶变换对<sup>[8]</sup> 为

$$\hat{\phi}(k, l) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \phi \exp[-i(kx + ly)] dx dy, \quad (\text{A10})$$

$$\phi(x, y) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{\phi} \exp[i(kx + ly)] dk dl, \quad (\text{A11})$$

式中  $i = \sqrt{-1}$  为虚数单位,  $\hat{\phi}(k, l)$  为任意变量  $\phi(x, y)$  的傅立叶变换.

略去(A8)式左边括号中的第1项, 即滤去声波<sup>[13]</sup>, 代入(A9)式中消去  $\hat{\rho}$ , 得到关于  $\hat{w}$  的 Taylor-Goldstein 方程为

$$\hat{w}_{zz} + \left[ \frac{N^2}{U_n^2} - 2\Gamma_1 \frac{U_{nz}}{U_n} - \frac{U_{nz}}{U_n} - \delta_1 K^2 - \Gamma_1^2 - \Gamma_{1z} \right] \hat{w} = 0, \quad (\text{A12})$$

进一步令  $\Gamma_{1z} = 0^{[5]}$ , 即得到文中使用的方程(1).

## B 静力 Boussinesq 模型的地表扰动气压和重力波拖曳

### 地表扰动气压

$$\hat{\rho}_{0TMV}(Z=0) = iN U_{n0} \hat{\eta}(k, l), \quad (\text{B1})$$

$$\epsilon \hat{\rho}_{TMV}(Z=0) = -\frac{N U_{n0}}{2} \frac{U_{n0z}}{N} \hat{\eta}(k, l), \quad (\text{B2})$$

$$\epsilon^2 \hat{\rho}_{2TMV}(Z=0) = -\frac{i}{8} N U_{n0} \left[ 2 \frac{U_{n0} U_{n0z}}{N^2} + \left( \frac{U_{n0z}}{N} \right)^2 \right] \hat{\eta}(k, l), \quad (\text{B3})$$

### 圆钟型地形触发的重力波拖曳

$$F_{\text{dsTMV}} = \frac{\pi}{4} \rho_0 N a h_0^2 U_0 \left[ 1 - \frac{1}{32} \left( 3 \frac{U_{0z}^2}{N^2} + 2 \frac{V_0}{U_0} \frac{U_{0z} V_{0z}}{N^2} + \frac{V_{0z}^2}{N^2} \right) - \frac{1}{16} \left( 3 \frac{U_{0zz} U_0}{N^2} + 2 \frac{V_{0zz} V_0}{N^2} + \frac{V_0}{U_0} \frac{U_{0zz} V_0}{N^2} \right) \right], \quad (\text{B4})$$

$$F_{\text{dyTMV}} = \frac{\pi}{4} \rho_0 N a h_0^2 V_0 \left[ 1 - \frac{1}{32} \left( 3 \frac{V_{0z}^2}{N^2} + 2 \frac{U_0}{V_0} \frac{U_{0z} V_{0z}}{N^2} + \frac{U_{0z}^2}{N^2} \right) - \frac{1}{16} \left( 3 \frac{V_{0zz} V_0}{N^2} + 2 \frac{U_{0zz} U_0}{N^2} + \frac{U_0}{V_0} \frac{V_{0zz} U_0}{N^2} \right) \right]. \quad (\text{B5})$$

## [参 考 文 献]

- [1] Blumen W. A random model of momentum flux by mountain waves[J]. Geophys Publ, 1965, 26(2): 1-33.
- [2] Teixeira M A C, Miranda P M A, Valente M R, et al. An analytical model of mountain wave drag for wind profiles with shear and curvature[J]. J Atmos Sci, 2004, 61(9): 1040-1054.
- [3] Queney P. The problem of air flow over mountains: a summary of theoretical studies[J]. Bull Amer Meteor Soc, 1948, 29(4): 16-26.
- [4] Scorer R S. Theory of waves in the lee of mountains[J]. Quart J Roy Meteor Soc, 1949, 75(2): 41-56.
- [5] Smith R B. The influence of mountains on the atmosphere[J]. Advances in Geophysics, 1979, 21(3): 87-230.
- [6] Smith R B. Linear theory of stratified hydrostatic flow past an isolated mountain[J]. Tellus, 1980, 32(4): 348-364.
- [7] Bretherton F P. Momentum transport by gravity waves[J]. Quart J Roy Meteor Soc, 1969, 95(404): 213-243.
- [8] 布赖姆 E O. 快速傅立叶变换[M]. 柳群译. 上海: 上海科学技术出版社, 1979, 72-75.
- [9] Drazin P G. On the steady flow of a fluid of variable density past an obstacle[J]. Tellus, 1961, 13(2): 239-251.
- [10] Landau L D, Lifshitz E M. Fluid Mechanics, 2nd Edition [M]. Oxford: Butterworth-Heinemann, Pergamon Press. 1987, 3-4, 29.
- [11] Booker J, Bretherton F P. The critical layer for internal gravity waves in a shear flow[J]. J Fluid



- Mech, 1967, **27**(3): 513-539.
- [12] Miles J W. On the stability of heterogeneous shear flows[J]. J Fluid Mech, 1961, **10**(4): 496-509.
- [13] Durran D R. Improving the anelastic approximation[J]. J Atmos Sci, 1989, **46**(11): 1453-1461.

## Analytical Investigation on the 3D Non-Boussinesq Mountain Wave Drag for Wind Profiles With Vertical Variations

TANG Jin-yun, TANG Jie, WANG Yuan

(The Key Laboratory of Mesoscale Severe Weather, Ministry of Education;  
Department of Atmospheric Sciences, Nanjing University, Nanjing 210093, P. R. China)

**Abstract:** A new analytical model was developed to predict the gravity wave drag (GWD) induced by an isolated 3-dimensional mountain, over which a stratified, non-rotating Non-Boussinesq sheared flow is impinged. The model is confined to small amplitude motion and assumes the ambient velocity varying slowly with height. The modified Taylor-Goldstein equation with variable coefficients was solved with a Wentzel-Kramers-Brillouin (WKB) approximation, formally valid at high Richardson numbers. With this WKB solution, generic formulae, of second order accuracy, for the GWD and surface pressure perturbation (both for hydrostatic and non-hydrostatic flow) were presented, enabling a rigorous treatment on the effects by vertical variations in wind profiles. In an ideal test to the circular bell-shaped mountain, it was found, when the wind is linearly sheared, that the GWD decreases as the Richardson number decreases. However, the GWD for a forward sheared wind (wind increases with height) decreases always faster than that for the backward sheared wind (wind decreases with height). This difference is evident whether the model is hydrostatic or not.

**Key words:** GWD; Taylor-Goldstein equation; wind shear; WKB approximation; circular bell-shaped mountain