

# 具有微极弹性构架的流体-饱和多孔固体中 波在边界面处的传播\*

R·库玛, M·巴拉克

(库卢谢特拉大学 数学系, 库卢谢特拉 136119, 印度)

(我刊原编委戴天民推荐)

**摘要:** 通过研究匀质非黏性液体半空间和微极流体饱和多孔固体半空间交界面处平面波的反射与透射, 得到不同角度入射波的反射和透射系数. 计算出反射波与透射波的振幅比数值, 并用图表示出微极性和多孔性对反射和透射的影响. 最后根据公式对一些特例进行了推导.

**关键词:** 微极流体-饱和多孔固体; 反射; 透射; 振幅比; 微极性与多孔性效应

**中图分类号:** 357.3      **文献标识码:** A

## 符号表

$\lambda, \mu, \alpha, \beta, \gamma$ : 固-液聚合体的材料常数.

$\rho$ : 介质密度,  $b$ : 耗散函数.

$j$ : 微惯量,  $\rho_{11}, \rho_{12}, \rho_{22}$ : 动力系数.

$u$ : 固体部分的位移矢量, 分量为  $u_1, u_2, u_3$ .

$U$ : 液体部分的位移矢量, 分量为  $U_1, U_2, U_3$ .

$e = \text{div } u, \epsilon = \text{div } U$ :  $u$  和  $U$  对应的膨胀率.

$\phi$ : 微旋矢量.

$Q$ : 固体和液体体积改变之间的耦合度量.

$R$ : 总体积保持常量时, 施加在流体上的用以迫使给定体积的流体变为聚合体的压力度量.

## 引 言

在理学和工程学众多分支的应用领域, 如地球物理学、地震学、土木工程和机械工程学, 会涉及到对流体饱和多孔介质的动力学分析. 在地球表面和地下存在着许多具有流体饱和和多孔性质的材料, 它们以砂岩、石灰岩和浸透在地下水或石油中的沉积岩的形式存在. Biot<sup>[1-2]</sup> 研究了流体饱和多孔固体中平面简谐地震波的传播. Biot<sup>[3]</sup> 给出了多孔介质中变形机制与声场传播的统一处理, 他把液-固体介质视作具有弛豫性和黏弹性的复杂的物理化学系统. Deresiewicz<sup>[4]</sup>、Deresiewicz 和 Rice<sup>[5]</sup> 分别研究了非耗散的和耗散的流体饱和多孔固体在其没有平面面力的表面处的反射问题.

当体系中微结构的作用不可忽视时, 经典弹性理论的结果和实验结果之间会出现差异. 例如在介质裂隙和凹口的邻域, 应力梯度的效应变得不可忽视. 同样的差异也会出现在颗粒介质和多分子体系中(如聚合物), 在高频弹性振动和短波作用下, 微结构的影响变得更加显

\* 收稿日期: 2005-05-17; 修订日期: 2007-01-18

作者简介: R·库玛, 教授, 博士 (E-mail: rajneesh\_kuk@rediffmail.com).

本文原文为英文, 海冶译, 戴天民校.

著. Eringen 和 Suhubi<sup>[6-7]</sup> 提出了微极弹性固体理论, 指出包含在宏体积元中的微粒对其质心的微运动不能忽视. 这种受微运动和宏变形影响的材料称作微态材料. Eringen<sup>[8-9]</sup> 曾对作为微态材料的一个子集的微极介质进行过理论研究, 并指出这类材料具有微旋性和微旋惯量.

Gauthier<sup>[10]</sup> 发现在典型固体中微极波可受激发并能被检测. Yang 和 Lakes<sup>[11]</sup> 相当自信地提出将人类骨骼作为微极弹性理论模型来研究是十分合适的. 许多学者<sup>[12-14]</sup> 对微极弹性固体中波的传播问题进行了研究. Konczak<sup>[15]</sup> 研究了具有微极构架的流体饱和黏弹性多孔介质中平面简谐波的传播. Konczak<sup>[16]</sup> 还研究了具有微极构架的流体饱和黏弹性多孔介质上的热机械效应.

Kumar 和 Singh<sup>[17]</sup> 研究了多孔弹性半空间和微极流体饱和半空间界面处微极弹性波的反射和折射. Kumar 和 Deswal<sup>[18-19]</sup> 对波在微极流体饱和多孔介质中的传播、表面波在匀质液体层下的微极流体饱和多孔固体层中的传播均作了研究. Kumar 和 Tomar<sup>[20]</sup> 则研究了黏弹性液体和微极性固体分界面处弹性波的反射和透射.

本文研究匀质非黏性液体半空间和微极流体饱和多孔固体半空间界面处平面波的反射与透射.

## 1 基本方程

根据 Eringen<sup>[21]</sup> 和 Konczak<sup>[15-16]</sup> 理论, 耗散存在的微极流体饱和多孔固体的场方程为:

$$(\lambda + 2\mu + K) \cdot (\cdot \cdot \cdot \mathbf{u}) - (\mu + K) \cdot \cdot \times (\cdot \cdot \times \mathbf{u}) + K(\cdot \cdot \times \phi) + Q \cdot \cdot (\cdot \cdot \cdot \mathbf{u}) = \frac{\partial^2}{\partial t^2} (\rho_{11} \mathbf{u} + \rho_{12} \mathbf{U}) + b \frac{\partial}{\partial t} (\mathbf{u} - \mathbf{U}), \quad (1)$$

$$\cdot \cdot (Qe + R\epsilon) = \frac{\partial^2}{\partial t^2} (\rho_{11} \mathbf{u} + \rho_{12} \mathbf{U}) - b \frac{\partial}{\partial t} (\mathbf{u} - \mathbf{U}) \quad (2)$$

$$\text{和} \quad (\alpha + \beta + \gamma) \cdot \cdot (\cdot \cdot \cdot \phi) - \gamma \cdot \cdot \times (\cdot \cdot \times \phi) + K(\cdot \cdot \times \mathbf{u}) - 2K\phi = \rho_2 \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2}, \quad (3)$$

式中的符号请见本文末尾的符号表, 下同.

假定时谐变量  $e^{-i\omega t}$ , 并考虑位移矢量的 helmholtz 分解

$$\mathbf{u} = \cdot \cdot q + \cdot \cdot \times \mathbf{H}, \quad \cdot \cdot \cdot \mathbf{H} = 0 \quad (4)$$

$$\text{和} \quad \mathbf{U} = \cdot \cdot \phi + \cdot \cdot \times \mathbf{G}, \quad \cdot \cdot \cdot \mathbf{G} = 0, \quad (5)$$

并从结果中消去  $\phi$ 、 $\cdot \cdot \cdot \phi$ 、 $\phi_2$ 、 $\cdot \cdot \cdot \phi_2$ , 则得到下列方程:

$$(A \cdot \cdot^4 + B\omega^2 \cdot \cdot^2 + C\omega^4)q = 0, \quad (6)$$

$$(A \cdot \cdot^2 + \omega^2(R\rho_{11} - \rho_{12}Q) + i\omega b(R + Q))q - \omega^2 F\phi = 0, \quad (7)$$

$$(\cdot \cdot^4 + D\omega^2 \cdot \cdot^2 + E\omega^4)H^* = 0 \quad (8)$$

$$\text{和} \quad \cdot \cdot^2 (\cdot \cdot^2 + \omega^2 E_2 + pr_2)H^* - p(-r_0 + r_1\omega^2)\phi_2 = 0, \quad (9)$$

其中

$$H^* = (-H)_y, \quad \phi_2 = (-\phi)_y,$$

$$A = PR - Q^2, \quad B = P \left[ \rho_{22} + \frac{ib}{\omega} \right] + R \left[ \rho_{11} + \frac{ib}{\omega} \right] - 2Q \left[ \rho_{12} + \frac{ib}{\omega} \right],$$

$$C = \left[ \rho_{11} + \frac{ib}{\omega} \right] \left[ \rho_{22} + \frac{ib}{\omega} \right] - \left[ \rho_{12} + \frac{ib}{\omega} \right]^2, \quad P = \lambda + 2\mu + K, \quad p = \frac{K}{\mu + K},$$

$$F = (\rho_{22}Q - \rho_{12}R) + \frac{ib}{\omega}(R + Q), \quad D = E_2 + r_1 + \frac{(pr_2 - r_0)}{\omega^2},$$

$$E = E_2 \left[ r_1 - \frac{r_0}{\omega^2} \right], \quad E_1 = \left[ \rho_{11} + \rho_{12} - \frac{\rho_{12}\omega + ib}{\rho_{22}\omega + ib} + ib \frac{\rho_{22} + \rho_{12}}{\rho_{22}\omega + ib} \right].$$

和

$$E_2 = \frac{E_1}{\mu + K}, \quad r_0 = \frac{2K}{Y}, \quad r_1 = \frac{Q}{Y}, \quad r_2 = \frac{K}{Y}.$$

假定方程(6)的解为

$$q = q_1^* + q_2^*, \quad (10)$$

其中  $q_1^*$  和  $q_2^*$  满足

$$(\cdot\cdot^2 + \delta_1^2) q_1^* = 0, \quad (\cdot\cdot^2 + \delta_2^2) q_2^* = 0, \quad (11)$$

其中  $\delta_{1,2}^2 = \lambda_{1,2}^2 \omega^2$ ,  $\lambda_{1,2}^2 = (B \pm (B^2 - 4AC)^{1/2})/2A$ ,

于是在无限介质中, 方程(10)的解给出了两个耦合纵波. 与  $q_1^*$  对应的波速度较快, 称以相速度  $\lambda_1^{-1}$  传播的纵位移快波;  $q_2^*$  对应的波速度较慢, 称为以相速度  $\lambda_2^{-1}$  传播的纵位移慢波.

根据方程(10)和方程(11), 从方程(7)得到

$$\phi = \mu_1 q_1^* + \mu_2 q_2^*, \quad (12)$$

其中

$$\mu_i = \frac{1}{F} (-A \lambda_i^2 + (R \rho_{11} - Q \rho_{12})) + \frac{ib}{\omega} (R + Q) q_i^*, \quad i = 1, 2.$$

取方程(9)的解为

$$H = H_1^* + H_2^*, \quad (13)$$

其中  $H_1^*$  和  $H_2^*$  满足

$$(\cdot\cdot^2 + \delta_3^2) H_1^* = 0, \quad (\cdot\cdot^2 + \delta_4^2) H_2^* = 0, \quad (14)$$

其中

$$\delta_{3,4}^2 = \lambda_{3,4}^2 \omega^2, \quad \lambda_{3,4}^2 = (D \pm (D^2 - 4E)^{1/2})/2.$$

将方程(13)、方程(14)代入方程(8), 得到

$$\phi_2 = \mu_3 H_1^* + \mu_4 H_2^*, \quad (15)$$

其中

$$\mu_{3,4} = \frac{\delta_{3,4}^2 (\delta_{3,4}^2 - \omega^2 E_2 - p r_2)}{p (-r_0 + r_1 \omega^2)},$$

于是在半无限介质中, 方程(14)的解给出了以速度  $\lambda_3^{-1}$  和  $\lambda_4^{-1}$  传播的两个耦合横向微旋波. 根据 Eringen<sup>[9]</sup> 和 Konczak<sup>[15-16]</sup> 的理论, 微极流体饱和和多孔固体中的本构关系为

$$t_{kl} = (\lambda u_{rr} + Q U_{r,r}) \delta_{kl} + \mu (u_{k,l} + u_{l,k}) + K (u_{l,k} - \epsilon_{klr} \phi_r), \quad (16)$$

$$m_{kl} = \alpha \phi_{r,r} \delta_{kl} + \beta \phi_{k,l} + \gamma \phi_{l,k} \quad (17)$$

和

$$\sigma = Qe + R\epsilon. \quad (18)$$

## 2 问题的表述

假定一个匀质非黏性液体半空间(介质  $M$ ) 和一个微极流体饱和弹性半空间(介质  $M'$ ) 沿平面边界紧密交接. 定义直角坐标系  $(x, y, z)$ , 设平面边界处  $z = 0$ ,  $z$  轴指向介质  $M$ , 入射波通过介质  $M$ , 位于  $z > 0$  的区域, 介质  $M'$  位于  $z < 0$  的区域.

这是  $xz$  平面上的二维问题, 因此可取

$$\mathbf{u} = (u_1, 0, u_3), \quad (19)$$

$$\phi = (0, \phi_2, 0). \quad (20)$$

在液体半空间, 位移势  $\phi$  的运动方程为

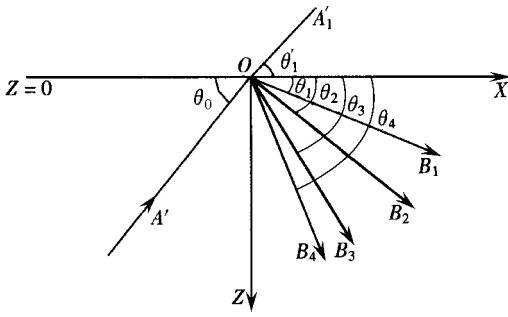


图 1

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} = \frac{1}{\alpha'^2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2}, \quad (21)$$

其中  $\alpha' = \sqrt{\lambda/\rho}$  为液体流速. 位移分量  $u_1, u_3$  和压力  $p'$  表示为

$$\begin{cases} u_1 = \frac{\partial \phi}{\partial x}, & u_3 = \frac{\partial \phi}{\partial z}, \\ p' = -\frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2}. \end{cases} \quad (22)$$

假定微极弹性波(耦合纵波  $P_f$  或  $P_s$  和耦合横向微旋波)在微极流体饱和多孔半空间中传播, 在平面边界  $z = 0$  处形成入射角  $\theta_0$ . 从入射波可得: 反射波  $P_f, P_s$ . 在介质  $M$  中的两个耦合横向微旋波和在介质  $M'$  中的透射纵波. 完整的几何模型见图 1.

### 3 边界条件

边界条件是指在无黏性流体和微极流体饱和多孔半空间界面处, 亦即在  $z = 0$  处, 法向应力分量、液体压力、正交于边界面的速度分量的连续性、以及切向应力和偶应力为零. 于是边界条件可表示为:

$$(i) (\sigma_z)_1 + (\sigma)_1 = (-p)_{II}; \quad (23a)$$

$$(ii) (\sigma_{zx})_1 = 0; \quad (23b)$$

$$(iii) (m_{zy})_1 = 0; \quad (23c)$$

$$(iv) \frac{1}{\beta^*} (\sigma)_1 = (-p')_{II}; \quad (23d)$$

$$(v) (1 - \beta^*) (u_3)_1 + \beta^* (U_3)_1 = (u_3)_{II}, \text{ 在 } z = 0 \text{ 处}. \quad (23e)$$

满足边界条件(23)的势函数为:

(a) 对于微极流体饱和多孔固体半空间(介质  $M$ )

$$\begin{cases} q = A_1 \exp[i\delta_1(x \cos \theta_0 - z \sin \theta_0) - i\omega_1 t] + A_2 \exp[i\delta_2(x \cos \theta_0 - z \sin \theta_0) - i\omega_2 t] - B_1 \exp[i\delta_1(x \cos \theta_1 + z \sin \theta_1) - i\omega_1 t] + B_2 \exp[i\delta_2(x \cos \theta_2 + z \sin \theta_2) - i\omega_2 t], \\ \phi = \mu_1 A_1 \exp[i\delta_1(x \cos \theta_0 - z \sin \theta_0) - i\omega_1 t] + \mu_1 B_1 \exp[i\delta_1(x \cos \theta_1 + z \sin \theta_1) - i\omega_1 t] + \mu_2 A_2 \exp[i\delta_2(x \cos \theta_0 - z \sin \theta_0) - i\omega_2 t] + \mu_2 B_2 \exp[i\delta_2(x \cos \theta_2 + z \sin \theta_2) - i\omega_2 t], \\ H^* = A_4 \exp[i\delta_4(x \cos \theta_0 - z \sin \theta_0) - i\omega_4 t] + B_4 \exp[i\delta_4(x \cos \theta_4 + z \sin \theta_4) - i\omega_4 t] + B_3 \exp[i\delta_3(x \cos \theta_3 + z \sin \theta_3) - i\omega_3 t], \\ \phi_2 = \mu_4 A_4 \exp[i\delta_4(x \cos \theta_0 - z \sin \theta_0) - i\omega_4 t] + \mu_4 B_4 \exp[i\delta_4(x \cos \theta_4 + z \sin \theta_4) - i\omega_4 t] + \mu_3 B_3 \exp[i\delta_3(x \cos \theta_3 + z \sin \theta_3) - i\omega_3 t]. \end{cases} \quad (24)$$

(b) 对于液体半空间(介质  $M'$ )

$$\phi = A_1' \exp[i\delta_1'(x \cos \theta_1' - z \sin \theta_1') - i\omega_1' t], \quad (25)$$

其中

$A_2, A_4 = 0$  为入射波  $P_f, A_1, A_4 = 0$  为入射波  $P_s$ ,

$A_1, A_2 = 0$  为耦合横微旋入射波.

Snell 定律可表述如下:

$$\frac{\cos \theta_0}{V_0} = \frac{\cos \theta_1}{\lambda_1^{-1}} = \frac{\cos \theta_2}{\lambda_2^{-1}} = \frac{\cos \theta_3}{\lambda_3^{-1}} = \frac{\cos \theta_4}{\lambda_4^{-1}} = \frac{\cos \theta_1'}{\alpha_1}, \quad (26)$$

其中

$$\delta_1(\lambda_1^{-1}) = \delta_2(\lambda_2^{-1}) = \delta_3(\lambda_3^{-1}) = \delta_4(\lambda_4^{-1}) = \omega_1' = kc, \text{ 在 } z = 0 \text{ 处.} \quad (27)$$

$$V_0 = \begin{cases} \lambda_1^{-1}, & \text{对入射波 } P_f, \\ \lambda_2^{-1}, & \text{对入射波 } P_s, \\ \lambda_4^{-1}, & \text{对耦合的横向微旋入射波.} \end{cases}$$

根据方程(24)、方程(25)给出的势函数和 Snell 定律(26)式, 边界条件(23)式简化为下列含 5 个非齐次方程的系统

$$\sum_{j=1}^5 a_{ij} z_j = b_i, \quad i = 1, \dots, 5, \quad (28)$$

其中

$$\begin{aligned} a_{1i} &= [\lambda + Q + \mu(Q + R) + \sin^2 \theta (2\mu + K)] \delta_i^2, & i = 1, 2, \\ a_{1j} &= - (2\mu + K) \delta_j^2 \cos \theta_j \sin \theta, & j = 3, 4, \\ a_{15} &= - \rho \omega^2, & a_{2i} = (2\mu + K) \delta_i^2 \cos \theta_i \sin \theta, & i = 1, 2, \\ a_{2j} &= (\mu + K) \delta_j^2 \cos \theta_j \sin \theta - (2\mu + K) \delta_j^2 \cos^2 \theta_j + K \mu, & j = 3, 4, \\ a_{25} &= 0, & a_{31} = a_{32} = a_{43} = a_{44} = 0, \\ a_{3j} &= \mu \delta_j \sin \theta, & j = 3, 4, \\ a_{35} &= 0, & a_{4i} = \frac{(Q + R\mu)}{\beta^*} \delta_i^2, & i = 1, 2, \\ a_{45} &= - \rho \omega^2, & a_{5i} = \left\{ (1 - \beta^*) + \beta^* \mu \right\} \delta_i \sin \theta, & i = 1, 2, \\ a_{5j} &= - \left\{ (1 - \beta^*) - \beta^* \alpha_3 \right\} \delta_j \cos \theta_j, & j = 3, 4, \\ a_{55} &= \delta' \sin \theta_1, \end{aligned}$$

其中

$$\alpha_3 = \frac{\omega^2 \rho_{12} + i b \omega}{\omega^2 \rho_{22} - i b \omega}$$

和  $b_i (i = 1, 2, 3, 4, 5)$  表示为:

(i) 对入射波  $P_f$

$$b_1 = - a_{11}, \quad b_2 = a_{21}, \quad b_3 = a_{31}, \quad b_4 = - a_{41}, \quad b_5 = a_{51};$$

(ii) 对入射波  $P_s$

$$b_1 = - a_{12}, \quad b_2 = a_{22}, \quad b_3 = a_{32}, \quad b_4 = - a_{42}, \quad b_5 = a_{52};$$

(iii) 对耦合横向微旋入射波

$$b_1 = - a_{14}, \quad b_2 = - a_{24}, \quad b_3 = a_{34}, \quad b_4 = - a_{44}, \quad b_5 = a_{54}.$$

各种反射波的振幅比为

$$z_j = \frac{B_j}{A}, \quad j = 1, \dots, 5, \quad (29)$$

其中

$$A' = \begin{cases} A_1, & \text{对入射波 } P_f, \\ A_2, & \text{对入射波 } P_s, \\ A_4, & \text{对耦合的横向微旋入射波.} \end{cases}$$

$z_j (j = 1, 2, 3, 4)$  分别为如下波的振幅比: 角度为  $\theta_1$  的反射波  $P_t$ 、角度为  $\theta_2$  的反射波  $P_s$ 、角度为  $\theta_3$  和  $\theta_4$  的反射耦合横向微旋波.  $z_5$  为角度为  $\theta'$  的透射纵波( $P$  波).

## 4 特殊情况

1) 略去多孔性效应, 问题就简化为液-微极弹性固体界面问题, 即

$$\sum_{j=1}^4 a_{ij} z_j = b_i, \quad i = 1, \dots, 4, \quad (30)$$

其中

$$\begin{aligned} a_{11} &= [\lambda + (2\mu + K) \sin^2 \theta_2] \delta_2^2, \\ a_{1i} &= - (2\mu + K) \cos \theta_{i+1} \sin \theta_{i+1} \delta_{i+1}^2, \quad i = 2, 3, \\ a_{14} &= - \rho \delta_1^2 \omega_1^2, \quad a_{21} = (2\mu + K) \cos \theta_2 \sin \theta_2 \delta_2^2, \\ a_{2i} &= (\mu + K) \delta_{i+1}^2 \sin \theta_{i+1} \cos \theta_{i+1} - (2\mu + K) \delta_{i+1}^2 \cos \theta_{i+1}^2 + K \mu_{i+1}, \quad i = 2, 3, \\ a_{24} &= 0 = a_{34} = a_{31}, \\ a_{3i} &= \mu_{i+1} \delta_{i+1} \sin \theta_{i+1}, \quad i = 2, 3, \\ a_{41} &= - \delta_2 \sin \theta_2, \quad a_{4i} = \delta_{i+1} \cos \theta_{i+1}, \quad i = 2, 3, \\ a_{44} &= - \delta_1 \sin \theta_1, \end{aligned}$$

其中

$$\begin{aligned} \mu_{3,4} &= \frac{\delta_{3,4}^2 (\delta_{3,4}^2 - \omega^2 E_2 - pr_2)}{p(-r_0 + r_1 \omega^2)}, \quad \delta_{3,4}^2 = \omega^2 \lambda_{3,4}^2, \\ \lambda_{3,4}^2 &= \frac{[D - 1(D^2 - 4E)^{1/2}]}{2}, \\ D &= \frac{1}{C_2^*} + r_1 + \frac{(pr_2 - r_0)}{\omega^2}, \quad E = \frac{1}{C_2^*} \left[ r_1 - \frac{r_0}{\omega^2} \right], \quad C_2^* = \frac{\mu + K}{\rho}, \\ E_2 &= \frac{1}{C_2^*}, \quad \lambda_2^2 = \frac{\rho}{\lambda + 2\mu + K} \end{aligned}$$

其中  $b_i (i = 1, 2, 3, 4)$  表示为:

(i) 对入射纵向位移波

$$b_1 = -a_{11}, \quad b_2 = a_{21}, \quad b_3 = a_{31}, \quad b_4 = -a_{41};$$

(ii) 对入射耦合横向微旋波

$$b_1 = -a_{13}, \quad b_2 = -a_{23}, \quad b_3 = a_{33}, \quad b_4 = -a_{43}.$$

3 种入射波的振幅比为

$$z_i = \frac{B_i}{A_0}, \quad i = 1, 2, 3, 4, \quad (31)$$

其中

$$A_0 = \begin{cases} A_2, & \text{对入射纵向位移波,} \\ A_4, & \text{对入射耦合的横向微旋波.} \end{cases}$$

而  $z_j (j = 1, 2, 3, 4)$  分别是角度为  $\theta_2$  的反射纵位移波、角度为  $\theta_3$  和  $\theta_4$  的反射耦合横向微旋波和角度为  $\theta_1$  的折射纵波的振幅比.

2) 略去微极性效应, 问题简化为液体半空间和流体饱和多孔半空间界面处的 4 个非奇次方程.

$$\sum_{j=1}^4 a_{ij} z_j = b_i, \quad i = 1, 2, 3, 4, \quad (32)$$

其中

$$\begin{aligned}
 a_{1i} &= [(\lambda + Q) + 2\mu \sin^2 \theta_i + (Q + R)\mu_i] \delta_i^2, & i = 1, 2, \\
 a_{13} &= -2\mu \delta_4^2 \cos \theta_4 \sin \theta_1, & a_{14} = -\rho \omega^2, \\
 a_{2i} &= 2\mu \delta_i^2 \cos \theta_i \sin \theta, & i = 1, 2, \\
 a_{23} &= (\mu \cos \theta_4 \sin \theta_4 - 2\mu \cos^2 \theta_4) \delta_4^2, & a_{24} = 0, \\
 a_{3i} &= \frac{(Q + \mu_i R) \delta_i^2}{\beta^*}, & i = 1, 2, \\
 a_{33} &= 0, & a_{34} = -\rho \omega^2, & a_{4i} = ((1 - \beta^*) + \beta^* \mu_i) \delta_i \sin \theta_1, & i = 1, 2, \\
 a_{43} &= -((1 - \beta^*) \beta^* \alpha_3) \delta_4 \cos \theta_4, & a_{44} = -\delta_4 \sin \theta_1,
 \end{aligned}$$

其中

$$\begin{aligned}
 \delta_{1,2}^2 &= \omega^2 \lambda_{1,2}^2, & \lambda_{3,4}^2 &= \frac{B \sqrt{(B^2 - 4AC)^{1/2}}}{2A}, & \delta_4^2 &= \omega^2 \lambda_4^2, & \lambda_4^2 &= \frac{C}{\mu(\rho_{22} + ib/\omega)}, \\
 A &= PR - Q^2, & P &= \lambda + 2\mu, & B &= P \left[ \rho_{22} + \frac{ib}{\omega} \right] + R \left[ \rho_{11} + \frac{ib}{\omega} \right] - 2Q \left[ \rho_{12} - \frac{ib}{\omega} \right], \\
 \mu_{1,2} &= \frac{1}{B} \left[ -A \lambda_{1,2}^2 + (\rho_{11} R - \rho_{12} Q) + \frac{ib}{\omega} (R + Q) \right],
 \end{aligned}$$

而  $b_i (i = 1, 2, 3, 4)$  表示为:

(i) 对入射波  $P_f$

$$b_1 = -a_{11}, \quad b_2 = a_{21}, \quad b_3 = -a_{31}, \quad b_4 = a_{41};$$

(ii) 对入射波  $P_s$

$$b_1 = -a_{12}, \quad b_2 = a_{22}, \quad b_3 = -a_{32}, \quad b_4 = a_{42};$$

(iii) 对入射波  $S_v$

$$b_1 = a_{13}, \quad b_2 = -a_{23}, \quad b_3 = a_{33}, \quad b_4 = -a_{43}.$$

各种反射波的振幅比为

$$z_i = \frac{B_i}{A^*}, \quad i = 1, 2, 3, 4, \quad (33)$$

其中

$$A^* = \begin{cases} A_1, & \text{对入射波 } P_f, \\ A_2, & \text{对入射波 } P_s, \\ A_4, & \text{对入射波 } S_v. \end{cases}$$

而  $z_j (j = 1, 2, 3, 4)$  则分别为角度为  $\theta_1$  的反射纵波  $P_f$ 、角度为  $\theta_2$  的反射纵波  $P_s$ 、角度为  $\theta_4$  的反射  $S_v$  波和角度为  $\theta$  的折射波的振幅比。

## 5 数值结果和讨论

根据 Gauthier<sup>[10]</sup> 的理论, 取下列常量作为微极常数:

$$\begin{aligned}
 \rho &= 2.19 \times 10^3 \text{ kg/m}^3, & \gamma &= 0.268 \times 10^6 \text{ N}, & j &= 0.2 \times 10^{-19} \text{ m}^2, \\
 K &= 0.149 \times 10^{10} \text{ N/m}^2, & \omega^2 / \omega_0^2 &= 10.
 \end{aligned}$$

根据 Yew 和 Jogi<sup>[22]</sup> 及 Fatt<sup>[23]</sup> 的理论, 取以下值为煤油渗透砂岩的相关参数:

$$\begin{aligned}
 \rho_1 &= 2.1372 \times 10^3 \text{ kg/m}^3, & \rho_{11} &= 1.926137 \times 10^3 \text{ kg/m}^3, \\
 Q &= 0.07635 \times 10^{12} \text{ N/m}^3, & \rho_{12} &= -0.002137 \times 10^3 \text{ kg/m}^3, \\
 \rho_{22} &= 0.215337 \times 10^3 \text{ kg/m}^3, & R &= 0.0326 \times 10^{12} \text{ N/m}^3, \\
 \lambda &= 0.4339 \times 10^{10} \text{ N/m}^2, & \mu &= 0.2765 \times 10^{10} \text{ N/m}^2, & f &= b/(\rho_1 \omega) = 0.712547.
 \end{aligned}$$

液体半空间的参数取:

$$\rho' = 1 \times 10^3 \text{ kg/m}^3, \lambda' = 1.45 \times 10^{10} \text{ N/m}^2,$$

由上述相关参数值,按 Gauss 消元法对方程组(28)求解,得到煤油渗透砂岩中入射波  $P_f$ (快  $P$ -波)、波  $P_s$ (慢  $P$ -波)和入射角从切向变化到法向的耦合横向微旋波的出射角对应的振幅比  $|z_i|$  ( $i = 1, 2, 3, 4, 5$ ). 并通过图表示出计算结果. 设出射角为  $\theta_0$ ,则入射波  $P_f$ 的出射角与振幅比的关系见图 2 至图 6;入射波  $P_s$ 的出射角与振幅比的关系见图 7 至图 11;入射耦合横向微旋波的出射角与振幅比的关系见图 12 至图 16,图中实线、长虚线、短虚线分别表示介质的情况,MEP 为微极流体饱和多孔介质时的振幅比  $|z_i|$  ( $i = 1, 2, 3, 4, 5$ )、MP 为微极弹性介质时的振幅比  $|z_i|$  ( $i = 1, 2, 3, 4$ )、EP 为弹性多孔介质时的振幅比  $|z_i|$  ( $i = 1, 2, 3, 4$ ).

以下分 3 种情况讨论:

1) 入射波  $P_f$

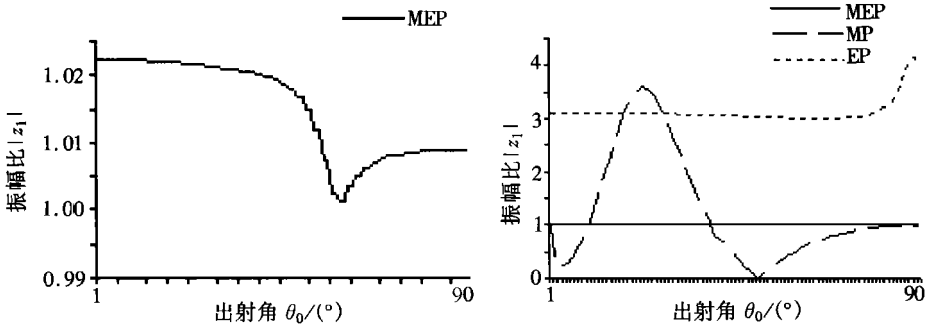


图 2 入射波为快 P 波时的振幅比

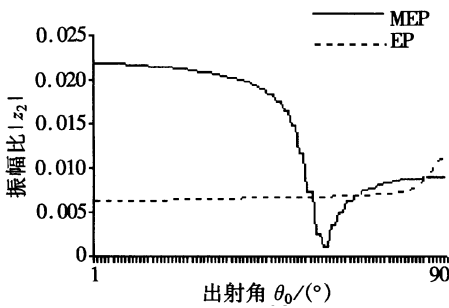


图 3 入射波为快 P 波时的振幅比

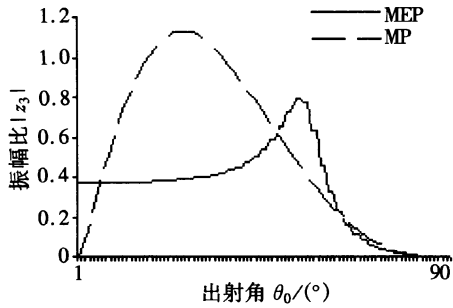


图 4 入射波为快 P 波时的振幅比

图 2 表明在  $0^\circ \leq \theta_0 \leq 14^\circ$  和  $34^\circ \leq \theta_0 \leq 90^\circ$  之间 MEP 的振幅比  $|z_1|$  比 MP 的振幅比  $|z_1|$  大;在  $15^\circ \leq \theta_0 \leq 33^\circ$  之间 MEP 的振幅比  $|z_1|$  比 MP 的振幅比  $|z_1|$  小;在  $0^\circ \leq \theta_0 \leq 90^\circ$  之间 MEP 的振幅比  $|z_1|$  比 EP 的振幅比  $|z_1|$  小.

图 3 表明在  $0^\circ \leq \theta_0 \leq 56^\circ$  和  $67^\circ \leq \theta_0 \leq 88^\circ$  之间 MEP 的振幅比  $|z_2|$  比 EP 的振幅比  $|z_2|$  大;在  $57^\circ \leq \theta_0 \leq 66^\circ$  和  $86^\circ \leq \theta_0 \leq 90^\circ$  之间 MEP 的振幅比  $|z_2|$  比 EP 的振幅比  $|z_2|$  小.

图 4 表明在  $0^\circ \leq \theta_0 \leq 6^\circ$  和  $49^\circ \leq \theta_0 \leq 64^\circ$  之间 MEP 的耦合横微旋反射波的振幅比  $|z_3|$  比 MP 的振幅比  $|z_2|$  大;在  $7^\circ \leq \theta_0 \leq 48^\circ$  和  $65^\circ \leq \theta_0 \leq 86^\circ$  之间 MEP 的振幅比  $|z_3|$  比 MP 的振幅比  $|z_2|$  小.

图 5 表明在  $0^\circ \leq \theta_0 \leq 90^\circ$  之间 MEP 的振幅比  $|z_4|$  比 MP 的振幅比  $|z_3|$  小;在  $0^\circ \leq \theta_0 \leq 51^\circ$  和  $69^\circ \leq \theta_0 \leq 90^\circ$  之间 MEP 的振幅比  $|z_4|$  比 EP 的振幅比  $|z_3|$  小;在  $51^\circ \leq \theta_0 \leq 68^\circ$  之间 MEP 的振幅比  $|z_4|$  比 EP 的振幅比  $|z_3|$  大.



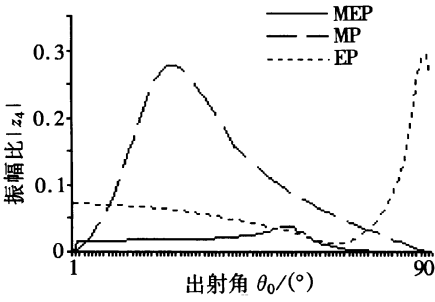


图 5 入射波为快 P-波时的振幅比

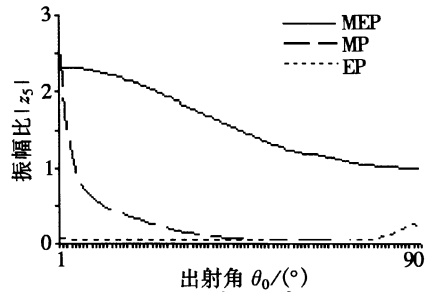


图 6 入射波为快 P-波时的振幅比

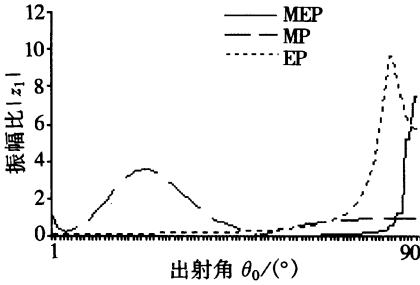


图 7 入射波为慢 P-波时的振幅比

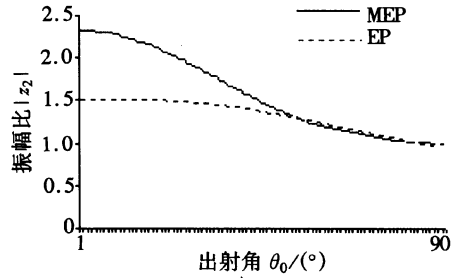


图 8 入射波为慢 P-波时的振幅比

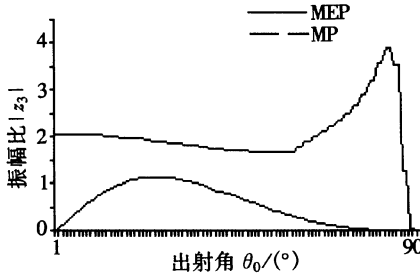


图 9 入射波为慢 P-波时的振幅比

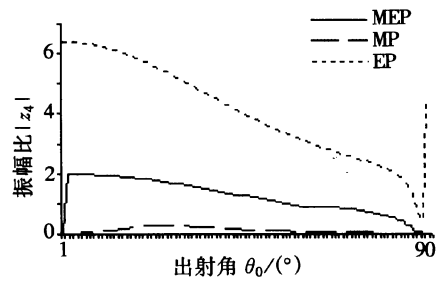


图 10 入射波为慢 P-波时的振幅比

图6表明在整个角度范围内MEP的振幅比 $|z_5|$ 单调递减,并大于MP的振幅比 $|z_4|$ ;在 $0^\circ \leq \theta_0 \leq 90^\circ$ 之间EP的振幅比 $|z_4|$ 比MEP的振幅比 $|z_5|$ 小.

注 MP中的振幅比 $|z_3|$ 的值被乘以 $10^{-1}$ .

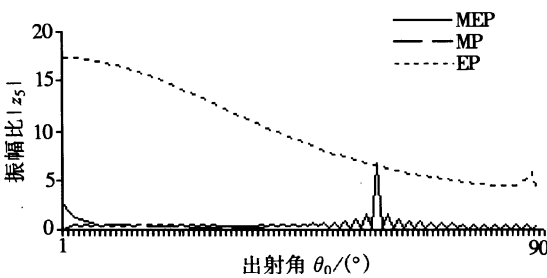


图 11 入射波为慢 P-波时的振幅比

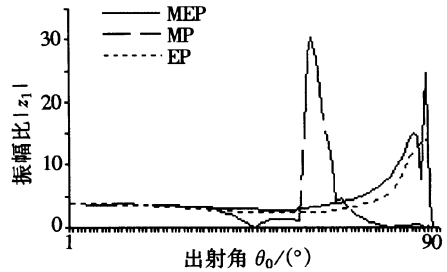


图 12 入射波为耦合波时的振幅比

2) 入射波  $P_s$

图 7表明MEP、MP和EP的振幅比 $|z_1|$ . MEP的振幅比 $|z_1|$ 比MP的振幅比 $|z_1|$ 小;在 $0^\circ \leq \theta_0 \leq 82^\circ$ 之间MEP的振幅比 $|z_1|$ 比EP的振幅比 $|z_1|$ 小;但在 $83^\circ \leq \theta_0 \leq 90^\circ$ 之间

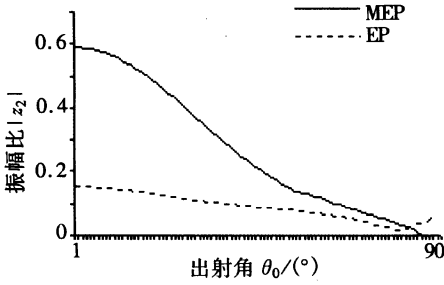


图 13 入射波为耦合横向波时的振幅比

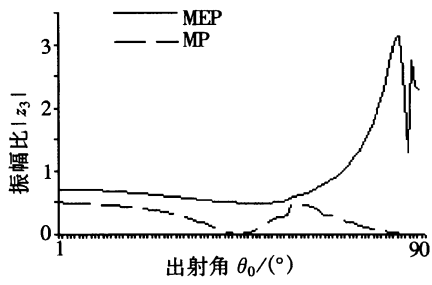


图 14 入射波为耦合横向波时的振幅比

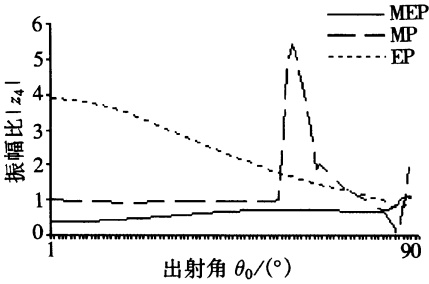


图 15 入射波为耦合横向波时的振幅比

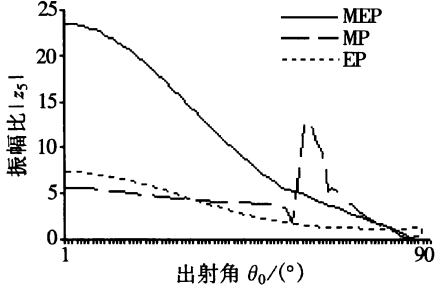


图 16 入射波为耦合横向波时的振幅比

MEP 的振幅比  $|z_1|$  比 EP 的振幅比  $|z_1|$  大.

图 8 表明在  $0^\circ \leq \theta_0 \leq 41^\circ$  之间 MP 的振幅比  $|z_1|$  比 EP 的振幅比  $|z_1|$  大; 在  $48^\circ \leq \theta_0 \leq 90^\circ$  之间 MP 的振幅比  $|z_1|$  比 EP 的振幅比  $|z_1|$  小; 在  $0^\circ \leq \theta_0 \leq 54^\circ$  之间 MEP 的振幅比  $|z_2|$  比 EP 的振幅比  $|z_2|$  大; 在  $55^\circ \leq \theta_0 \leq 90^\circ$  之间 MEP 的振幅比  $|z_2|$  比 EP 的振幅比  $|z_2|$  小.

图 9 表明在  $0^\circ \leq \theta_0 \leq 90^\circ$  之间 MEP 的振幅比  $|z_3|$  比 MP 的振幅比  $|z_2|$  大.

图 10 表明在  $0^\circ \leq \theta_0 \leq 90^\circ$  之间, MEP 的振幅比  $|z_4|$  比 EP 的振幅比  $|z_3|$  小但比 MP 的振幅比  $|z_3|$  大.

图 11 表明在  $0^\circ \leq \theta_0 \leq 90^\circ$  之间 MEP 的振幅比  $|z_5|$ 、MP 和 EP 的振幅比  $|z_4|$  的变化情况.

注 MEP 中的振幅比  $|z_1|$  和  $|z_5|$  的值被分别乘以  $10^{-4}$  和  $10^{-2}$ .

### 3) 耦合横向微旋入射波

图 12 表明在  $0^\circ \leq \theta_0 \leq 57^\circ$  和  $68^\circ \leq \theta_0 \leq 90^\circ$  之间 MEP 的振幅比  $|z_1|$  比 MP、EP 的振幅比  $|z_1|$  大; 在  $57^\circ \leq \theta_0 \leq 67^\circ$  之间 MEP 的振幅比  $|z_1|$  比 MP 的振幅比  $|z_1|$  小.

图 13、图 14 表明 MEP 的振幅比  $|z_2|$  和  $|z_3|$  比对应的 MP、EP 的振幅比大.

图 15 表明在  $0^\circ \leq \theta_0 \leq 83^\circ$  之间 MEP 的振幅比  $|z_4|$  比 MP 的振幅比  $|z_4|$  小; 在  $0^\circ \leq \theta_0 \leq 85^\circ$  之间 MEP 的振幅比  $|z_4|$  比 EP 的振幅比  $|z_4|$  小; 在  $0^\circ \leq \theta_0 \leq 57^\circ$  和  $77^\circ \leq \theta_0 \leq 90^\circ$  之间 MP 的振幅比  $|z_3|$  比 EP 的振幅比小, 但在  $58^\circ \leq \theta_0 \leq 76^\circ$  之间比 EP 的振幅比大.

图 16 表明在  $0^\circ \leq \theta_0 \leq 56^\circ$  和  $83^\circ \leq \theta_0 \leq 90^\circ$  之间 MEP 的振幅比  $|z_5|$  比 EP 的振幅比  $|z_4|$  大; 在  $57^\circ \leq \theta_0 \leq 82^\circ$  之间 MEP 的振幅比  $|z_5|$  比 EP 的振幅比  $|z_4|$  小; 在  $0^\circ \leq \theta_0 \leq 32^\circ$  和  $81^\circ \leq \theta_0 \leq 90^\circ$  之间 EP 的振幅比  $|z_4|$  比 MP 的振幅比  $|z_4|$  大; 在  $33^\circ \leq \theta_0 \leq 80^\circ$  之间 EP 的振幅比  $|z_4|$  比 MP 的振幅比  $|z_4|$  小.

注 MEP 中的振幅比  $|z_1|$  的值被乘以  $10^{-1}$ .

## 6 结 论

本文运用 Eringen<sup>[9]</sup> 和 Konczak<sup>[15-16]</sup> 建立的微极流体饱和和多孔固体理论, 推导出各种波的反射和折射系数的解析公式, 并通过图示进行了说明. 然后对一些特例进行了推导. 从图 2 至图 16 可得结论: 微极性和多孔性对不同反射和透射波的振幅比有重要影响, 该问题的理论化将可能有助于工程学、地震学和地球物理学的研究.

### [参 考 文 献]

- [1] Biot M A. General solutions of the equations of elasticity and consolidation for a porous material[J]. J Appl Mech, 1956, **23**: 91-96.
- [2] Biot M A. Theory of propagation of elastic waves in a fluid-saturated porous solid I. Low-frequency range, II. Higher frequency range[J]. J Acoust Soc Am, 1956, **28**: 168-191.
- [3] Biot M A. Mechanics of deformation and acoustic propagation in porous media[J]. J Appl Phys, 1962, **33**: 1482-1498.
- [4] Deresiewicz H. The effect of boundaries on wave propagation in a liquid-filled porous solid-I: Reflection of plane waves at a free plane boundary(non-dissipative case)[J]. Bull Seism Soc Am, 1960, **50**: 599-607.
- [5] Deresiewicz H, Rice J T. The effect of boundaries on wave propagation in a liquid-filled porous solid - III: Reflection of plane waves at a free plane boundary( general case)[J]. Bull Seism Soc Am, 1962, **52**: 595-625.
- [6] Eringen A C, Suhubi E S. Non-linear theory of simple microelastic solids I [J]. Int J Engg Sci, 1964, **2**: 189-203.
- [7] Suhubi E S, Eringen A C. Non-linear theory of simple microelastic solids II [J]. Int J Engg Sci, 1964, **2**: 389-404.
- [8] Eringen A C. Mechanics of micromorphic materials[A]. In: Proc 11th Int Congress Appl Mech [C]. Gortler H, Ed New York: Springer-Verlag, 1964.
- [9] Eringen A C. Linear theory of micropolar elasticity[J]. J Math Mech, 1966, **15**: 909-923.
- [10] Gauthier R D. Mechanics of Micropolar Media [M]. Brulin O, Hsieh R K T, Eds. Singapore: World Scientific, 1982.
- [11] Yang, Lakes, Biomech J. Experimental study of micropolar and couple stress elasticity in bone in bending[J]. J Biomchanics, 1982, **15**: 91-98.
- [12] Parfitt V R, Eringen A C. Reflection of plane waves from the flat boundary of a micropolar elastic half-space[J]. J Acoust Soc Am, 1969, **45**(5): 1258-1272.
- [13] Tomar S K, Gogna M L. Reflection and refraction of coupled transverse and microrotational waves at an interface between two different micropolar elastic media in welded contact[J]. Int J Engg Sci, 1995, **33**(4): 485-496.
- [14] Tomar S K, Kumar R. Reflection and refraction of longitudinal displacement wave at a liquid micropolar solid interface[J]. Int J Engg Sci, 1995, **33**(10): 1507-1515.
- [15] Konczak Z. Thermo-mechanical effects in fluid-saturated porous media with a micropolar viscoelastic skeleton[J]. ZAMM Z angew, Math Mech, 1986, **66**(4): 152-154.
- [16] Konczak Z. On wave propagation in fluid-saturated porous media with a micropolar viscoelastic skeleton[J]. ZAMM Z angew Math Mech, 1987, **67**(1): 201-203.
- [17] Kumar R, Singh B. Reflection and refraction of micropolar elastic waves at an interface between porous elastic solid and micropolar elastic solid[J]. Proc Nat Acad Sci India, 2000, **70**(A) (4): 397-410.

- [18] Kumar R, Deswal S. Wave propagation in micropolar liquid-saturated porous solid[J]. Indian J Pure and Appl Math, 2000, **31**(10): 1317-1337.
- [19] Kumar R, Deswal S. Surface wave propagation in a micropolar liquid-saturated porous solid lying under a uniform layer of liquid[J]. Bult of Calcutta Mathematical Society, Calcutta, 2000, **92**: 99-110.
- [20] Kumar R, Tomar S K. Reflection and transmission of elastic waves at viscous liquid/ micropolar elastic solid interface[J]. Int J Math and Math Sci, 2001, **26**(11): 685-694.
- [21] Eringen A C. Theory of Micropolar Elasticity in Fracture [M]. Chapter 7 of Fracture, Vol II. Liebowitz H, Ed. New York: Academic Press, 1968.
- [22] Yew C H, Jogi P N. Study of wave motions in fluid saturated porous rocks[J]. J Acoust Soc Am, 1976, **60**: 2-8.
- [23] Fatt I. The Biot-Willis elastic Co-efficients for a Sandstone[J]. J Appl Mech, 1959, **26**: 296-297.

## Wave Propagation in a Liquid-Saturated Porous Solid With Micropolar Elastic Skeleton at Boundary Surface

Rajneesh Kumar, Mahabir Barak

(Department of Mathematics, Kurukshetra University, Kurukshetra-136 119, India)

**Abstract:** The reflection and transmission of plane waves at an interface between homogenous inviscid liquid half space and a micropolar liquid-saturated porous solid half space are studied. The reflection and transmission coefficients of various reflected and transmitted waves with the angle of incident were obtained. Numerical calculation were performed for amplitude ratios of variously reflected and transmitted waves. Micropolarity and porosity effects on the reflection and transmission coefficients were depicted graphically. Some particular cases were deduced from the present formulation.

**Key words:** micropolar liquid-saturated porous solid; reflection; transmission; amplitude ratios; micropolarity and porosity effects