应用数学和力学, 第 28 卷 第 3 期
2007 年 3 月 15 日出版

Applied Mathematics and Mechanics
Vol. 28, No. 3, Mar. 15, 2007

文章编号: 1000-0887(2007) 03-0328-07

具有扩散影响的 Hopfield 型神经网络的全局渐近稳定性*

颜向平[1], 李万同[2]

(1. 兰州交通大学 数学系, 兰州 730070;
2. 兰州大学 数学与统计学院, 兰州 730000)

(李继彬推荐)

摘要: 对具有扩散影响的 Hopfield 型神经网络平衡点的存在唯一性和全局渐近稳定性进行了研究. 在激活函数单调非减、可微且关联矩阵和 Liapunov 对角稳定矩阵有关时, 利用拓扑度理论得到了系统平衡点存在的充分条件. 通过构造适当的平均 Liapunov 函数, 分析了系统平衡点的全局渐近稳定性. 所得结论表明系统的平衡点(如果存在) 是全局渐近稳定的而且也蕴含着系统的平衡点的唯一性.

关 键 词: 扩散; Hopfield 型神经网络; 平衡点; 全局渐近稳定性
中图分类号: O175 文献标识码: A

引 言

自 Hopfield[1-2] 提出简化神经网络模型后 30 多年来, 人们对研究神经网络动力学一直有着非常浓厚的兴趣. 在众多的动力学现象中, 稳定性属性在神经网络的设计和应用中有着重要的作用. 因此, 研究神经网络的稳定性属性便成为一门重要的数学课题. 作为特殊的神经网络, Hopfield 型神经网络已被广泛用于模式识别、自动控制等众多领域, 而且已被许多学者进行了广泛研究[1-7]. 但人们考虑神经网络的动力学渐近行为时, 都是仅从时间方向关注动态的变化, 而很少考虑空间位置对它的影响. 然而, 严格地说来, 当电子在非均匀的电磁场中运行时, 扩散现象是不可避免的也是不能忽视的. 文献[8] 至文献[10] 曾提出和研究了用偏微分方程描述的具有扩散的神经网络的稳定性.

近来, 廖晓昕等人[11] 研究了一类包含许多生态系统和神经网络系统的具有扩散影响的广义神经网络正平衡点的稳定性. 在正平衡点存在的假设下, 他们通过构造平均 Liapunov 函数的方法得到了该平衡点稳定的充分条件. 然而, 当文献[11] 的广义神经网络考虑成具有过原点的 S-激活函数和没有外部输入的 Hopfield 型神经网络时, 在某些稳定性条件(如, 文献[11]

* 收稿日期: 2006-09-18; 修订日期: 2006-12-31
基金项目: 国家自然科学基金资助项目(10571078); 甘肃省自然科学基金资助项目(3ZX062-B25-012)
作者简介: 颜向平(1972—), 男, 甘肃人, 讲师(联系人. Tel: + 86-931-3131238; E-mail: yanxp@mail.lzjtu.cn);
李万同(1964—), 男, 甘肃人, 教授, 博士, 博士生导师(Tel: + 86-931-8912481; E-mail: wtli@lzu.edu.cn).

中定理1 的条件)下仅有一个零平衡点而不存在正平衡点, 参看第2 节的定理1. 因此, 有必要考虑其它平衡点的存在性和稳定性.

本文的主要目的是研究具有扩散的Hopfield 型神经网络平衡点的存在唯一性和全局渐近稳定性. 利用拓扑度理论得到了具有扩散影响的Hopfield 型神经网络平衡点的存在性定理. 另外, 通过构造不同于文献[11]的平均Liapunov 函数, 我们发现系统的平衡点(如果存在)是全局渐近稳定的而且这一事实也蕴含着系统平衡点的唯一性.

具有扩散影响的Hopfield 型神经网络可用如下的偏微分方程描述:

$$\frac{\partial u_i}{\partial t} = \sum_{k=1}^{m} \frac{\partial}{\partial x_k}\left(D_{ik}\frac{\partial u_i}{\partial x_k}\right) - d_i e_i(u_i) + \sum_{j=1}^{n} a_{ij} f_j(u_j) + J_i, \qquad i = 1, 2, \cdots, n, \tag{1}$$

其中 u_i 表示第i 个神经元的状态, $t \in I = [t_0, +\infty)$, $\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, \cdots, x_m)^{\mathrm{T}} \in \Omega \subset R^m$, Ω 有界, $\partial\Omega$ 适当光滑且 $\mathrm{mes}\,\Omega > 0$. $D_{ik} = D_{ik}(t, \boldsymbol{x}, \boldsymbol{u}) \geqslant 0$ 足够光滑, $i = 1, 2, \cdots, n$; $k = 1, 2, \cdots, m$. 正整数 n 表示网络中神经元的个数, 常数 $d_i > 0$, $i = 1, 2, \cdots, n$. 此外 u_i 满足下面的Neumann 边界条件

$$\frac{\partial u_i}{\partial n} :\triangleq \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_1}, \frac{\partial u_i}{\partial x_2}, \cdots, \frac{\partial u_i}{\partial x_m}\right)^{\mathrm{T}} = \mathbf{0}, \qquad t \in I, \boldsymbol{x} \in \partial\Omega.$$

记 $\boldsymbol{D} = \mathrm{diag}(d_1, d_2, \cdots, d_n)$, $\boldsymbol{e}(\boldsymbol{u}) = (e_1(u_1), e_2(u_2), \cdots, e_n(u_n))^{\mathrm{T}}$ 满足 $\boldsymbol{e}(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$. 矩阵 $\boldsymbol{A} = (a_{ij})_{n\times n}$ 表示关联矩阵, 向量函数 $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{u}) = (f_1(u_1), f_2(u_2), \cdots, f_n(u_n))^{\mathrm{T}}$ 表示激活函数, $\boldsymbol{J} = (J_1, J_2, \cdots, J_n)^{\mathrm{T}}$ 为常数输入向量.

对函数 $\boldsymbol{e}(\boldsymbol{u})$ 和激活函数 $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{u})$, 我们给出下面的假设:

(i) 对每个 $i \in \{1, 2, \cdots, n\}$, 函数 $e_i: \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ 满足: 对任意 $\xi, \eta \in \mathbf{R}$, 有

$$(\xi - \eta)^2 \leqslant (\xi - \eta)(e_i(\xi) - e_i(\eta)),$$

即对每个 $i \in \{1, 2, \cdots, n\}$, 函数 $e_i: \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ 单调不减.

(ii) 对每个 $i \in \{1, 2, \cdots, n\}$, 函数 $f_i: \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ 单调不减且可微, 即 $f_i' \geqslant 0$. 此外, 还存在常数 C_i, $0 < C_i < +\infty$, 使得函数 f_i 的增量比满足

$$0 \leqslant \frac{f_i(\xi) - f_i(\eta)}{\xi - \eta} \leqslant C_i, \qquad \xi, \eta \in \mathbf{R}; \xi \neq \eta; i = 1, 2, \cdots, n.$$

1　平衡点的存在性

平衡点的存在性, 对于神经网络的应用十分重要, 也是神经网络稳定性分析的前提. 本节将讨论神经网络系统(1)平衡点的存在性.

定义1　$\boldsymbol{u} = \boldsymbol{u}^* \in R^n$ 称为系统(1)的一个平衡点, 如果常数向量 $\boldsymbol{u}^* = (u_1^*, u_2^*, \cdots, u_n^*)^{\mathrm{T}}$ 满足代数方程 $-\boldsymbol{De}(\boldsymbol{u}^*) + \boldsymbol{Af}(\boldsymbol{u}^*) + \boldsymbol{J} = \mathbf{0}$.

定义2　实方阵 $\boldsymbol{A}$ 称为是Liapunov 对角稳定的(LDS)(或者Liapunov 对角半稳定的(LDSS)), 如果存在一个正的对角矩阵 $\boldsymbol{P}$ 使得 $\boldsymbol{PA}$ 的对称部分 $[\boldsymbol{PA}]^{\mathrm{S}} = (\boldsymbol{PA} + \boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P})/2$ 是正定(或者半正定)的.

定理1　如果函数 $\boldsymbol{e}(\boldsymbol{u})$ 和激活函数 $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{u})$ 分别满足假设(i)和假设(ii), 且 $\boldsymbol{M} = \boldsymbol{DC}^{-1} - \boldsymbol{A} \in \mathrm{LDS}$, 其中 $\boldsymbol{C} = \mathrm{diag}(C_1, C_2, \cdots, C_n)$, 则对任何输入 $\boldsymbol{J} \in R^n$, 方程 $-\boldsymbol{De}(\boldsymbol{u}) + \boldsymbol{Af}(\boldsymbol{u}) + \boldsymbol{J} = \mathbf{0}$ 至少有一个解, 即系统(1)至少存在一个平衡点.

证明　对任意的 $\boldsymbol{u} \in R^n$, 令 $\boldsymbol{H}(\boldsymbol{u}) = \boldsymbol{De}(\boldsymbol{u}) - \boldsymbol{Af}(\boldsymbol{u}) - \boldsymbol{J}$, 则 $\boldsymbol{u}^* \in R^n$ 是系统(1)的平衡点当且仅当 $\boldsymbol{H}(\boldsymbol{u}^*) = \mathbf{0}$. 我们可以把 $\boldsymbol{H}(\boldsymbol{u})$ 改写为形式 $\boldsymbol{H}(\boldsymbol{u}) = \boldsymbol{De}(\boldsymbol{u}) - \boldsymbol{AF}(\boldsymbol{u}) + \boldsymbol{V}$,

其中$\boldsymbol{F}(\boldsymbol{u})=(F_1(u_1),F_2(u_2),\cdots,F_n(u_n))^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{f}(\boldsymbol{u})-\boldsymbol{f}(\boldsymbol{0})$满足$\boldsymbol{F}(\boldsymbol{0})=\boldsymbol{0}$, 向量$\boldsymbol{V}=-\boldsymbol{A}\boldsymbol{f}(\boldsymbol{0})-\boldsymbol{J}\in R^n$.

对某个$r>0$, 构造非空的有界子集$\Omega_r=\left\{\boldsymbol{u}\in R^n:\ \|\boldsymbol{u}\|<r\right\}\supset\left\{\boldsymbol{0}\right\}$且同伦$\boldsymbol{h}(\boldsymbol{u};\lambda)=(h_1(\boldsymbol{u};\lambda),h_2(\boldsymbol{u};\lambda),\cdots,h_n(\boldsymbol{u};\lambda))^{\mathrm{T}}\in R^n$定义为$\boldsymbol{h}(\boldsymbol{u};\lambda)=\lambda\boldsymbol{u}+(1-\lambda)\boldsymbol{H}(\boldsymbol{u})$, $\boldsymbol{u}\in\overline{\Omega_r}$, $\lambda\in[0,1]$, 其中$\overline{\Omega_r}=\left\{\boldsymbol{u}\in R^n:\ \|\boldsymbol{u}\|\leqslant r\right\}$.

因$\boldsymbol{M}\in$ LDS, 所以由定义2知存在正的对角阵$\boldsymbol{P}=\mathrm{diag}(p_1,p_2,\cdots,p_n)$, 使得$[\boldsymbol{PM}]^{\mathrm{S}}$是正定的. 因此$[\boldsymbol{PM}]^{\mathrm{S}}$的特征值都大于零, 用$c=\lambda_{\min}([\boldsymbol{PM}]^{\mathrm{S}})$表示$[\boldsymbol{PM}]^{\mathrm{S}}$的最小特征值, 则$c>0$. 根据$c$的定义, 取常数$k\geqslant0$满足$k\geqslant(\|\boldsymbol{D}^{-1}\boldsymbol{A}\|_2^2)/c$, 其中$\|\boldsymbol{D}^{-1}\boldsymbol{A}\|_2^2=\lambda_{\max}((\boldsymbol{D}^{-1}\boldsymbol{A})^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{D}^{-1}\boldsymbol{A}))$为$(\boldsymbol{D}^{-1}\boldsymbol{A})^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{D}^{-1}\boldsymbol{A})$的最大特征值.

定义向量函数

$$\begin{aligned}\Psi(\boldsymbol{u})&=\boldsymbol{D}^{-1}\boldsymbol{u}+k\boldsymbol{PF}(\boldsymbol{u})=\\&\left(\frac{u_1}{d_1}+kp_1F_1(u_1),\frac{u_2}{d_2}+kp_2F_2(u_2),\cdots,\frac{u_n}{d_n}+kp_nF_n(u_n)\right)^{\mathrm{T}}.\end{aligned}$$

注意到对任意的$\boldsymbol{u}=(u_1,u_2,\cdots,u_n)^{\mathrm{T}}$, $\boldsymbol{v}=(v_1,v_2,\cdots,v_n)^{\mathrm{T}}\in R^n$和$a>0$,

$$\begin{aligned}2\boldsymbol{u}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{v}&=2\sum_{i=1}^n u_iv_i=\sum_{i=1}^n 2(\sqrt{a}u_i)\frac{v_i}{\sqrt{a}}\leqslant\\&\sum_{i=1}^n\left(au_i^2+\frac{v_i^2}{a}\right)=a\|\boldsymbol{u}\|^2+\frac{\|\boldsymbol{v}\|^2}{a},\end{aligned}$$

即$2\boldsymbol{u}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{v}\leqslant a\|\boldsymbol{u}\|^2+(\|\boldsymbol{v}\|^2)/a$. 由假设(i)容易知道对任意的$u_i\in\mathbf{R}$, $u_i\neq0$, 有$|e_i(u_i)|\geqslant|u_i|$且由假设(ii)知$0\leqslant(F_i(u_i))/u_i=(f_i(u_i)-f_i(0))/u_i\leqslant C_i$, 所以$|F_i(u_i)|/C_i\leqslant|u_i|\leqslant|e_i(u_i)|$, 从而由$e_i$和$f_i$的单调性可知$F_i^2(u_i)/C_i\leqslant e_i(u_i)F_i(u_i)$, 于是$\sum_{i=1}^n p_id_ie_i(u_i)F_i(u_i)\geqslant\sum_{i=1}^n(p_id_iF_i^2(u_i))/C_i$, 即$\boldsymbol{F}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{u})\boldsymbol{PDe}(\boldsymbol{u})\geqslant\boldsymbol{F}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{u})\boldsymbol{PDC}^{-1}\boldsymbol{F}(\boldsymbol{u})$. 因此,

$$\begin{aligned}&\Psi^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{u})(\boldsymbol{De}(\boldsymbol{u})-\boldsymbol{AF}(\boldsymbol{u}))=\\&\quad(\boldsymbol{D}^{-1}\boldsymbol{u}+k\boldsymbol{PF}(\boldsymbol{u}))^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{De}(\boldsymbol{u})-\boldsymbol{AF}(\boldsymbol{u}))=\\&\quad\boldsymbol{u}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{e}(\boldsymbol{u})-\boldsymbol{u}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{D}^{-1}\boldsymbol{A})\boldsymbol{F}(\boldsymbol{u})+k\boldsymbol{F}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{u})\boldsymbol{PDe}(\boldsymbol{u})-k\boldsymbol{F}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{u})[\boldsymbol{PA}]^{\mathrm{S}}\boldsymbol{F}(\boldsymbol{u})\geqslant\\&\quad\|\boldsymbol{u}\|^2-\boldsymbol{u}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{D}^{-1}\boldsymbol{A})\boldsymbol{F}(\boldsymbol{u})+k\boldsymbol{F}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{u})[\boldsymbol{PM}]^{\mathrm{S}}\boldsymbol{F}(\boldsymbol{u})\geqslant\\&\quad\|\boldsymbol{u}\|^2-(1/2)(\|\boldsymbol{u}\|^2+\|\boldsymbol{D}^{-1}\boldsymbol{A}\|_2^2\|\boldsymbol{F}(\boldsymbol{u})\|^2)+kc\|\boldsymbol{F}(\boldsymbol{u})\|^2\geqslant\\&\quad(1/2)\|\boldsymbol{u}\|^2+(kc/2)\|\boldsymbol{F}(\boldsymbol{u})\|^2.\end{aligned}\tag{2}$$

另一方面, 由于

$$\begin{aligned}\Psi^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{u})\boldsymbol{V}&=\sum_{i=1}^n(d_i^{-1}V_i)u_i+k\sum_{i=1}^n(p_iV_i)F_i(u_i)\geqslant\\&-\left(\frac{1}{4}\|\boldsymbol{u}\|^2+\sum_{i=1}^n(d_i^{-1}V_i)^2\right)-k\left(\frac{c}{2}\|\boldsymbol{F}(\boldsymbol{u})\|^2+\frac{1}{2c}\sum_{i=1}^n(p_iV_i)^2\right)=\\&-\frac{1}{4}\|\boldsymbol{u}\|^2-\frac{kc}{2}\|\boldsymbol{F}(\boldsymbol{u})\|^2-\theta,\end{aligned}\tag{3}$$

其中 $\theta=\sum_{i=1}^n(d_i^{-1}V_i)^2+\frac{k}{2c}\sum_{i=1}^n(p_iV_i)^2\geqslant0.$

由(2)式和(3)式, 可得

$$\Psi^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{u})\boldsymbol{H}(\boldsymbol{u})\geqslant(1/4)\|\boldsymbol{u}\|^2-\theta.\tag{4}$$

记 $d_{\max} = \max_{1 \leqslant i \leqslant n}\left\{d_i\right\} > 0$, 且 $\omega = \min\left\{d_{\max}^{-1}, 1/4\right\}$, 则由(4) 式和 $u_i F_i(u_i) \geqslant 0$ 可得

$$\begin{aligned}\Psi^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{u})\boldsymbol{h}(\boldsymbol{u};\lambda) = {} & \lambda\sum_{i=1}^{n}(d_i^{-1}u_i^2 + kp_iu_iF_i(u_i)) + (1-\lambda)\Psi^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{u})\boldsymbol{H}(\boldsymbol{u}) \geqslant \\ & \lambda d_{\max}^{-1}\|\boldsymbol{u}\|^2 + (1-\lambda)\left(\frac{\|\boldsymbol{u}\|^2}{4} - \theta\right) \geqslant \\ & \left[\lambda d_{\max}^{-1} + \frac{(1-\lambda)}{4}\right]\|\boldsymbol{u}\|^2 - \theta \geqslant \\ & \omega\|\boldsymbol{u}\|^2 - \theta. \end{aligned} \tag{5}$$

这样, 如果 $r > \sqrt{\theta/\omega}$, 则从(5) 式可得当 $\boldsymbol{x} \in \partial\Omega_r$ 且 $\lambda \in [0, 1]$ 时, $\Psi^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{u})\boldsymbol{h}(\boldsymbol{u};\lambda) > 0$, 这蕴涵着 $\boldsymbol{h}(\boldsymbol{u};\lambda) \neq 0$. 从而根据同伦不变性[13]可知

$$d(\boldsymbol{H}(\boldsymbol{u}); \boldsymbol{0}, \Omega_r) = d(\boldsymbol{h}(\boldsymbol{u}; 0); \boldsymbol{0}, \Omega_r) = d(\boldsymbol{h}(\boldsymbol{u}; 1); 0, \Omega_r) = 1 \neq 0, \tag{6}$$

其中 $d(\boldsymbol{H}(\boldsymbol{u}); \boldsymbol{0}, \Omega_r)$ 表示拓扑度. 根据拓扑度理论[14-15], 方程 $\boldsymbol{H}(\boldsymbol{u}) = \boldsymbol{0}$ 在 $\Omega_r \subset R^n$ 内至少有一个解, 即系统(1) 至少存在一个平衡点. 证毕.

注 1 定理 1 给出使系统(1) 对任意外部输入 $\boldsymbol{J} \in R^n$ 至少有一个平衡点的充分条件. 实际上, 在下一节我们将证明在定理 1 的条件下, 系统(1) 的平衡点是全局渐近稳定的. 因此, 定理 1 的条件还蕴含着系统(1) 平衡点的唯一性.

注 2 如果 $-\boldsymbol{A}$ 是 Liapunov 对角半稳定的, 则存在正的对角矩阵 $\boldsymbol{P}$ 使得 $[\boldsymbol{P}(-\boldsymbol{A})]^{\mathrm{S}}$ 是半正定的. 容易看到, 对任意正的对角矩阵 $\boldsymbol{K}$, 由于 $[\boldsymbol{P}(-\boldsymbol{A}+\boldsymbol{K})]^{\mathrm{S}} = [\boldsymbol{P}(-\boldsymbol{A})]^{\mathrm{S}} + 2\boldsymbol{PK}$, 于是 $-\boldsymbol{A}+\boldsymbol{K}$ 是 Liapunov 对角稳定的. 因此, 在这种情形之下, 如果函数 $\boldsymbol{e}(\boldsymbol{u})$ 和 $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{u})$ 分别满足假设(i) 和(ii), 那么对任意外部输入 $\boldsymbol{J} \in R^n$, 系统(1) 有唯一的平衡点.

注 3 如果 $\boldsymbol{M} = \boldsymbol{DC}^{-1} - \boldsymbol{A}$ 是一正定矩阵, 由于对 n 阶单位矩阵 $\boldsymbol{I}$, $[\boldsymbol{IM}]^{\mathrm{S}} = \boldsymbol{M}$, 因此 $\boldsymbol{M}$ 是 Liapunov 对角稳定的. 如果 $\boldsymbol{M} = \boldsymbol{DC}^{-1} - \boldsymbol{A}$ 不对称但它是一个 $Z-$ 矩阵且满足下面条件之一:

1) $\boldsymbol{M}$ 的所有主子式都是正的;
2) $\boldsymbol{M}$ 可以改写为形式 $\boldsymbol{M} = k\boldsymbol{I} - \boldsymbol{B}$, 其中 $\boldsymbol{B}$ 是一个谱半径严格小于 k 的非负矩阵;
3) $\boldsymbol{M}$ 的所有特征值都是正的;
4) $\boldsymbol{M}$ 的任意特征值的实部是正的;
5) $\boldsymbol{M}$ 非奇异且 $\boldsymbol{M}$ 的逆矩阵是非负的;
6) $\boldsymbol{Mv} \geqslant 0$ 蕴含着 $\boldsymbol{v} \geqslant 0$;
7) 存在具有非负元素的向量 $\boldsymbol{v}$ 使得 $\boldsymbol{Mv} \geqslant 0$;
8) 对于每个非负对角矩阵 $\boldsymbol{D}$, $\boldsymbol{M}+\boldsymbol{D}$ 是非奇异的;
9) 对于任意的 $k \geqslant 0$, $\boldsymbol{M}+k\boldsymbol{I}$ 是非奇异的;
10) 对于任意的非零向量 $\boldsymbol{v}$, 存在 i 使得 $v_i(\boldsymbol{Mv})_i > 0$;
11) $\boldsymbol{M}$ 能够分解为 $\boldsymbol{LU}$, 其中 $\boldsymbol{L}$ 是下三角矩阵, $\boldsymbol{U}$ 是上三角矩阵且 $\boldsymbol{L}$ 和 $\boldsymbol{U}$ 的对角元都是正的;
12) $\boldsymbol{M}$ 的对角线元素是正的且对某个正的对角矩阵 $\boldsymbol{D}$, $\boldsymbol{MD}$ 是严格对角占优的.

那么由文献[16] 和文献[17] 可知 $\boldsymbol{M}$ 是一个 $M-$ 矩阵, 因此 $\boldsymbol{M}$ 是 Liapunov 对角稳定的.

2 全局渐近稳定性分析

设 $\boldsymbol{u}^* = (u_1^*, u_2^*, \cdots, u_n^*)^{\mathrm{T}} \in R^n$ 是系统(1) 的平衡点. 作坐标变换 $\boldsymbol{z} = (z_1, z_2, \cdots, z_n)^{\mathrm{T}} = \boldsymbol{u} - \boldsymbol{u}^*$, 则系统(1) 可化为如下的偏微分方程

$$\frac{\partial z_i}{\partial t} = \sum_{k=1}^{m}\frac{\partial}{\partial x_k}\left(D_{ik}\frac{\partial z_i}{\partial x_k}\right) - d_iE_i(z_i) + \sum_{j=1}^{n}a_{ij}F_j(z_j), \qquad i = 1, 2, \cdots, n, \tag{7}$$

其中 $E_i(z_i) = e_i(z_i + u_i^*) - e_i(u_i^*)$, $F_i(z_i) = f_i(z_i + u_i^*) - f_i(u_i^*)$; $i = 1, 2, \cdots, n$. 很明显, $E_i(0) = 0$, 且 $z_iE_i(z_i) = z_i[e_i(z_i + u_i^*) - e_i(u_i^*)] \geqslant z_i^2$; $F_i(0) = 0$, $0 \leqslant z_iF_i(z_i) = z_i[f_i(z_i +$

$u_i^*) - f_i(u_i^*)] \leqslant Cz_i^2; z_i \in \mathbf{R}, i = 1, 2, \cdots, n$.

定理3 如果函数 $\boldsymbol{e}(\boldsymbol{u})$ 和激活函数 $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{u})$ 分别满足假设(i)和假设(ii), 且 $\boldsymbol{M} = \boldsymbol{DC}^{-1} - \boldsymbol{A} \in$ LDS, 则对任何输入 $\boldsymbol{J} \in R^n$, 系统(1)至少存在一个平衡点, 且它为全局渐近稳定的.

证明 正的对角阵 $\boldsymbol{P}$, 常数 c, k 均为定理1所述. 考虑如下的 Liapunov 函数

$$V_1(\boldsymbol{z}) = \frac{1}{2}\boldsymbol{z}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{D}^{-1}\boldsymbol{z} + k\sum_{i=1}^{n}p_i\int_0^{z_i}\boldsymbol{F}_i(\rho)\,\mathrm{d}\rho. \tag{8}$$

利用(8)式构造平均Liapunov函数

$$V(\boldsymbol{z}) = \int_\Omega V_1(\boldsymbol{z})\,\mathrm{d}\boldsymbol{x} = \int_\Omega\left(\frac{1}{2}\boldsymbol{z}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{D}^{-1}\boldsymbol{z} + k\sum_{i=1}^{n}\int_0^{z_i}p_iF_i(\rho)\,\mathrm{d}\rho\right)\mathrm{d}\boldsymbol{x}. \tag{9}$$

首先, 我们有

$$\frac{\partial V_1(\boldsymbol{z})}{\partial z_i} = \frac{z_i}{d_i} + kp_iF_i(z_i), \qquad i = 1, \cdots, n,$$

因此

$$\frac{\partial^2 V_1(\boldsymbol{z})}{\partial z_i^2} = \frac{1}{d_i} + kp_iF_i'(z_i) = \frac{1}{d_i} + kp_if_i'(z_i + u_i^*) > 0, \qquad i = 1, \cdots, n, \tag{10}$$

且

$$\frac{\partial^2 V_1(\boldsymbol{z})}{\partial z_i\partial z_j} = 0, \qquad i \neq j;\ i, j = 1, \cdots, n. \tag{11}$$

令 $\boldsymbol{z}_i = \left(D_{i1}\frac{\partial z_i}{\partial x_1}, D_{i2}\frac{\partial z_i}{\partial x_2}, \cdots, D_{im}\frac{\partial z_i}{\partial x_m}\right)^{\mathrm{T}} \in R^m$, $i = 1, 2, \cdots, n$ 且 $\nabla = \left(\frac{\partial}{\partial x_1}, \frac{\partial}{\partial x_2}, \cdots, \frac{\partial}{\partial x_m}\right)^{\mathrm{T}}$ 表示梯算子, 则 $\nabla \cdot \boldsymbol{z}_i = \sum_{k=1}^{m}\frac{\partial}{\partial x_k}\left(D_{ik}\frac{\partial z_i}{\partial x_k}\right)$, $i = 1, 2, \cdots, n$. 由于 $\boldsymbol{x} \in \partial\Omega$ 时, $\frac{\partial u_i}{\partial n} = \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_1}, \frac{\partial u_i}{\partial x_2}, \cdots, \frac{\partial u_i}{\partial x_m}\right)^{\mathrm{T}} = \mathbf{0}$, 所以这时 $\frac{\partial z_i}{\partial x_k} = 0$, $i = 1, 2, \cdots, n$; $k = 1, 2, \cdots, m$. 记 $\gamma = (\cos\alpha_1, \cos\alpha_2, \cdots, \cos\alpha_m)^{\mathrm{T}}$ 为 $\partial\Omega$ 上的单位外法向量, 由(9)式至(11)式和散度公式, 可得

$$\begin{aligned}
&\int_\Omega \frac{\partial V_1(\boldsymbol{z})}{\partial z_i}\sum_{k=1}^{m}\frac{\partial}{\partial x_k}\left(D_{ik}\frac{\partial z_i}{\partial x_k}\right)\mathrm{d}\boldsymbol{x} = \int_\Omega \frac{\partial V_1(\boldsymbol{z})}{\partial z_i}\nabla\cdot\boldsymbol{z}_i\,\mathrm{d}\boldsymbol{x} = \\
&\quad\int_\Omega \nabla\cdot\left(\frac{\partial V_1(\boldsymbol{z})}{\partial z_i}\boldsymbol{z}_i\right)\mathrm{d}\boldsymbol{x} - \int_\Omega \nabla\left(\frac{\partial V_1(\boldsymbol{z})}{\partial z_i}\right)\cdot\boldsymbol{z}_i\,\mathrm{d}\boldsymbol{x} = \\
&\quad\int_{\partial\Omega}\gamma\cdot\left(\frac{\partial V_1(\boldsymbol{z})}{\partial z_i}\boldsymbol{z}_i\right)\mathrm{d}s - \sum_{k=1}^{m}\int_\Omega D_{ik}(t, \boldsymbol{x}, \boldsymbol{z})\left(\frac{\partial^2 V_1(\boldsymbol{z})}{\partial z_i^2}\right)\left(\frac{\partial z_i}{\partial x_k}\right)^2\mathrm{d}\boldsymbol{x} = \\
&\quad\int_{\partial\Omega}\sum_{k=1}^{m}D_{ik}(t, \boldsymbol{x}, \boldsymbol{z})\frac{\partial V_1(\boldsymbol{z})}{\partial z_i}\frac{\partial z_i}{\partial x_k}\cos\alpha_i\,\mathrm{d}s - \\
&\quad\sum_{k=1}^{m}\int_\Omega D_{ik}(t, \boldsymbol{x}, \boldsymbol{z})\left(\frac{1}{d_i} + kp_iF_i'(z_i)\right)\left(\frac{\partial z_i}{\partial x_k}\right)^2\mathrm{d}\boldsymbol{x} = \\
&\quad-\sum_{k=1}^{m}\int_\Omega D_{ik}(t, \boldsymbol{x}, \boldsymbol{z})\left(\frac{1}{d_i} + kp_iF_i'(z_i)\right)\left(\frac{\partial z_i}{\partial x_k}\right)^2\mathrm{d}\boldsymbol{x} \leqslant 0.
\end{aligned} \tag{12}$$

再由(2)式和(12)式可得 $V(\boldsymbol{z})$ 沿系统(7)的解的导数为

$$\begin{aligned}
&\left.\frac{\mathrm{d}V(\boldsymbol{z})}{\mathrm{d}t}\right|_{(7)} = \int_\Omega \left.\frac{\mathrm{d}V_1(\boldsymbol{z})}{\mathrm{d}t}\right|_{(7)}\mathrm{d}\boldsymbol{x} = \int_\Omega\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial V_1(\boldsymbol{z})}{\partial z_i}\frac{\partial z_i}{\partial t}\mathrm{d}\boldsymbol{x} = \\
&\quad\int_\Omega\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial V_1(\boldsymbol{z})}{\partial z_i}\sum_{k=1}^{m}\frac{\partial}{\partial x_k}\left(D_{ik}\frac{\partial z_i}{\partial x_k}\right)\mathrm{d}\boldsymbol{x} +
\end{aligned}$$

$$\int_\Omega \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial V_1(z)}{\partial z_i}\left[-d_iE_i(z_i)+\sum_{j=1}^{n}a_{ij}F_j(z_j)\right]\mathrm{d}\boldsymbol{x}=$$
$$-\sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{m}\int_\Omega D_{ik}(t,\boldsymbol{x},\boldsymbol{z})\left(\frac{1}{d_i}+kp_iF_i'(z_i)\right)\left(\frac{\partial z_i}{\partial x_k}\right)^2\mathrm{d}\boldsymbol{x}+$$
$$\sum_{i=1}^{n}\int_\Omega\left[\frac{z_i}{d_i}+kp_iF_i(z_i)\right]\left[-d_iE(z_i)+\sum_{j=1}^{n}a_{ij}F_j(z_j)\right]\mathrm{d}\boldsymbol{x}\leqslant$$
$$-\int_\Omega(\boldsymbol{D}^{-1}\boldsymbol{z}+k\boldsymbol{PF}(\boldsymbol{z}))^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{DE}(\boldsymbol{z}))-\boldsymbol{AF}(\boldsymbol{z})\mathrm{d}\boldsymbol{x}\leqslant$$
$$-\int_\Omega\left(\frac{1}{2}\|\boldsymbol{z}\|^2+\frac{kc}{2}\|\boldsymbol{F}(\boldsymbol{z})\|^2\right)\mathrm{d}\boldsymbol{x}<0,\qquad \boldsymbol{z}\in R^n\text{且}\boldsymbol{z}\neq 0.$$

很显然当 $\|\boldsymbol{z}\|\to+\infty$ 时, $V(\boldsymbol{z})\to+\infty$. 因而系统(7) 的零解, 即系统(1) 的平衡点 $\boldsymbol{u}^*$ 是全局渐近稳定的. 证毕.

3 例 子

这一节给出一个例子来说明前两节所得结论的重要性和可行性.

作为一个例子, 考虑下面的具有两个神经元和没有外部输入的神经网络模型

$$\begin{cases}\dfrac{\partial u_1}{\partial t}=\dfrac{\partial^2 u_1}{\partial x^2}-d_1(u_1)+a_{11}\mathrm{th}(u_1)+a_{12}\mathrm{th}(u_2),\\ \qquad\qquad t>0,x\in(0,\pi),\\ \dfrac{\partial u_2}{\partial t}=\dfrac{\partial^2 u_2}{\partial x^2}-d_2(u_2)+a_{21}\mathrm{th}(u_1)+a_{22}\mathrm{th}(u_2),\\ \qquad\qquad t>0,x\in(0,\pi),\\ \dfrac{\partial u_1}{\partial x}=\dfrac{\partial u_2}{\partial x}=0,\qquad t>0,x=0,\pi.\end{cases}\tag{13}$$

从双曲正切函数的特点容易看到 $C_1=C_2=1$, 因此 $\boldsymbol{M}=\boldsymbol{D}-\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}d_1-a_{11} & -a_{12}\\ -a_{21} & d_2-a_{22}\end{pmatrix}$.

假设 $d_1-a_{11}>0, a_{12}>0, a_{21}>0$ 且 $(d_1-a_{11})(d_2-a_{22})>a_{12}a_{21}$, 那么 $\boldsymbol{M}$ 是 M-矩阵并且从文献[16] 和文献[17] 可知 $\boldsymbol{M}$ 是 Liapunov 对角稳定的. 因此由定理 2 可知系统(13) 有一个唯一全局渐近稳定的平衡点(0, 0).

如果 $d_1-a_{11}=1$, $d_2-a_{22}=2$, $a_{12}=2$, $a_{21}=-3$, 那么 $\boldsymbol{M}=\begin{pmatrix}1 & -2\\ 3 & 2\end{pmatrix}$ 不是 M-矩阵由于 $\boldsymbol{M}$ 的非对角元并不小于或等于零. 但 $\boldsymbol{M}^{\mathrm{S}}=\begin{pmatrix}1 & 0.5\\ 0.5 & 2\end{pmatrix}$, 因此 $\boldsymbol{M}$ 是 Liapunov 对角稳定的且由定理2 可知系统(13) 有一个唯一全局渐近稳定的平衡点(0, 0).

致谢 本文得到兰州交通大学"青蓝"工程的资助(QL-05-16A), 特此感谢.

[参 考 文 献]

[1] Hopfield J J. Neural networks and physical systems with emergent collective computional abilities [J]. Proc Natl Acda Sci USA, 1982, **79**(2): 2554-2558.

[2] Hopfield J J. Neurons with graded response have collective computional properties like those of two -state neurons[J]. Proc NatlAcda Sci USA, 1984, **81**(10): 3088-3092.

[3] 廖晓昕. Hopfield 神经网络的稳定性[J]. 中国科学(A集), 1993, **23**(10): 1032-1035.

[4] 梁学斌, 吴立德. Hopfield 型神经网络的全局指数稳定性及应用[J]. 中国科学(A集), 1995, **25**(5): 523-532.

[5] Forti M, Tesi A. New conditions for global stability of neural networks with application to linear and quadratic programming problems[J]. IEEE Trans Circuits Systems, 1995, **42**(7): 354-366.

[6] LIANG Xue-bin, WU Li-de. Comment on "New conditions for global stability of neural networks with application to linear and quadratic programming problems"[J]. IEEE Trans Circuits Systems, 1997, **44**(1): 1099-1101.

[7] LIANG Xue-bin, WANG Jun. Absolute exponential stability of neural networks with a general class of activation functions[J]. IEEE Trans Circuits Systems, 2000, **47**(8): 1258-1263.

[8] HE Qi-ming, KANG Li-shan. Existence and stability of global solution for generalized Hopfield neural networks[J]. Neural Parallel &Scientific Computations, 1994, **2**(2): 165-176.

[9] Carpenter G A. A Geometric approach to singular perturbation to never impulse equations[J]. J Differential Equations, 1977, **23**(3): 355-367.

[10] Evans J W. Nerve axon egus II: Stability at rest[J]. Indian Univ Math J, 1972, **22**(1): 75-90.

[11] 廖晓昕, 杨叔子, 程时杰, 等. 具有反应扩散的广义神经网络的稳定性[J]. 中国科学(E集), 2002, **32**(1): 88-94.

[12] CAO Jin-de, WANG Jun. Absolute exponential stability of recurrent neural networks with Lipschitz-continuous activation and time delays[J]. Nueral Networks, 2004, **17**(3): 379-390.

[13] 郭大钧, 孙经先, 刘兆理. 非线性常微分方程的泛函方法[M]. 济南: 山东科技出版社, 1995.

[14] 胡适耕. 非线性分析和方法[M]. 武汉: 华中理工大学出版社, 1996.

[15] 郭大钧. 非线性泛函分析[M]. 济南: 山东科技出版社, 2002.

[16] Fiedler M. Special Matrices and Their Applications in Numerical Mathematics[M]. Dordrecht: Martinus Nijhoff, 1986.

[17] Horn R A, Johnson C R. Topics in Matrix Analysis[M]. Cambridge: Cambridge University Press, 1991.

Global Asymptotic Stability for Hopfield-Type Neural Networks With Diffusion Effects

YAN Xiang-ping[1], LI Wan-tong[2]

(1. Department of Mathematics, Lanzhou Jiaotong University, Lanzhou 730070, P. R. China;
2. School of Mathematics and Statistics, Lanzhou University,
Lanzhou 730000, P. R. China)

Abstract: The existence, uniqueness and global asymptotic stability of the equilibrium for Hopfield-type neural networks with diffusion were discussed. The sufficient conditions of the existence and uniqueness of the equilibrium of the system were obtained by applying the topological degree theory when the activation functions are monotonous non-decreasing and differential, and the interconnected matrix is related to the Lianupov diagonal stable matrix. By constructing the average Liapunov functions, the global asymptotic stability of the equilibrium of the system was obtained.

Key words: diffusion; neural networks; equilibrium; global asymptotic stability