

# 压电材料中两个非对称平行裂纹的基本解<sup>\*</sup>

周振功<sup>1</sup>, 王彪<sup>2</sup>

(1. 哈尔滨工业大学 复合材料研究所, 哈尔滨 150001;  
2. 中山大学 物理与工程学院, 广州 510275)

(我刊编委王彪来稿)

**摘要:** 采用 Schmidt 方法分析压电材料中非对称平行的双可导通裂纹的断裂性能. 利用 Fourier 变换使问题的求解转换为求解两对以裂纹面位移之差为未知变量的对偶积分方程. 为了求解对偶积分方程, 直接把裂纹面位移差函数展开成 Jacobi 多项式形式. 最终得到了裂纹的应力强度因子与电位移强度因子之间的关系. 数值结果表明, 应力强度因子和电位移强度因子与裂纹间的距离、裂纹的几何尺寸有关; 与不可导通裂纹有关结果相比, 可导通裂纹的电位移强度因子远小于相应问题不可导通裂纹的电位移强度因子. 同时可以发现裂纹间的“屏蔽”效应也在压电材料中出现.

**关键词:** 压电材料; 平行非对称裂纹; 对偶积分方程; 强度因子  
**中图分类号:** O346.53      **文献标识码:** A

## 引 言

很长期以来, 压电材料的力-电耦合效应已为人们所知, 然而, 也就是在近几年由于压电材料在电子装置如作动器和传感器上的应用, 人们才对其性能分析产生巨大兴趣. 要关注这些电子设备的可靠性和耐用性, 必须对压电材料的损伤和断裂过程有一个基本的理解, 这也引起了人们对压电材料断裂力学行为研究的热情<sup>[1-6]</sup>. 在对压电材料理论断裂分析中, 研究者假定裂纹表面是无应力的, 但对于裂纹面上的电边界条件人们还有不同的意见. 因为裂纹间的空气或其它介质的导电率与压电材料相比非常小, 因此 Deeg<sup>[7]</sup> 和 Pak<sup>[8]</sup> 假定裂纹面无电荷作用, 这就是所谓的不可导通裂纹模型. 根据这一裂纹模型, 利用“假牵引-电位移”法对压电材料中多个平行不可导通裂纹间的相互作用问题进行了分析<sup>[9]</sup>. 另一方面, 一些研究人员<sup>[10]</sup> 认为裂纹的厚度非常小, 且裂纹内是真空、空气或其它气体, 因此认为电势和电位移在裂纹面上应是连续的, 这就是所谓的导通裂纹模型. 根据这一假定, 在文献[5]中分析了压电材料中单个可导通裂纹的断裂问题. 利用类推含有介质的电容器的性质, Hao 和 Shen<sup>[11]</sup> 给出了一种考虑裂纹内气体导电性的电边界条件裂纹模型. 有趣的是不同的电边界条件会有不同的结果<sup>[12]</sup>.

\* 收稿日期: 2006-11-08; 修订日期: 2007-01-25

基金项目: 国家自然科学基金资助项目(10572043; 10572155); 黑龙江省杰出青年基金资助项目(JC04-08)

作者简介: 周振功(1963—), 河南镇平人, 教授, 博导, 博士(联系人: Tel: + 86-451-86402396; Fax: + 86-451-86402386; E-mail: zhouzhg@hit.edu.cn).

文献[13-16]分析了压电材料中平行双裂纹或者平行四裂纹间的相互作用问题,然而在文献[13-16]中考虑的是对称断裂问题. 据了解,对于压电材料中平行非对称可导通裂纹的断裂问题,到目前为止,还没有见利用 Schmidt<sup>[17]</sup>方法研究过. 因此有必要对这一问题加以分析.

本文将利用 Schmid<sup>[17]</sup>方法,对压电材料中平行非对称可导通裂纹的反平面断裂问题进行分析. 文献[14]中的问题只是本文问题的一种特殊情况. 利用 Fourier 变换使问题的求解转换为求解两对以裂纹面位移之差为未知变量的对偶积分方程. 为了求解对偶积分方程,直接把裂纹面位移差函数展开成 Jacobi 多项式形式. 这种求解方法不同于文献[1-10]所采用的方法,最终,数值结果表明应力强度因子和电位移强度因子与裂纹间的距离、裂纹的几何尺寸有关.

### 1 基本方程

设一压电材料平面中含有两个平行非对称的长度分别为  $2l_1$  和  $2l_2$  的一对裂纹,如图1所示,  $h$  是两裂纹间垂直距离,  $d$  是两裂纹中心间的水平距离. 这里,  $l_1, l_2, h$  和  $d$  都是无量纲变量. 在此仅考虑反平面机械位移和平面电位移的情况. 如 Soh<sup>[12]</sup>工作中的讨论,在本文中讨论可导通裂纹面情况,即假定电势和电位移在裂纹面上是连续的. 假定压电平面受一反平面剪切应力  $\tau_{yz} = -\tau_0$  的作用( $\tau_0$  是反平面剪切应力幅值),因此本问题的边界条件可表示为

$$\begin{cases} w^{(1)}(x, h) = w^{(2)}(x, h), \tau_{yz}^{(1)}(x, h) = \tau_{yz}^{(2)}(x, h), \\ \phi^{(1)}(x, h) = \phi^{(2)}(x, h), D_y^{(1)}(x, h) = D_y^{(2)}(x, h), \end{cases} \quad (1)$$

$$\begin{cases} y = h, x < d - l_2, x > d + l_2; \\ w^{(2)}(x, 0) = w^{(3)}(x, 0), \tau_{yz}^{(2)}(x, 0) = \tau_{yz}^{(3)}(x, 0), \\ \phi^{(2)}(x, 0) = \phi^{(3)}(x, 0), D_y^{(2)}(x, 0) = D_y^{(3)}(x, 0), \end{cases} \quad y = 0, |x| < l_1; \quad (2)$$

$$\begin{cases} \tau_{yz}^{(1)}(x, h) = \tau_{yz}^{(2)}(x, h) = -\tau_0, \\ \phi^{(1)}(x, h) = \phi^{(2)}(x, h), D_y^{(1)}(x, h) = D_y^{(2)}(x, h), \end{cases} \quad (3)$$

$$\begin{cases} y = h, d - l_2 \leq x \leq d + l_2; \\ \tau_{yz}^{(2)}(x, 0) = \tau_{yz}^{(3)}(x, 0) = -\tau_0, \\ \phi^{(2)}(x, 0) = \phi^{(3)}(x, 0), D_y^{(2)}(x, 0) = D_y^{(3)}(x, 0), \end{cases} \quad y = 0, |x| \leq l_1; \quad (4)$$

$$w^{(j)} = \phi^{(j)} = 0, \quad \text{当 } (x^2 + y^2)^{1/2} \rightarrow \infty, j = 1, 2, 3; \quad (5)$$

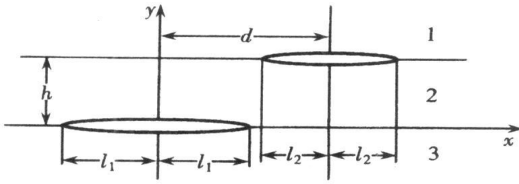


图 1 压电材料中两平行非对称裂纹模型

这里  $\tau_{zk}^{(j)}(x, y), D_k^{(j)}(x, y)$  ( $k = x, y$ ) 分别是反平面剪切应力和平面电位移.  $w^{(j)}(x, y)$  和  $\phi^{(j)}(x, y)$  分别是反平面剪切位移和电势. 这里右上角角标  $j$  ( $j = 1, 2, 3$ ) 分别是上半平面 1、中间层 2 和下半平面 3,如图 1 所示. 这里半平面 1、中间层 2 和下半平面 3 是同一种材料.

本构方程可表示为:

$$\tau_{zk}^{(j)} = c_{44}w_{,k}^{(j)} + e_{15}\phi_{,k}^{(j)}, \quad (6)$$

$$D_k^{(j)} = c_{15}w_{,k}^{(j)} - \epsilon_{11}\phi_{,k}^{(j)}, \quad (7)$$

这里  $c_{44}, e_{15}, \epsilon_{11}$  分别是剪切模量、压电常数和介电常数.

在不考虑体力和电荷作用下, 压电材料的反平面控制方程为<sup>[12]</sup>

$$c_{44} \cdot^{\cdot 2} w^{(j)} + e_{15} \cdot^{\cdot 2} \phi^{(j)} = 0, \tag{8}$$

$$e_{15} \cdot^{\cdot 2} w^{(j)} - \epsilon_{11} \cdot^{\cdot 2} \phi^{(j)} = 0, \tag{9}$$

这里  $\cdot^{\cdot 2} = \partial^2/\partial x^2 + \partial^2/\partial y^2$  是二维 Laplace 算子. 方程(8)和方程(9)经 Fourier 变换后, 其解可表示为

$$\begin{cases} w^{(1)}(x, y) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} A_1(s) e^{-|s|y} e^{isx} ds, \\ \phi^{(1)}(x, y) = \frac{e_{15}}{\epsilon_{11}} w^{(1)}(x, y) + \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} B_1(s) e^{-|s|y} e^{isx} ds, \end{cases} \quad y \geq h; \tag{10}$$

$$\begin{cases} w^{(2)}(x, y) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} [A_2(s) e^{-|s|y} + B_2(s) e^{|s|y}] e^{isx} ds, \\ \phi^{(2)}(x, y) = \frac{e_{15}}{\epsilon_{11}} w^{(2)}(x, y) + \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} [C_2(s) e^{-|s|y} + D_2(s) e^{|s|y}] e^{isx} ds, \end{cases} \quad h \geq y \geq 0; \tag{11}$$

$$\begin{cases} w^{(3)}(x, y) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} A_3(s) e^{|s|y} e^{isx} ds, \\ \phi^{(3)}(x, y) = \frac{e_{15}}{\epsilon_{11}} w^{(3)}(x, y) + \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} B_3(s) e^{|s|y} e^{isx} ds, \end{cases} \quad y \leq 0; \tag{12}$$

这里  $A_1(s)$ 、 $B_1(s)$ 、 $A_2(s)$ 、 $B_2(s)$ 、 $C_2(s)$ 、 $D_2(s)$ 、 $A_3(s)$  和  $B_3(s)$  是未知函数, 变量上面的一横杠表示经过 Fourier 变换的量, 即

$$f(s) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-isx} dx. \tag{13}$$

由方程(6)和方程(7)可得

$$\begin{cases} \tau_{yz}^{(1)}(x, y) = -\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |s| [\mu A_1(s) e^{-|s|y} + e_{15} B_1(s) e^{-|s|y}] e^{isx} ds, \\ D_y^{(1)}(x, y) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \epsilon_{11} |s| B_1(s) e^{-|s|y} e^{isx} ds, \end{cases} \quad y \geq h; \tag{14}$$

$$\begin{cases} \tau_{yz}^{(2)}(x, y) = -\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |s| \{ \mu [A_2(s) e^{-|s|y} - B_2(s) e^{|s|y}] + e_{15} [C_2(s) e^{-|s|y} - D_2(s) e^{|s|y}] \} e^{isx} ds, \\ D_y^{(2)}(x, y) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \epsilon_{11} |s| [C_2(s) e^{-|s|y} - D_2(s) e^{|s|y}] e^{isx} ds, \end{cases} \quad h \geq y \geq 0; \tag{15}$$

$$\begin{cases} \tau_{yz}^{(3)}(x, y) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |s| [\mu A_3(s) e^{|s|y} + e_{15} B_3(s) e^{|s|y}] e^{isx} ds, \\ D_y^{(3)}(x, y) = -\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \epsilon_{11} |s| B_3(s) e^{|s|y} e^{isx} ds, \end{cases} \quad y \leq 0; \tag{16}$$

这里  $\mu = c_{44} + e_{15}^2/\epsilon_{11}$ .

为了求解问题, 裂纹面上的位移之差分别定义为

$$f_1(x) = w^{(1)}(x, h^+) - w^{(2)}(x, h^-), \tag{17}$$

$$f_2(x) = w^{(2)}(x, 0^+) - w^{(3)}(x, 0^-). \quad (18)$$

把方程(10)至方程(12)分别代入到方程(17)至方程(18)中,并应用 Fourier 变换和边界条件(1)~(4)可得

$$f_1(s) = [A_1(s) - A_2(s)]e^{-slh} - B_2(s)e^{slh}, \quad (19)$$

$$\frac{e^{15}}{E_{11}}f_1(s) + [B_1(s) - C_2(s)]e^{-slh} - D_2(s)e^{slh} = 0, \quad (20)$$

$$f_2(s) = A_2(s) + B_2(s) - A_3(s), \quad (21)$$

$$\frac{e^{15}}{E_{11}}f_2(s) + C_2(s) + D_2(s) - B_3(s) = 0. \quad (22)$$

把方程(14)至方程(16)分别代入到方程(1)至方程(4)中可得

$$\begin{aligned} \mathbb{H}_1(s)e^{-slh} + e^{15}B_1(s)e^{-slh} = \\ \mathbb{H}[A_2(s)e^{-slh} - B_2(s)e^{slh}] + e^{15}[C_2(s)e^{-slh} - D_2(s)e^{slh}], \end{aligned} \quad (23)$$

$$[B_1(s) - C_2(s)]e^{-2slh} + D_2(s) = 0, \quad (24)$$

$$\mathbb{H}[A_2(s) - B_2(s)] + e^{15}[C_2(s) - D_2(s)] = -\mathbb{H}_3(s) - e^{15}B_3(s), \quad (25)$$

$$C_2(s) - D_2(s) + B_3(s) = 0. \quad (26)$$

利用方程(19)至方程(26)8个方程求解8个未知函数  $A_1(s)$ 、 $B_1(s)$ 、 $A_2(s)$ 、 $B_2(s)$ 、 $C_2(s)$ 、 $D_2(s)$ 、 $A_3(s)$ 、 $B_3(s)$ ,并利用边界条件(1)~(4)可得

$$\frac{c_{44}}{4\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |s| [f_1(s) + e^{-slh}f_2(s)]e^{isx} ds = \tau_0, \quad d - l_2 \leq x \leq d + l_2, \quad (27)$$

$$\frac{c_{44}}{4\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |s| [f_2(s) + e^{-slh}f_1(s)]e^{isx} ds = \tau_0, \quad |x| \leq l_1, \quad (28)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} f_1(s)e^{isx} ds = 0, \quad x < d - l_2, x > d + l_2, \quad (29)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} f_2(s)e^{isx} ds = 0, \quad |x| > l_1. \quad (30)$$

为了确定未知函数  $f_1(s)$  和  $f_2(s)$ , 必须求解上面两对对偶积分方程.

## 2 对偶积分方程的求解

这里可以利用 Schmidt<sup>[17]</sup>方法来求解对偶积分方程(27)至方程(30),裂纹面上的位移差函数  $f_1(x)$  和  $f_2(x)$  可以展开成如下级数形式:

$$f_1(x) = \begin{cases} \sum_{n=0}^{\infty} a_n P_n^{(1/2, 1/2)}\left(\frac{x-d}{l_2}\right) \left[1 - \frac{(x-d)^2}{l_2^2}\right]^{1/2}, & d - l_2 \leq x \leq d + l_2, \\ 0, & x < d - l_2, x > d + l_2; \end{cases} \quad (31)$$

$$f_2(x) = \begin{cases} \sum_{n=0}^{\infty} b_n P_n^{(1/2, 1/2)}\left(\frac{x}{l_1}\right) \left[1 - \frac{x^2}{l_1^2}\right]^{1/2}, & -l_1 \leq x \leq l_1, \\ 0, & |x| > l_1, \end{cases} \quad (32)$$

这里  $a_n$  和  $b_n$  是未知系数,  $P_n^{(1/2, 1/2)}(x)$  是 Jacobi 多项式<sup>[18]</sup>. 方程(31)、(32)经 Fourier 变换后为<sup>[19]</sup>

$$f_1(s) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n G_n \frac{1}{s} J_{n+1}(sl_2) e^{-isd}, \quad G_n = 2\sqrt{\pi}(-1)^n i^n \frac{\Gamma(n+1+1/2)}{n!}, \quad (33)$$

$$f_2(s) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n G_n \frac{1}{s} J_{n+1}(sl_1), \quad (34)$$

这里  $\Gamma(x)$  和  $J_n(x)$  分别是 Gamma 函数和 Bessel 函数.

把方程(33)至方程(34)代入到方程(27)至方程(30)中,方程(29)和方程(30)能够自动满足,方程(27)至方程(28)经过分别在区间  $[d-l_2, x]$  和  $[-l_1, x]$  上对  $x$  积分后变为

$$\frac{c_{44}}{4\pi} \sum_{n=0}^{\infty} G_n \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\operatorname{sgn}(s)}{is} [a_n e^{-isd} J_{n+1}(sl_2) + e^{-l_1 sh} b_n J_{n+1}(sl_1)] [e^{isx} - e^{is(d-l_2)}] ds = \tau_0(x-d+l_2), \quad d-l_2 \leq x \leq d+l_2, \quad (35)$$

$$\frac{c_{44}}{4\pi} \sum_{n=0}^{\infty} G_n \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\operatorname{sgn}(s)}{is} [e^{-l_1 sh} a_n e^{-isd} J_{n+1}(sl_2) + b_n J_{n+1}(sl_1)] [e^{isx} - e^{isl}] ds = \tau_0(x+l_1), \quad |x| \leq l_1. \quad (36)$$

至此方程(35)、(36)可以利用 Schmidt<sup>[17]</sup>方法求解未知系数  $a_n$  和  $b_n$ . 这里省略了这一过程的描述,具体可见文献[20].

### 3 强度因子

若未知系数  $a_n$  和  $b_n$  获得了,整个扰动应力场和扰动电位移场就可以获得. 但对于断裂力学,重要的是确定裂纹尖端附近的扰动应力场和扰动电位移场. 沿裂纹面的应力  $\tau_{yz}^{(1)}$ 、 $\tau_{yz}^{(2)}$ 、 $\tau_{yz}^{(3)}$  和电位移  $D_y^{(1)}$ 、 $D_y^{(2)}$ 、 $D_y^{(3)}$  可分别表示为

$$\left\{ \begin{array}{l} \tau_{yz}^{(1)}(x, h) = \tau_{yz}^{(2)}(x, h) = \\ \quad - \frac{c_{44}}{4\pi} \sum_{n=0}^{\infty} G_n \int_{-\infty}^{\infty} \operatorname{sgn}(s) [a_n e^{-isd} J_{n+1}(sl_2) + e^{-l_1 sh} b_n J_{n+1}(sl_1)] e^{isx} ds, \\ \tau_{xz}^{(1)}(x, h) = \tau_{xz}^{(2)}(x, h) = \\ \quad \frac{ic_{44}}{4\pi} \sum_{n=0}^{\infty} G_n \int_{-\infty}^{\infty} [a_n e^{-isd} J_{n+1}(sl_2) + e^{-l_1 sh} b_n J_{n+1}(sl_1)] e^{isx} ds; \end{array} \right. \quad (37)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \tau_{yz}^{(2)}(x, 0) = \tau_{yz}^{(3)}(x, 0) = \\ \quad - \frac{c_{44}}{4\pi} \sum_{n=0}^{\infty} G_n \int_{-\infty}^{\infty} \operatorname{sgn}(s) [a_n e^{-isd} J_{n+1}(sl_2) + b_n J_{n+1}(sl_1)] e^{isx} ds, \\ \tau_{xz}^{(2)}(x, 0) = \tau_{xz}^{(3)}(x, 0) = \\ \quad \frac{ic_{44}}{4\pi} \sum_{n=0}^{\infty} G_n \int_{-\infty}^{\infty} [a_n e^{-isd} e^{-l_1 sh} J_{n+1}(sl_2) + b_n J_{n+1}(sl_1)] e^{isx} ds; \end{array} \right. \quad (38)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} D_y^{(1)}(x, h) = D_y^{(2)}(x, h) = \\ \quad - \frac{e_{15}}{4\pi} \sum_{n=0}^{\infty} G_n \int_{-\infty}^{\infty} \operatorname{sgn}(s) [a_n e^{-isd} J_{n+1}(sl_2) + e^{-l_1 sh} b_n J_{n+1}(sl_1)] e^{isx} ds, \\ D_x^{(1)}(x, h) = D_x^{(2)}(x, h) = \\ \quad \frac{ie_{15}}{4\pi} \sum_{n=0}^{\infty} G_n \int_{-\infty}^{\infty} [a_n e^{-isd} J_{n+1}(sl_2) + e^{-l_1 sh} b_n J_{n+1}(sl_1)] e^{isx} ds; \end{array} \right. \quad (39)$$

$$\left\{ \begin{aligned} D_y^{(2)}(x, 0) &= D_y^{(3)}(x, 0) = \\ & - \frac{e15}{4\pi} \sum_{n=0}^{\infty} G_n \int_{-\infty}^{\infty} \operatorname{sgn}(s) [a_n e^{-is d} e^{-1s|h} J_{n+1}(sl_2) + b_n J_{n+1}(sl_1)] e^{isx} ds, \\ D_x^{(2)}(x, 0) &= D_x^{(3)}(x, 0) = \\ & \frac{ie15}{4\pi} \sum_{n=0}^{\infty} G_n \int_{-\infty}^{\infty} [a_n e^{-is d} e^{-1s|h} J_{n+1}(sl_2) + b_n J_{n+1}(sl_1)] e^{isx} ds. \end{aligned} \right. \quad (40)$$

从方程(37)和方程(39)可得, 上部裂纹右尖端附近应力场和电位场的奇异部分可分别表示为 ( $d + l_2 < x$ ):

$$\left\{ \begin{aligned} \tau_{1yz}^R &= - \frac{c44}{4\pi} \sum_{n=0}^{\infty} a_n G_n \left[ \int_0^{\infty} J_{n+1}(sl_2) e^{is(x-d)} ds - \int_{-\infty}^0 J_{n+1}(sl_2) e^{is(x-d)} ds \right] = \\ & - \frac{c44}{4\pi} \sum_{n=0}^{\infty} a_n G_n Q_{1n}(x), \end{aligned} \right. \quad (41)$$

$$\tau_{1xz}^R = \frac{ic44}{4\pi} \sum_{n=0}^{\infty} a_n G_n \left[ \int_0^{\infty} J_{n+1}(sl_2) e^{is(x-d)} ds + \int_{-\infty}^0 J_{n+1}(sl_2) e^{is(x-d)} ds \right] = 0;$$

$$\left\{ \begin{aligned} D_{ly}^R &= - \frac{e15}{4\pi} \sum_{n=0}^{\infty} a_n G_n \left[ \int_0^{\infty} J_{n+1}(sl_2) e^{is(x-d)} ds - \int_{-\infty}^0 J_{n+1}(sl_2) e^{is(x-d)} ds \right] = \\ & - \frac{e15}{4\pi} \sum_{n=0}^{\infty} a_n G_n Q_{1n}(x), \end{aligned} \right. \quad (42)$$

$$D_{lx}^R = \frac{ie15}{4\pi} \sum_{n=0}^{\infty} a_n G_n \left[ \int_0^{\infty} J_{n+1}(sl_2) e^{is(x-d)} ds + \int_{-\infty}^0 J_{n+1}(sl_2) e^{is(x-d)} ds \right] = 0;$$

这里

$$Q_{1n}(x) = \begin{cases} \frac{-2(-1)^{n/2} l_2^{n+1}}{\sqrt{(x-d)^2 - l_2^2} [x-d + \sqrt{(x-d)^2 - l_2^2}]^{n+1}}, & n = 0, 2, 4, 6, \dots, \\ \frac{2i(-1)^{(n+1)/2} l_2^{n+1}}{\sqrt{(x-d)^2 - l_2^2} [x-d + \sqrt{(x-d)^2 - l_2^2}]^{n+1}}, & n = 1, 3, 5, 7, \dots \end{cases}$$

从方程(37)和方程(39)可得, 上部裂纹左尖端附近应力场和电位场的奇异部分可分别表示为 ( $x < d - l_2$ ):

$$\left\{ \begin{aligned} \tau_{1yz}^L &= - \frac{c44}{4\pi} \sum_{n=0}^{\infty} a_n G_n \left[ \int_0^{\infty} J_{n+1}(sl_2) e^{is(x-d)} ds - \int_{-\infty}^0 J_{n+1}(sl_2) e^{is(x-d)} ds \right] = \\ & - \frac{c44}{4\pi} \sum_{n=0}^{\infty} a_n G_n Q_{1n}^*(x), \end{aligned} \right. \quad (43)$$

$$\tau_{1xz}^L = \frac{ic44}{4\pi} \sum_{n=0}^{\infty} a_n G_n \left[ \int_0^{\infty} J_{n+1}(sl_2) e^{is(x-d)} ds + \int_{-\infty}^0 J_{n+1}(sl_2) e^{is(x-d)} ds \right] = 0;$$

$$\left\{ \begin{aligned} D_{ly}^L &= - \frac{e15}{2\pi} \sum_{n=0}^{\infty} a_n G_n \left[ \int_0^{\infty} J_{n+1}(sl_2) e^{is(x-d)} ds - \int_{-\infty}^0 J_{n+1}(sl_2) e^{is(x-d)} ds \right] = \\ & - \frac{e15}{2\pi} \sum_{n=0}^{\infty} a_n G_n Q_{1n}^*(x), \end{aligned} \right. \quad (44)$$

$$D_{lx}^L = \frac{ie15}{2\pi} \sum_{n=0}^{\infty} a_n G_n \left[ \int_0^{\infty} J_{n+1}(sl_2) e^{is(x-d)} ds + \int_{-\infty}^0 J_{n+1}(sl_2) e^{is(x-d)} ds \right] = 0;$$

这里

$$Q_{1n}^*(x) = \begin{cases} \frac{-2(-1)^{n/2}l_2^{n+1}}{\sqrt{(x-d)^2-l_2^2}[|x-d|+\sqrt{(x-d)^2-l_2^2}]^{n+1}}, & n = 0, 2, 4, 6, \dots, \\ \frac{-2i(-1)^{(n+1)/2}l_2^{n+1}}{\sqrt{(x-d)^2-l_2^2}[|x-d|+\sqrt{(x-d)^2-l_2^2}]^{n+1}}, & n = 1, 3, 5, 7, \dots \end{cases}$$

从方程(38)和方程(40)可得,下部裂纹右尖端附近应力场和电位场的奇异部分可分别表示为 ( $l_1 < x$ ):

$$\begin{cases} \tau_{2yz}^R = -\frac{c_{44}}{4\pi} \sum_{n=0}^{\infty} b_n G_n \left[ \int_0^{\infty} J_{n+1}(sl_1) e^{isx} ds - \int_{-\infty}^0 J_{n+1}(sl_1) e^{isx} ds \right] = \\ -\frac{c_{44}}{4\pi} \sum_{n=0}^{\infty} b_n G_n Q_{2n}(x), \end{cases} \quad (45)$$

$$\begin{cases} \tau_{2xz}^R = \frac{ic_{44}}{4\pi} \sum_{n=0}^{\infty} b_n G_n \left[ \int_0^{\infty} J_{n+1}(sl_1) e^{isx} ds + \int_{-\infty}^0 J_{n+1}(sl_1) e^{isx} ds \right] = 0; \\ D_{2y}^R = -\frac{e_{15}}{4\pi} \sum_{n=0}^{\infty} b_n G_n \left[ \int_0^{\infty} J_{n+1}(sl_1) e^{isx} ds - \int_{-\infty}^0 J_{n+1}(sl_1) e^{isx} ds \right] = \\ -\frac{e_{15}}{4\pi} \sum_{n=0}^{\infty} b_n G_n Q_{2n}(x), \\ D_{2x}^R = \frac{ie_{15}}{4\pi} \sum_{n=0}^{\infty} b_n G_n \left[ \int_0^{\infty} J_{n+1}(sl_1) e^{isx} ds + \int_{-\infty}^0 J_{n+1}(sl_1) e^{isx} ds \right] = 0; \end{cases} \quad (46)$$

这里

$$Q_{2n}(x) = \begin{cases} \frac{-2(-1)^{n/2}l_1^{n+1}}{\sqrt{x^2-l_1^2}[x+\sqrt{x^2-l_1^2}]^{n+1}}, & n = 0, 2, 4, 6, \dots, \\ \frac{2i(-1)^{(n+1)/2}l_1^{n+1}}{\sqrt{x^2-l_1^2}[x+\sqrt{x^2-l_1^2}]^{n+1}}, & n = 1, 3, 5, 7, \dots \end{cases}$$

从方程(38)和方程(40)可得,下部裂纹左尖端附近应力场和电位场的奇异部分可分别表示为 ( $x < -l_1$ ):

$$\begin{cases} \tau_{2yz}^L = -\frac{c_{44}}{4\pi} \sum_{n=0}^{\infty} b_n G_n \left[ \int_0^{\infty} J_{n+1}(sl_1) e^{isx} ds - \int_{-\infty}^0 J_{n+1}(sl_1) e^{isx} ds \right] = \\ -\frac{c_{44}}{4\pi} \sum_{n=0}^{\infty} b_n G_n Q_{2n}^*(x), \end{cases} \quad (47)$$

$$\begin{cases} \tau_{2xz}^L = \frac{ic_{44}}{4\pi} \sum_{n=0}^{\infty} b_n G_n \left[ \int_0^{\infty} J_{n+1}(sl_1) e^{isx} ds + \int_{-\infty}^0 J_{n+1}(sl_1) e^{isx} ds \right] = 0; \\ D_{2y}^L = -\frac{e_{15}}{4\pi} \sum_{n=0}^{\infty} b_n G_n \left[ \int_0^{\infty} J_{n+1}(sl_1) e^{isx} ds - \int_{-\infty}^0 J_{n+1}(sl_1) e^{isx} ds \right] = \\ -\frac{e_{15}}{4\pi} \sum_{n=0}^{\infty} b_n G_n Q_{2n}^*(x), \\ D_{2x}^L = \frac{ie_{15}}{4\pi} \sum_{n=0}^{\infty} b_n G_n \left[ \int_0^{\infty} J_{n+1}(sl_1) e^{isx} ds + \int_{-\infty}^0 J_{n+1}(sl_1) e^{isx} ds \right] = 0; \end{cases} \quad (48)$$

这里

$$Q_{2n}^*(x) = \begin{cases} \frac{-2(-1)^{n/2} l_1^{n+1}}{\sqrt{x^2 - l_1^2} |x| + \sqrt{x^2 - l_1^2}^{n+1}}, & n = 0, 2, 4, 6, \dots \\ \frac{2i(-1)^{(n+1)/2} l_2^{n+1}}{\sqrt{x^2 - l_1^2} |x| + \sqrt{x^2 - l_1^2}^{n+1}}, & n = 1, 3, 5, 7, \dots \end{cases}$$

上部裂纹右尖端应力强度因子  $K_u^R$  和电位移强度因子  $K_{Du}^R$  可分别表示为

$$K_u^R = \lim_{x \rightarrow (d+l_2)^+} \sqrt{2(x-d-l_2)}. \tau_{lyz}^R = \frac{c_{44}}{\sqrt{\pi} l_2} \sum_{n=0}^{\infty} a_n \frac{\Gamma(n+1+1/2)}{n!}, \quad (49)$$

$$K_{Du}^R = \lim_{x \rightarrow (d+l_2)^+} \sqrt{2(x-d-l_2)}. D_{ly}^R = \frac{e_{15}}{\sqrt{\pi} l_2} \sum_{n=0}^{\infty} a_n \frac{\Gamma(n+1+1/2)}{n!} = \frac{e_{15}}{c_{44}} K_u^R. \quad (50)$$

上部裂纹左尖端应力强度因子  $K_u^L$  和电位移强度因子  $K_{Du}^L$  可分别表示为

$$K_u^L = \lim_{x \rightarrow (d-l_2)^-} \sqrt{2|x-d+l_2|}. \tau_{lyz}^L = \frac{c_{44}}{\sqrt{\pi} l_2} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n a_n \frac{\Gamma(n+1+1/2)}{n!}, \quad (51)$$

$$K_{Du}^L = \lim_{x \rightarrow (d-l_2)^-} \sqrt{2|x-d+l_2|}. D_{ly}^L = \frac{e_{15}}{\sqrt{\pi} l_2} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n a_n \frac{\Gamma(n+1+1/2)}{n!} = \frac{e_{15}}{c_{44}} K_u^L. \quad (52)$$

下部裂纹右尖端应力强度因子  $K_l^R$  和电位移强度因子  $K_{Dl}^R$  可分别表示为

$$K_l^R = \lim_{x \rightarrow l_1^+} \sqrt{2(x-l_1)}. \tau_{2yz}^R = \frac{c_{44}}{\sqrt{\pi} l_1} \sum_{n=0}^{\infty} b_n \frac{\Gamma(n+1+1/2)}{n!}, \quad (53)$$

$$K_{Dl}^R = \lim_{x \rightarrow l_1^+} \sqrt{2(x-l_1)}. D_{2y}^R = \frac{e_{15}}{\sqrt{\pi} l_1} \sum_{n=0}^{\infty} b_n \frac{\Gamma(n+1+1/2)}{n!} = \frac{e_{15}}{c_{44}} K_l^R. \quad (54)$$

下部裂纹左尖端应力强度因子  $K_l^L$  和电位移强度因子  $K_{Dl}^L$  可分别表示为

$$K_l^L = \lim_{x \rightarrow -l_1^-} \sqrt{2|x+l_1|}. \tau_{2yz}^L = \frac{c_{44}}{\sqrt{\pi} l_1} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n b_n \frac{\Gamma(n+1+1/2)}{n!}, \quad (55)$$

$$K_{Dl}^L = \lim_{x \rightarrow -l_1^-} \sqrt{2|x+l_1|}. D_{2y}^L = \frac{e_{15}}{\sqrt{\pi} l_1} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n b_n \frac{\Gamma(n+1+1/2)}{n!} = \frac{e_{15}}{c_{44}} K_l^L. \quad (56)$$

## 4 数值计算和讨论

从文献[13-16, 20]中的研究方法可知, 可以利用 Schmidt 方法来求解方程(35)、(36), 且选取级数的前10项就可以满足有关精度. 应力强度因子  $K$  和电位移强度因子  $K_D$  可以利用数值方法求得. 材料假定是经济实用的 PZT-4 压电材料, 材料常数分别为  $c_{44} = 2.56 \times 10^{10} \text{ N/m}^2$ ,  $e_{15} = 13.44 \text{ C/m}^2$  和  $\epsilon_{11} = 60.0 \times 10^{10} \text{ C/(V}\cdot\text{m)}$ . 有关结果可以用图2至图8表示出来. 从这些图中可以得出如下有益结论:

(i) 本文研究的问题与文献[14]研究的问题是不同的, 文献[14]研究的问题是本文研究问题的一种特殊形式. 文献[14]研究的问题是一对称问题, 而本文研究的问题是一非对称问题. 当  $l_1 = l_2$  和  $d = 0.0$  时, 本文研究的问题可以退化成文献[14]中研究的问题, 在这种情况下, 如图2所示, 4个裂纹尖端的强度因子是相同的.

(ii) 从文中的表达式可以看出, 裂纹尖端的应力奇异性和电位移奇异性, 与一般的弹性材料中裂纹尖端的应力奇异性相同. 其电-弹性之间的耦合特性可以从方程(49)至方程(56)



的表达式中获得. 电位移强度因子可以直接通过方程(50)、(52)、(54)和方程(56), 从应力强度因子的结果中获得. 如图3至图4所示, 对于裂纹尖端处的电场, 它们具有与应力场相同的变化趋势, 但其幅值是不同的. 如图4所示, 电位移场的幅值是非常小的.

(iii) 从方程(35)至方程(40)可知, 应力强度因子与材料常数无关. 但电位移强度因子与材料的剪切模量和压电常数有关. 应力强度因子和电位移强度因子与裂纹长度、裂纹中心间的水平距离  $d$  和平行裂纹间距离有关.

(iv) 如图3和图4所示, 两平行裂纹的应力强度因子和电位移强度因子随着两平行裂纹间的距离的增加而增加, 这一现象被称作“屏蔽”效应<sup>[21]</sup>. 当  $h > 5.5$  时, 应力强度因子趋近于1, 这等于无限大平面中反平面剪切单裂纹的结果, 也就是当  $h > 5.5$  时裂纹间的相互作用将变得很小.

(v) 从图4和方程(50)、(52)、(54)和方程(56)可知, 电可导通边界条件下的电位移强度因子远小于电不可导通边界条件下的电位移强度因子.

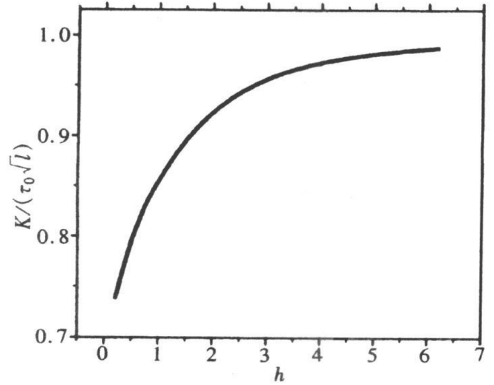


图2 应力强度因子随  $h$  的变化情况  
( $l_1 = l_2 = 1.0$  和  $d = 0.0$ )

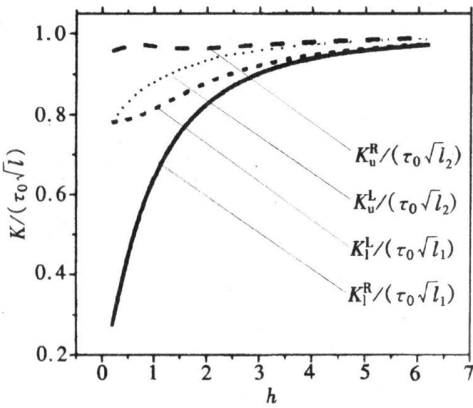


图3 应力强度因子随  $h$  的变化情况  
( $l_1 = 1.0, l_2 = 1.5$  和  $d = 0.5$ )

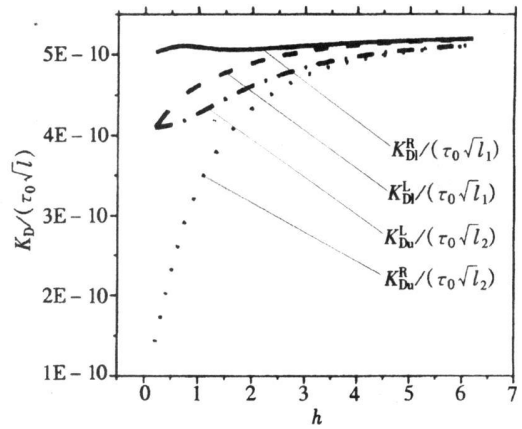


图4 电位移强度因子随  $h$  的变化情况  
( $l_1 = 1.0, l_2 = 1.5$  和  $d = 0.5$ )

(vi) 如图5所示可得, 上部裂纹的右尖端与下部裂纹的左尖端的应力强度因子随裂纹中心间的水平距离增大而增大, 而后当  $d \approx 2.0$  时达到最大值, 随后逐渐变小, 最后上部裂纹的右尖端与下部裂纹的左尖端的应力强度因子随裂纹中心间的水平距离  $d$  增加而增大并趋近于单位1, 这等于无限大平面中反平面剪切单裂纹的结果. 但如图5所示, 对于上部裂纹的左尖端与下部裂纹的右尖端的应力强度因子随两裂纹中心间的水平距离  $d$  增大而减小, 而后在  $d \approx 0.6$  时达到最小值, 随后逐步增大, 最后上部裂纹的左尖端与下部裂纹的右尖端的应力强度因子随裂纹中心间的水平距离  $d$  的增加而增大并趋近于单位1, 也就是当  $d > 5.5$  时裂纹间的相互作用将变得很小. 在这种情况下, 4个裂纹尖端的应力强度因子都将随裂纹中心间的水平距离  $d$  的增加而增大并趋近于单位1, 这等于无限大平面中反平面剪切单裂纹的结果.

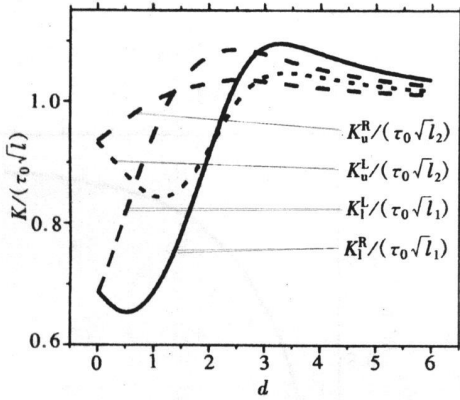


图 5 应力强度因子随  $d$  的变化情况  
( $l_1 = 1.0, l_2 = 1.5$  和  $h = 1.0$ )

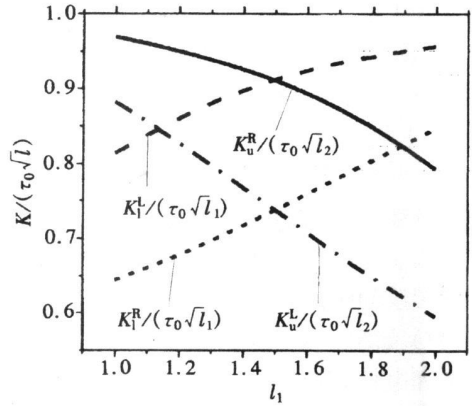


图 6 应力强度因子随  $l_1$  的变化情况  
( $h = 1.0, l_2 = 1.5$  和  $d = 0.5$ )

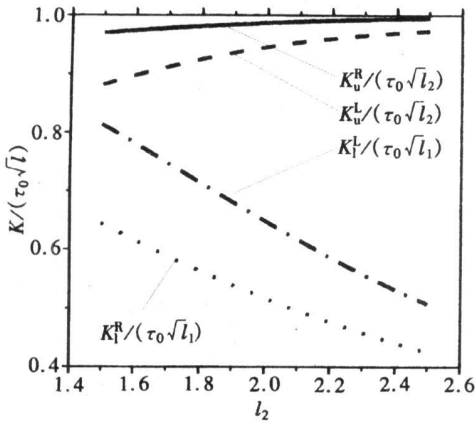


图 7 应力强度因子随  $l_2$  的变化情况  
( $h = 1.0, l_1 = 1.0$  和  $d = 0.5$ )

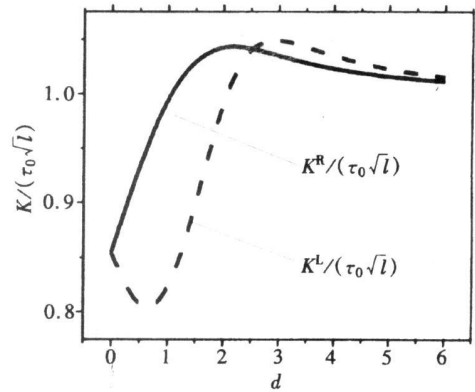


图 8 应力强度因子随  $d$  的变化情况  
( $l_1 = l_2 = 1.0$  和  $h = 1.0$ )

(vii) 如图 6 所示, 可得上部裂纹的应力强度因子随下部裂纹长度的增加而减小, 而下部裂纹的应力强度因子随下部裂纹长度的增加而增加. 如图 7 所示, 可得上部裂纹的应力强度因子随上部裂纹长度的增加而增加, 而下部裂纹的应力强度因子随上部裂纹长度的增加而减小. 上部裂纹右尖端的应力强度因子大于左尖端的应力强度因子, 而下部裂纹右尖端的应力强度因子却小于左尖端的应力强度因子. 这可能是两平行裂纹间相互作用引起的, 有待于进一步分析.

(viii) 如图 8 所示, 当  $l_1 = l_2$  时可得上部裂纹右尖端的应力强度因子等于下部裂纹左尖端的应力强度因子, 上部裂纹左尖端的应力强度因子等于下部裂纹右尖端的应力强度因子, 即当  $l_1 = l_2$  时,  $K_u^L = K_l^R = K^L$  和  $K_u^R = K_l^L = K^R$ . 另外可得, 上部裂纹右尖端的应力强度因子随着两裂纹中心间的水平距离  $d$  增大而增大. 但对于上部裂纹左尖端的应力强度因子随两裂纹中心间的水平距离增大而减小, 而后在  $d \approx 0.6$  时达到以最小值, 随后逐步增大. 最后上部裂纹的左尖端与下部裂纹的右尖端的应力强度因子随裂纹中心间的水平距离  $d$  的增加而增大并趋近于单位 1, 这也表明当  $d > 5.5$  时, 两平行裂纹间的相互作用将变得很小.

## [参 考 文 献]

- [1] Beom H G, Atluri S N. Near-tip fields and intensity factors for interfacial cracks in dissimilar anisotropic piezoelectric media[J]. *International Journal of Fracture*, 1996, **75**(2): 163-183.
- [2] Gao H J, Zhang T Y, Tong P. Local and global energy rates for an elastically yielded crack in piezoelectric ceramics[J]. *Journal of Mechanics and Physics of Solids*, 1997, **45**(2): 491-510.
- [3] Han X L, WANG Tzu-chiang. Interacting multiple cracks in piezoelectric materials[J]. *International Journal of Solids and Structures*, 1999, **36**(27): 4183-4202.
- [4] Yu S W, Chen Z T. Transient response of a cracked infinite piezoelectric strip under anti-plane impact[J]. *Fatigue of Engineering Materials and Structures*, 1998, **21**(3): 1381-1388.
- [5] Zhang T Y, Hack J E. Mode-III cracks in piezoelectric materials[J]. *Journal of Applied Physics*, 1992, **71**(4): 5865-5870.
- [6] Sih G C, Zuo J Z. Energy density formulation and interpretation of cracking behavior for piezoelectric ceramics[J]. *Theoretical and Applied Fracture Mechanics*, 2000, **34**(2): 123-141.
- [7] Deeg W E F. The analysis of dislocation, crack and inclusion problems in piezoelectric solids[D]. Ph D thesis. California: Stanford University, 1980.
- [8] Pak Y E. Crack extension force in a piezoelectric material[J]. *Journal of Applied Mechanics*, 1990, **57**(3): 647-653.
- [9] Han J J, Chen Y H. Multiple parallel cracks interaction problem in piezoelectric ceramics[J]. *International Journal of Solids and Structures*, 1999, **36**(6): 3375-3390.
- [10] Parton V S. Fracture mechanics of piezoelectric materials[J]. *Acta Astronautica*, 1976, **3**(4): 671-683.
- [11] Hao T H, Shen Z Y. A new electric boundary condition of electric fracture mechanics and its applications[J]. *Engineering Fracture Mechanics*, 1994, **47**(6): 793-802.
- [12] Soh A K, Fang D N, Lee K L. Analysis of a bi-piezoelectric ceramic layer with an interfacial crack subjected to anti-plane shear and in-plane electric loading[J]. *European Journal of Mechanics, A Solid*, 2000, **19**(6): 961-977.
- [13] Zhou Z G, Wang B. The behavior of two parallel symmetry permeable interface cracks in a piezoelectric layer bonded to two half piezoelectric materials planes[J]. *International Journal of Solids and Structures*, 2002, **39**(17): 4485-4500.
- [14] 周振功, 王彪. 压电材料中两平行对称可导通裂纹断裂性能分析[J]. *应用数学和力学*, 2002, **23**(12): 1211-1219.
- [15] 孙建亮, 周振功, 王彪. 压电材料中两平行不相等界面裂纹的动态特性研究[J]. *应用数学和力学*, 2005, **26**(2): 145-154.
- [16] Sun J L, Zhou Z G, Wang B. Dynamic behavior of unequal parallel permeable interface multi-cracks in a piezoelectric layer bonded to two piezoelectric materials half planes[J]. *European Journal of Mechanics, A Solids*, 2004, **23**(6): 993-1005.
- [17] Morse P M, Feshbach H. *Methods of Theoretical Physics* [M]. Vol 1. New York: McGraw-Hill, 1958, 828-930.
- [18] Gradshteyn I S, Ryzhik I M. *Table of Integral, Series and Products* [M]. New York: Academic Press, 1980, 1035-1037.
- [19] Erdelyi A. *Tables of Integral Transforms* [M]. Vol 1. New York: McGraw-Hill, 1954, 34-89.
- [20] 周振功, 王彪. 压电电压磁复合材料中一对平行裂纹对弹性波的散射[J]. *应用数学和力学*, 2006, **27**(5): 519-526.

- [21] Ratwani M, Gupta G D. Interaction between parallel cracks in layered composites[J]. International Journal of Solids and Structures, 1974, 10(7): 701-708.

## Basic Solution of Two Parallel Non-Symmetric Permeable Cracks in Piezoelectric Materials

ZHOU Zhen-gong<sup>1</sup>, WANG Biao<sup>2</sup>

(1. Center for Composite Materials, Harbin Institute of Technology,  
Harbin 150001, P. R. China;

2. School of Physics and Engineering, Sun Yat-Sen University,  
Guangzhou 510275, P. R. China)

**Abstract:** The behavior of two parallel non-symmetric cracks in piezoelectric materials subjected to the anti-plane shear loading is studied by the Schmidt method for the permeable crack electric boundary conditions. Through the Fourier transform, the present problem can be solved with two pairs of dual integral equations in which the unknown variables are the jumps of displacements across crack surfaces. To solve the dual integral equations, the jumps of displacements across crack surfaces were directly expanded in a series of Jacobi polynomials. Finally, the relations between electric displacement intensity factors and stress intensity factors at crack tips can be obtained. Numerical examples are provided to show the effect of the distance between two cracks upon stress and electric displacement intensity factors at crack tips. Contrary to the impermeable crack surface condition solution, it is found that electric displacement intensity factors for the permeable crack surface conditions are much smaller than those for the impermeable crack surface conditions. At the same time, it can be found that the crack shielding effect is also present in the piezoelectric materials.

**Key words:** piezoelectric materials; parallel non-symmetric cracks; the dual-integral equations; intensity factor