

# 基于有限分析法的平面铅垂壁羽流的相似解<sup>\*</sup>

槐文信, 曾玉红

(武汉大学 水资源与水电工程科学国家重点实验室, 武汉 430072)

(黄永念推荐)

**摘要:** 应用计及浮力对湍动能及其耗散率的影响的  $k-\epsilon$  湍流模式, 结合有限分析法对密度差引起的平面铅垂紊动壁羽流进行了数值分析. 在均匀环境条件下控制该类流动的连续性方程、流动方向的动量方程、浓度扩散方程、湍动能及其耗散率方程存在相似解. 考虑到浮力通量守恒条件, 应用有限分析法给出了铅直壁羽流的速度、相对密度差、湍动能及耗散率的分布, 进而给出了各物理量最大值沿主流方向变化的关系式. 湍流 Schmidt 数为 1.0 时的计算结果与实验资料吻合较好, 表明应用有限分析法分析铅垂平面羽流是有效的, 即在分析壁羽流时浮力对湍动能及其耗散率的影响应该予以考虑.

**关键词:** 壁羽流; 相似性; 湍流模式; 有限分析法; 浮力效应

**中图分类号:** O358      **文献标识码:** A

## 引 言

静止环境中的壁羽流是一种常见的水流现象, 在实际工程中有着广泛的应用. 国内外有很多学者做过这方面的物理实验及数值模拟研究. Ellison 和福 (1959) 对多种角度的倾斜壁羽流进行了试验研究<sup>[1]</sup>, 测得了速度和密度的分布, 日本学者 Fukuoka 等人(1980) 和 Yoshida (1982) 对该类流动也进行了试验研究<sup>[2-3]</sup>. Grella 和 Faeth(1975) 对铅直壁羽流进行了详细的试验研究<sup>[4]</sup>, 给出了流速和密度差的测量资料, 为数值研究铅垂壁羽流提供了很好的对比基础. 在数值分析方面, Ljuboja 和 Rodi(1981) 采用代数应力模型对铅垂壁羽流进行了数值计算<sup>[5]</sup>, 与 Grella 和 Faeth 的试验资料进行了对比, 取得了满意的结果. 在羽流的相似解研究方面, Pauly 等人(1985) 给出了平面射流和径向射流的相似解<sup>[6]</sup>. 福 (1989) 给出了平面射流和羽流的相似解, 但在分析平面羽流时忽略了浮力对湍动能和耗散率的影响<sup>[7]</sup>. 槐文信和李炜 (1992, 1993) 给出了考虑浮力对湍动能和耗散率影响的射流和羽流的相似解<sup>[8-9]</sup>. 对于壁羽流的研究, 福 (1988) 运用  $k-\epsilon$  湍流模式并考虑流动方向上的浮力通量守恒条件, 计及浮力对湍动能和耗散率的影响, 基于有限差分法给出了倾斜壁羽流的相似解, 但其计算结果与实验资料相比较, 存在较大差距<sup>[10]</sup>. 目前对羽流的数值模拟, 较多学者仅考虑浮力对运动方程的影响, 而没有考虑对湍动及其耗散率方程的影响. 本文认为, 这一浮力效应对湍动能及其耗散率有

\* 收稿日期: 2006-05-19; 修订日期: 2007-01-25

基金项目: 国家自然科学基金资助项目(50479038; 50679061)

作者简介: 槐文信(1963—), 男, 陕西乾县人, 教授, 博士(联系人. Tel: + 86-27-68772206; Fax: + 86-27-68772310; E-mail: wxhuai@whu.edu.cn).

着重要的作用. 因此, 本文应用  $k - \varepsilon$  湍流模式, 并计及浮力效应, 应用有限分析法给出考虑因素较为全面的铅垂壁羽流的相似解以及其物理量沿程变化的关系式.

### 1 数学模型

如图 1 所示, 在坐标原点处沿铅垂壁面注入密度为  $\rho$  的流体, 环境流体的密度为  $\rho_0$  ( $\rho > \rho_0$ ), 从而形成铅直壁卷流. 考虑流体为不可压缩, 且两种流体的密度差较小, 不致引起流体性质的改变. 取  $x$  坐标为重力加速度方向,  $z$  坐标与壁面垂直,  $u$  和  $w$  分别表示沿  $x$  和  $z$  方向的速度分量. 假定流动变化缓慢, 属于边界层型流动. 根据 Boussinesq 假定, 采用标准  $k - \varepsilon$  湍流模式, 且考虑浮力作用, 则描述该流动的控制方程为

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0, \tag{1}$$

$$u \frac{\partial u}{\partial x} + w \frac{\partial w}{\partial z} = \frac{\rho}{\rho_0} g + \frac{\partial}{\partial z} \left( \nu_t \frac{\partial u}{\partial z} \right), \tag{2}$$

$$u \frac{\partial c}{\partial x} + w \frac{\partial c}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{\nu_t}{\sigma_c} \frac{\partial c}{\partial z} \right), \tag{3}$$

$$u \frac{\partial k}{\partial x} + w \frac{\partial k}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{\nu_t}{\sigma_k} \frac{\partial k}{\partial z} \right) + \nu_t \left( \frac{\partial u}{\partial z} \right)^2 + Rg \frac{\nu_t}{\sigma_c} \frac{\partial c}{\partial z} - \varepsilon, \tag{4}$$

$$u \frac{\partial \varepsilon}{\partial x} + w \frac{\partial \varepsilon}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{\nu_t}{\sigma_\varepsilon} \frac{\partial \varepsilon}{\partial z} \right) + C_{1\varepsilon} \frac{\varepsilon}{k} \left\{ \nu_t \left( \frac{\partial u}{\partial z} \right)^2 + (1 - C_{3\varepsilon}) Rg \frac{\nu_t}{\sigma_c} \frac{\partial c}{\partial z} \right\} - C_{2\varepsilon} \frac{\varepsilon^2}{k}, \tag{5}$$

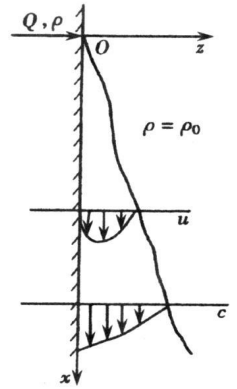


图 1 附壁羽流示意图

式中:  $g$  为重力加速度,  $R$  为密度差与浓度的比值,  $Rc$  为相对密度差,  $\nu_t$  为涡粘性系数,  $\nu_t = C_{\mu} k^2 / \varepsilon$ ,  $k$  为湍动能,  $\varepsilon$  为耗散率.

模型中各常系数值采用如下:

$$C_{1\varepsilon} = 1.44, C_{2\varepsilon} = 1.92, C_{3\varepsilon} = 0.08, C_{\mu} = 0.09, \sigma_c = 1.0, \sigma_k = 1.3, \sigma_\varepsilon = 0.8 \sim 1.2.$$

### 2 相似分析

对于平面问题, 引入流函数  $\psi$ , 则由流函数的定义

$$u = \partial \psi / \partial z, w = - \partial \psi / \partial x.$$

在均匀环境中, 设相似变量

$$\eta = \alpha x^{-l},$$

同时引入流函数、浓度、湍动能及其耗散率的相似函数, 分别记为  $F(\eta)$ 、 $G(\eta)$ 、 $K(\eta)$ 、 $E(\eta)$ , 并设有如下关系:

$$\psi = b x^m F(\eta), c = c_* x^n G(\eta), k = d x^p K(\eta), \varepsilon = e x^q E(\eta),$$

从而可以得出以下关系式:

$$\frac{\partial \eta}{\partial x} = - \frac{l}{x} \eta, \frac{\partial \eta}{\partial z} = \alpha^{-l}, \frac{\partial}{\partial x} = - \frac{l}{x} \eta \frac{d}{d\eta}, \frac{\partial}{\partial z} = \alpha^{-l} \frac{d}{d\eta},$$

$$u = \frac{\partial \psi}{\partial z} = a b x^{m-1} F', w = - \frac{\partial \psi}{\partial x} = b x^{m-1} (l \eta F' - m F),$$

可得

$$a^2 b^2 x^{2m-2l-1} \left\{ (m-l) F'^2 - m F F'' \right\} = R g c_* x^n G + C_{\mu} \frac{a^3 b d^2}{e} x^{2p+m-q-3l} \left\{ F'' \left[ \frac{2 K K'}{E} - \frac{K^2 E'}{E^2} \right] + \frac{K^2}{E} F \right\}, \tag{6}$$

$$abc^* x^{m+n-l-1} (nF'G - mFG') = \frac{C_{1\mu}}{\sigma_1} \frac{a^2 c^* d^2}{e} x^{2p-q+n-2l} \left\{ \left[ \frac{2KK'}{E} - \frac{K^2 E'}{E^2} \right] G' + \frac{K^2 G''}{E} \right\}, \quad (7)$$

$$abd x^{m+p-l-1} (pKF' - mFK') = \frac{C_{1\mu}}{\sigma_k} \frac{a^2 d^3}{e} x^{3p-q-2l} \left\{ K' \left[ \frac{2KK'}{E} - \frac{K^2 E'}{E^2} \right] + \frac{K^2 K''}{E} \right\} + C_{1\mu} \frac{a^4 b^2 d^2}{e} x^{2p-q+2m-4l} \frac{K^2}{E} F''^2 + R_g \frac{C_{1\mu}}{\sigma_1} \frac{ac^* d^2}{e} x^{2p-q+n-l} \frac{K^2}{E} G' - ex^q E, \quad (8)$$

$$abex^{m+q-l-1} (qEF' - mFE') = \frac{C_{1\mu}}{\sigma_\varepsilon} a^2 d^2 x^{2p-2l} \left\{ E' \left[ \frac{2KK'}{E} - \frac{K^2 E'}{E^2} \right] + \frac{K^2 E''}{E} \right\} + C_{1\mu} C_{1a} a^4 b^2 dx^{p+2m-4l} KF''^2 + C_{1\varepsilon} (1 - C_{3\varepsilon}) R_g \frac{C_{1\mu}}{\sigma_1} ac^* dx^{n-1} G' \frac{K^2}{E} - C_{2\varepsilon} \frac{e^2}{d} x^{2q-p} \frac{K^2}{E}. \quad (9)$$

因浮力通量沿主流方向守恒, 则

$$Q_c = \int_0^\infty uc dz = \text{const},$$

$$\text{所以 } Q_c = \int_0^\infty abx^{m-l} F' c^* x^n G \frac{\partial z}{\partial \eta} d\eta = bc^* x^{m+n} \int_0^\infty F' G d\eta. \quad (10)$$

方程存在相似解, 则要求

$$2m - 2l - 1 = n = n + l - 1 = 2p + m - q - 3l, \quad (11)$$

$$m + n - l - 1 = 2p + n - q - 2l, \quad (12)$$

$$m + p - l - 1 = 3p - q - 2l = 2p - q + 2m - 4l = q = 2p - q + n - l, \quad (13)$$

$$m + q - l - 1 = 2p - 2l = p + 2m - 4l = 2q - p = n - l. \quad (14)$$

$$m + n = 0. \quad (15)$$

解方程组(11)~(15)得:

$$l = 1, m = 1, n = -1, p = 0, q = -1. \quad (16)$$

方程(6)~(10)存在相似解, 还要求

$$\frac{Q_c}{bc^* I} = \frac{c^* R_g}{a^2 b^2} = \frac{ad^2}{be} = \frac{a^3 bd}{e} = \frac{e}{abd} = 1. \quad (17)$$

解方程组(17)可得

$$a = 1, b = (R_g Q_c / I)^{1/3}, c^* = (Q_c / I)^{2/3} / (R_g)^{1/3}, \quad (18)$$

$$d = (R_g Q_c / I)^{2/3}, e = R_g Q_c / I, \quad (19)$$

式中:  $I = \int_0^\infty F' G d\eta$ , 由此可得相似变量和相似函数的表达式

$$\eta = z/x, \quad (20)$$

$$u = (R_g Q_c / I)^{1/3} F'(\eta) = U_0 F'(\eta), \quad (21)$$

$$c = \frac{(Q_c / I)^{2/3}}{x (R_g)^{1/3}} G(\eta), \quad (22)$$

$$k = (R_g Q_c / I)^{2/3} K(\eta) = U_0^2 K(\eta), \quad (23)$$

$$\varepsilon = (R_g Q_c / I) \frac{1}{x} E(\eta), \quad (24)$$

且由方程(6)~(9)给出的相似函数应满足的常微分方程组为

$$FF'' + (\nu_1 F')' + G = 0, \quad (25)$$

$$F'G + FG' + \frac{1}{\sigma_1}(\nu_1^* G')' = 0, \tag{26}$$

$$FK' + \frac{1}{\sigma_k}(\nu_1^* K')' + \nu_1^* F''^2 + \frac{\nu_1^*}{\sigma_1}G' - E = 0, \tag{27}$$

$$F'E + FE' + \frac{1}{\sigma_\varepsilon}(\nu_1^* E')' + C_{1\varepsilon} \frac{E}{K} \nu_1^* \left[ F''^2 + (1 - C_{3\varepsilon}) \frac{G'}{\sigma_1} \right] - C_{2\varepsilon} \frac{E^2}{K} = 0, \tag{28}$$

式中  $\nu_1^* = C_{\mu}(K^2/E)$ .

### 3 边界条件

在近壁区采用壁函数法, 即  $z = z_0$  处:

当  $z_0^+ < 10$  时,  $u/u_* = z^+$ ; 当  $10 \leq z_0^+ < 50$  时,  $u/u_* = \kappa^{-1} \ln(E_0 z^+)$ ,

式中:  $u_*$  为摩阻流速, 常数  $\kappa = 0.45, E_0 = 9.1, z^+ = zu_*/\nu$ .

$$w = 0, \frac{\partial c}{\partial z} = 0, k = \frac{u_*^2}{\sqrt{C_{\mu}}}, \varepsilon = \frac{u_*^3}{\kappa \varepsilon_0}.$$

$$z \rightarrow \infty \text{ 处: } u = k = \varepsilon = c = 0. \tag{29}$$

上述边界条件可容易转化为相似函数的形式, 这里从略.

### 4 数值计算方法

对式(25)~(28)做变换, 令  $F' = H, d\eta = \nu_1^* d\xi$ , 式(25)~(28)均写成如下的统一形式:

$$\phi_{\xi\xi} = 2B\phi_{\xi} + f. \tag{30}$$

方程(30)是非线性的, 做如下的线性化处理:

$$\phi_{\xi\xi}^n = 2B^n \phi_{\xi}^{n-1} + f^n, \tag{31}$$

上标分别表示  $(n+1)$  次和  $(n)$  次计算值, 为简便起见在下述的分析中不再写出.

对方程(31)应用有限分析法进行计算<sup>[11]</sup>, 设计算区域为  $0 \leq \xi \leq \xi^*$  (通过数值计算试验得出, 取  $\xi^* = 500$  可满足射流扩展所需的计算范围), 取无量纲步长为  $h$ , 则在  $\xi \leq |h|$  的区域内, 方程(31)的解为

$$\phi = a_1(e^{2B\xi} - 1) + b_1 - \frac{f}{2B}\xi. \tag{32}$$

将  $\xi = h, \phi = \phi_{i+1}$  和  $\xi = -h, \phi = \phi_{i-1}$  代入上式求出  $a_1$  和  $b_1$ , 最后得

$$\phi_i = C_{i-1}\phi_{i-1} + C_{i+1}\phi_{i+1} + C_f f, \quad (i = 2, \dots, \xi^*/h), \tag{33}$$

式中  $C_{i-1} = \frac{e^{Bh}}{e^{Bh} + e^{-Bh}}, C_{i+1} = \frac{e^{-Bh}}{e^{Bh} + e^{-Bh}}, C_f = (C_{i+1} - C_{i-1}) \frac{h}{2B}$ .

在整个计算域中, 系数矩阵为三对角矩阵, 采用追赶法求解.

### 5 结果与讨论

#### 5.1 计算结果

为了检验本文的模型和计算方法, 选用 Grella 和 Faeth<sup>[4]</sup> 的 4 种实验工况进行计算(参见表 1). 图 2 给出了对应的 4 种工况铅垂壁羽流的各物理量相似函数. 为了分析  $\sigma_1$  对流速和相对密度差的影响, 图 2 中分别绘出了计算得到的 4 种工况、3 种不同  $\sigma_1$  取值下速度相似函数分布和相对密度差分布, Grella 和 Faeth<sup>[4]</sup> 的实验值也绘在图中. 可以看出两者比较吻合. 图 2 中还绘出了工况 4 时, 福 (1988)<sup>[10]</sup> 的计算结果( $\sigma_1 = 1.0$ ). 可以看出, 流速在靠近壁面处, 两者差别较大, 而本文的计算结果更接近实验值. 这说明基于有限分析法得出的羽流相似解是

有效的。

从图 2 结果还可看出,  $\sigma_1$  的取值变化对流速分布的影响不敏感, 而对相对密度差的分布影响较大, 且当  $\sigma_1 = 1.0$  时计算结果更接近实验结果。

表 1 Grela 和 Faeth<sup>[4]</sup> 所做实验工况

实验工况	壁面倾角 $\theta/(\circ)$	初始流量 $Q_c/(\text{cm}^2/\text{s})$	$R = (\Delta\rho/\rho)_0$	沿流向距离 $x/\text{m}$
1	90.0	11.06	0.082 3	0.61
2	90.0	4.26	0.020 0	1.22
3	90.0	10.11	0.033 3	1.22
4	90.0	24.93	0.059 9	1.22

图 3 和图 4 中还绘出了工况 4 当  $\sigma_1 = 1.0$  时, 壁羽流湍动能、耗散率以及紊动粘性系数的分布。从图中可以看出其变化规律是符合其物理机制的。

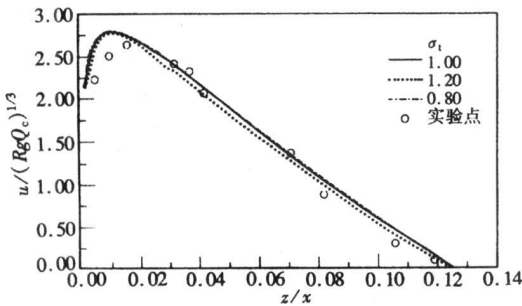
## 5.2 物理量最大值沿主流向的变化

由式 (20) ~ (24) 可得出各物理量沿主流向的变化规律, 通过对图 2、图 3、图 4 进行进一步的分析表明: 当  $\eta = z/x = 0.01, 0.0, 0.055, 0.0, 0.066$  时,  $F', G, K, E, V_t$  分别取最大值。由此得到各物理量最大值沿主流向的分布规律为

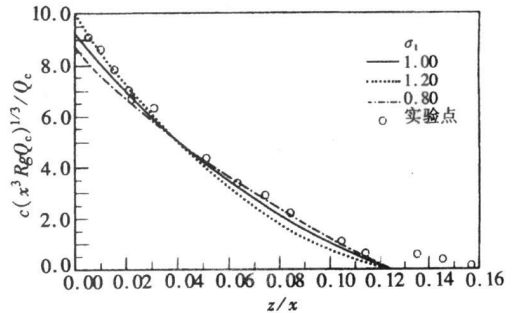
$$u_m = 2.75 (RgQ_c)^{1/3}, \quad c_m = 8.5Q_c^{2/3}/(x^3Rg)^{1/3}, \quad k_m = 0.47 (RgQ_c)^{2/3}, \\ \varepsilon_m = 5.3 RgQ_c/x, \quad V_{tm} = 0.035x (RgQ_c)^{1/3}.$$

## 5.3 边界层厚度与羽流宽度

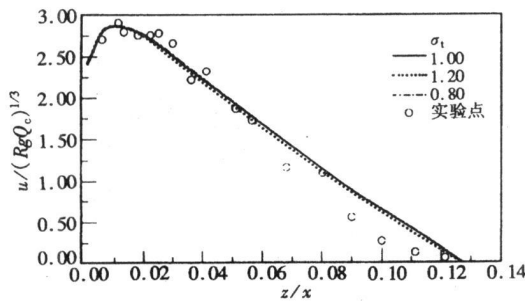
将壁羽流最大速度出现的位置到固壁的距离定义为边界层的厚度  $\delta$ , 从图 2 中可以得出  $\delta/x = 0.01$ , 即边界层厚度随着距喷口的  $x$  向的距离的增加而增加。将羽流的整个宽度定义



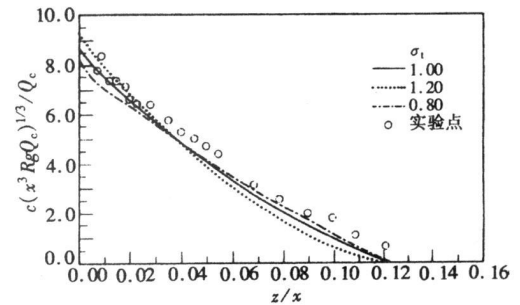
(a) 工况 1 的流速分布



(b) 工况 1 的相对密度差分布

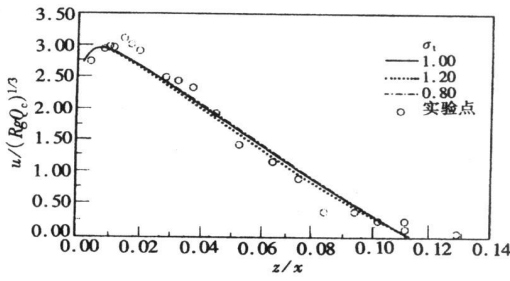


(c) 工况 2 的流速分布

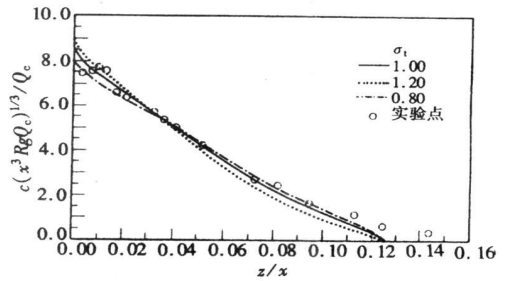


(d) 工况 2 的相对密度差分布

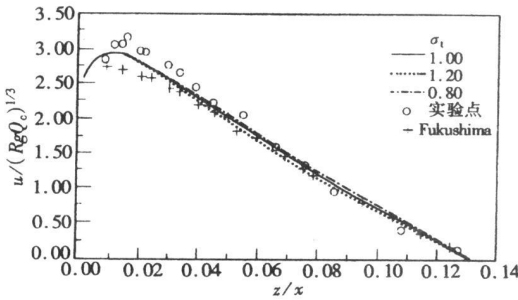
为固壁到羽流速度为  $1/2$  最大速度处的距离, 用  $b$  来表示, 从图 2 中容易得出  $b \approx 0.07x$ ,  $b$  同



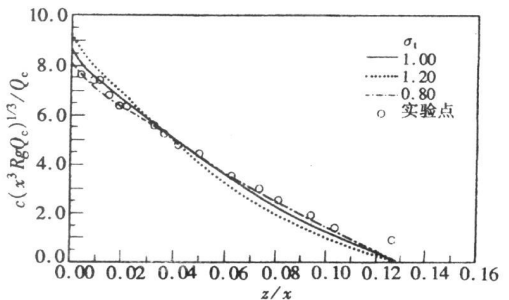
(e) 工况 3 的流速分布



(f) 工况 3 的相对密度差分布



(g) 工况 4 的流速分布



(h) 工况 4 的相对密度差分布

图 2 数值模拟的流速分布和相对密度差分布与实验结果比较

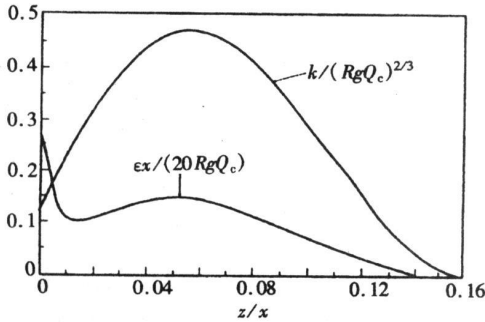


图 3 湍动能和耗散率分布图

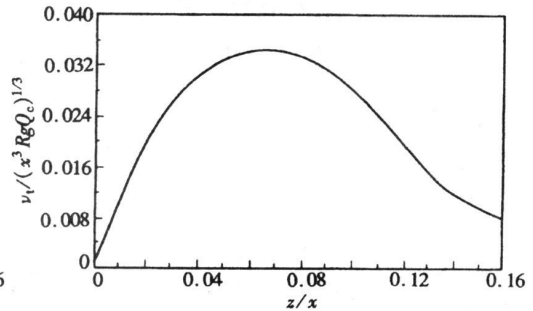


图 4 紊动粘性系数分布图

样随距喷口的  $x$  向的距离的增加而线性增加, 且  $\delta \approx b/7$ .

## 6 结 论

本文应用标准  $k - \epsilon$  湍流模式, 考虑浮力对湍动能及其耗散率的影响, 采用相似分析方法对 4 种工况下的铅垂壁羽流进行了计算. 与福<sup>[10]</sup>的计算结果相比, 本文计算得到的速度、相对密度差、湍动能及耗散率的分布与 Grella 和 Faeth 的实验结果吻合得更好, 从而证实了本文应用有限分析法分析铅垂平面羽流是正确有效的, 同时说明了在壁羽流的相似分析中, 考虑浮力对湍动能及其耗散率影响是十分必要的. 进而对铅垂壁羽流的流动特性进行了分析, 给出了各物理量的沿程变化公式.

## [参 考 文 献]

- [1] Ellison T H, Turner J S. Turbulent entrainment in stratified flows[J]. J Fluid Mech, 1959, 6(2): 423-448.
- [2] 福 捷二, 福 介, 中村健一. 二次元貯水池密度流の潜り る水深よ 界面形状[J]. 土木学会论文报告集, 1980, 302(1): 55-65.
- [3] Yoshida J. On the velocity fields and their variations in the two-dimensional forced plumes and the behavior of the two-dimensional dual plumes[D]. Tokyo: University of Tokyo, 1982.
- [4] Grella J J, Faeth G M. Measurements in a two-dimensional thermal plume along a vertical adiabatic wall[J]. J Fluid Mech, 1975, 71(4): 701-710.
- [5] Ljuboja M, Rodi W. Prediction of horizontal and vertical turbulent buoyant wall jet[J]. ASME Journal of Heat Transfer, 1981, 103(2): 343-349.
- [6] Paullay A J, Mehtlik R E, Rubel A, et al. Similarity solutions for plane and radial jets using a  $k-\epsilon$  turbulence model[J]. Trans ASCE J Fluid Engineering, 1985, 107(3): 79-85.
- [7] 福 介.  $k-\epsilon$  乱流 ツ よに 平面二次元密度噴流と 噴流の相似解析[J]. 土木学会论文报告集, 1989, 405(5): 147-154.
- [8] 槐文信, 李炜. 圆形射流和卷流的相似解[J]. 应用数学和力学, 1993, 14(7): 615-623.
- [9] 槐文信, 李炜. 径向射流的相似分析[J]. 水利学报, 1992, 23(9): 50-58.
- [10] 福 介. 乱流 ツ よに 倾斜壁面密度噴流の 解析[J]. 土木学会论文报告集, 1988, 399(10): 65-74.
- [11] 槐文信, 赵明登, 童汉毅. 河道及近海水流的数值模拟[M]. 北京: 科学出版社, 2005.

## Similarity Solutions of Vertical Plane Wall Plume Based on Finite Analytic Method

HUAI Wen-xin, ZENG Yu-hong

(State Key Laboratory of Water Resources and Hydropower Engineering Science,  
Wuhan University, Wuhan 430072, P. R. China)

**Abstract:** The turbulent flow of vertical plane wall plume with concentration variation was studied with the finite analytical method. The  $k-\epsilon$  model with the effect of buoyancy on turbulent kinetic energy and its dissipation rate was adopted. There were similarity solutions in the uniform environment for the system of equations including the equation of continuity, the equation of momentum along the flow direction and concentration, and equations of  $k$ ,  $\epsilon$ . The finite analytic method was applied to obtain the similarity solution. The calculated data of velocity, relative density difference, the kinetic energy of turbulence and its dissipation rate distribution for vertical plane plumes are in good agreement with the experimental data at the turbulent Schmidt number equal to 1.0. The variations of their maximum value along the direction of main flow were also given. It shows that the present model with numerical method is good, i. e., the effect of buoyancy on turbulent kinetic energy and its dissipation rate should be taken into account. The finite analytic method is effective.

**Key words:** wall plume; similarity; turbulence model; finite analytic method; buoyancy effect