

Ivlev 型捕食系统的全局动力学分析*

肖海滨^{1,2}

(1. 宁波大学 数学系, 浙江 宁波 315211;

2. 南京大学 数学系, 南京 210093)

(李继彬推荐)

摘要: 研究捕食者与食饵均具有线性密度制约的 Ivlev 型捕食动力系统. 应用常微分方程定性方法, 得到了正平衡点的全局稳定性和非小振幅极限环的存在唯一性的充分条件. 特别地, 在一定条件下, 证明了极限环的存在唯一性与正平衡点的局部不稳定性是等价的, 正平衡点的局部稳定性隐含它的全局稳定性, 因此, 系统的全局动力学性质完全由正平衡点的局部性质所决定.

关键词: 极限环; 全局稳定性; 密度制约; Ivlev 功能反应; 存在唯一性

中图分类号: O175.15 文献标识码: A

引 言

有关 Ivlev 型功能反应的自治捕食动力系统的研究, 已有一些结果^[1-2, 4-5]. 但我们知道, 由于种内斗争的原因, 密度制约是自然界物种一种很普遍的现象, 如早在 1975 年, D. L. De Angelis 等人^[3]就提出了捕食者和食饵均具有线性密度制约的 Beddington-De Angelis 型功能反应的捕食模型

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = ax - \frac{fxy}{b + ux + y} - g_1x^2, \\ \frac{dy}{dt} = \frac{fxy}{b + ux + y} - by - g_2y^2, \end{cases} \quad (*)$$

其中所有参数均为正数, 可国内外有关捕食者和食饵均具有密度制约的捕食动力系统的研究非常鲜见. 本文研究捕食者和食饵均具有线性密度制约的 Ivlev 型功能反应的自治捕食动力系统(已经无维数变换)

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = rx(1-x) - (1 - e^{-ax})y \equiv P(x, y), \\ \frac{dy}{dt} = y[(1 - e^{-ax}) - \delta y - d] \equiv Q(x, y), \end{cases} \quad (1)$$

其中 r, a, δ 和 d 均为正常数, 当 $\delta = 0$ 时, 文献^[1-2]对(1)式作了比较完整的分析, 得到了系统(1)存在唯一稳定极限环的充要条件是

$$a > - \frac{2d + (1-d)\ln(1-d)}{d + (1-d)\ln(1-d)} \ln(1-d).$$

* 收稿日期: 2006-05-12; 修订日期: 2007-01-27

基金项目: 宁波市自然科学基金资助项目(2006A610032)

作者简介: 肖海滨(1973-), 男, 江西南康人, 博士生(E-mail: xiaohaibin@nbu.edu.cn).

文献[4]考虑了食饵具有非线性密度制约的 Ivlev 型功能反应的自治捕食动力系统,研究了正平衡点的稳定性和极限环的存在性,但没有讨论极限环的唯一性. 文献[5]同样研究了食饵具有线性密度制约的 Ivlev 型功能反应的捕食者竞争模型,分析了平衡点的全局稳定性.

1 预备知识

显然, x 轴、 y 轴以及第一象限 R^+ 均为系统(1)的不变集. 考虑到系统(1)的生态学意义,我们仅在第一象限的闭包 $\overline{R^+}$ 讨论. 系统(1)有铅直等倾线 $l_1: y = f_1(x) = [rx(1-x)]/(1-e^{-ax})$ 和水平等倾线 $l_2: y = f_2(x) = (1-e^{-ax}-d)/\delta$, 且

$$f_1'(x) = r \frac{(1-2x) - (1-2x+ax-ax^2)e^{-ax}}{(1-e^{-ax})^2}, f_2'(x) = \frac{ae^{-ax}}{\delta}.$$

在本文,我们作如下基本假设:

$$1 - e^{-a} > d. \quad (2)$$

命题 1 在上述基本假设(2)下,如果下列任一条件成立:

$$(i) d \geq 2(1 - 2e^{-a/2});$$

$$(ii) d < 2(1 - 2e^{-a/2}), \frac{a}{r\delta}[2(1 - 2e^{-a/2}) - d]e^{-a/2} \geq 1 + \frac{2}{a} \ln \left[\frac{1}{2} - \frac{d}{4} \right],$$

$$\text{且 } \frac{1}{r\delta} \left[\left(\frac{1}{2} + \frac{d}{4} \right)^2 - d \left(\frac{1}{2} + \frac{d}{4} \right) \right] < -\frac{1}{a} \ln \left[\frac{1}{2} + \frac{d}{4} \right] - \frac{1}{a^2} \ln^2 \left[\frac{1}{2} + \frac{d}{4} \right];$$

则系统(1)存在唯一的正平衡点 $P_0(x^*, y^*)$, 如图 1 所示.

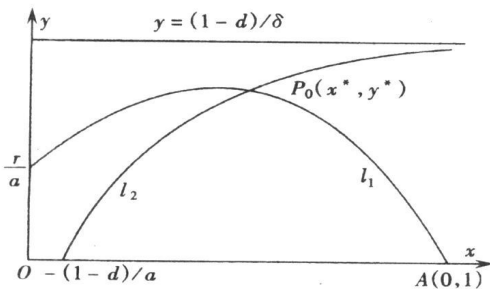


图 1 铅直等倾线 l_1 和水平等倾线 l_2 的图形

证明 由 $1 - e^{-a} > d, f_2(0) = -d/\delta < r/a = \lim_{x \rightarrow 0^+} f_1(x)$ 可以保证存在性, 为证唯一性, 考虑代数方程

$$x(1-x) = \frac{1}{r\delta} [(1 - e^{-ax})^2 - d(1 - e^{-ax})]. \quad (3)$$

令 $f_4(x) = (1/r\delta)[(1 - e^{-ax})^2 - d(1 - e^{-ax})]$, 则 $f_4'(x) = (a/r\delta)[2(1 - e^{-ax}) - d]e^{-ax}, f_4''(x) = (a^2/r\delta)[4e^{-ax} - (2-d)]e^{-ax}$. 简单计算知, $f_4(x)$ 在 $x = x_0 = -(1/a)\ln(1-d/2)$ 达最小值

$-d^2/8, x = -(1/a)\ln(1-d/4)$ 是拐点. 且其在 $(0, x)$ 上是下凹的, 在 $(x, +\infty)$ 上是上凸的.

如果 (i) 成立, 则 $x \geq 1/2$, 注意到 $x(1-x)$ 在 $(0, 1)$ 上是上凸的, 方程(3)在 $(0, 1)$ 内不可能有两个及以上的交点, 而这意味着正平衡点唯一.

如果 (ii) 成立, 则 $x < 1/2$, 当 $x \in (x, 1/2)$ 时, 有

$$f_4'(x) > f_4' \left(\frac{1}{2} \right) = \frac{a}{r\delta} [2(1 - e^{-a/2}) - d]e^{-a/2} \geq 1 + \frac{2}{a} \ln \left[\frac{1}{2} - \frac{d}{4} \right] =$$

$$\frac{d}{dx} [x(1-x)]_{x=x} \geq \frac{d}{dx} [x(1-x)],$$

即有 $f_4'(x) \geq d[x(1-x)]/dx, x \in (x, 1)$,

注意到

$$f_4(x) = \frac{1}{r\delta} \left[\left(\frac{1}{2} + \frac{d}{4} \right)^2 - d \left(\frac{1}{2} + \frac{d}{4} \right) \right] < -\frac{1}{a} \ln \left[\frac{1}{2} + \frac{d}{4} \right] - \frac{1}{a^2} \ln^2 \left[\frac{1}{2} + \frac{d}{4} \right] =$$

$$[x(1-x)]_{x=x^*}.$$

类似 (i) 知, 正平衡点 $P_0(x^*, y^*)$ 存在唯一. 证毕.

本文总假设系统 (1) 有唯一的正平衡点 $P_0(x^*, y^*)$, 即铅直等倾线 $l_1: y = f_1(x) = [rx(1-x)]/(1-e^{-ax})$ 和水平等倾线 $l_2: y = f_2(x) = (1-e^{-ax} - d)/\delta$ 在第一象限内有且仅有一个交点. 如图 1 所示.

很明显, 系统 (1) 有奇点 $O(0, 0)$ 、 $A(0, 1)$ 和 $P_0(x^*, y^*)$. 容易验证 $O(0, 0)$ 、 $A(0, 1)$ 均为鞍点, 它们的稳定流形均在坐标轴上. 系统 (1) 在 $P_0(x^*, y^*)$ 处的线性化系统系数矩阵为

$$\begin{pmatrix} r(1-2x^*) - ay^* e^{-ax^*} - (1-e^{-ax^*}) & \\ ay^* e^{-ax^*} & -\delta y^* \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix},$$

特征方程为 $\lambda^2 - p\lambda + q = 0$, 其中

$$\begin{aligned} p &= a_{11} + a_{22} = r(1-2x^*) - ay^* e^{-ax^*} - \delta y^* = \\ &= \frac{r(1-2x^*) - (1-2x^* + ax^* - a(x^*)^2)e^{-ax^*} - \delta x^*(1-x^*)}{1-e^{-ax^*}} = \\ &= \frac{r f_1'(x^*)(1-e^{-ax^*})^2 - \delta x^*(1-x^*)}{1-e^{-ax^*}}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} q &= a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} = \\ &= -\delta[r(1-2x^*) - ay^* e^{-ax^*}]y^* + a(1-e^{-ax^*})y^* e^{-ax^*} = \\ &= \frac{y^*(1-e^{-ax^*})}{\delta} \cdot \left[\frac{a}{\delta} e^{-ax^*} - \frac{r(1-2x^*) - ay^* e^{-ax^*}}{1-e^{-ax^*}} \right] = \\ &= \frac{y^*(1-e^{-ax^*})}{\delta} \cdot [f_2'(x^*) - f_1'(x^*)]. \end{aligned}$$

据上述分析, 易得下面引理 2.

引理 2 (i) 当 $p < 0$, 即 $f_1'(x^*) < [\delta x^*(1-x^*)]/(1-e^{-ax^*})^2$, $P_0(x^*, y^*)$ 为系统 (1) 的稳定焦点或结点;

(ii) 当 $p > 0$, 即 $f_1'(x^*) > [\delta x^*(1-x^*)]/(1-e^{-ax^*})^2$, $P_0(x^*, y^*)$ 为系统 (1) 的不稳定焦点或结点;

(iii) 当 $p = 0$, 即 $f_1'(x^*) = [\delta x^*(1-x^*)]/(1-e^{-ax^*})^2$, $P_0(x^*, y^*)$ 为系统 (1) 的细焦点.

引理 3 系统 (1) 的所有初值在第一象限内的解正向有界.

证明 记直线 $y = (1-d)/\delta$, $x = 1$, x 轴和 y 轴所围成的有界矩形闭区域为 R_0 , 在直线 $y = (1-d)/\delta$ 上,

$$dy/dt = y[(1-e^{-ax}) - \delta y - d]_{y=(1-d)/\delta} = -((1-d)e^{-ax})/\delta < 0,$$

在直线 $x = 1$ ($y > 0$),

$$dx/dt = [rx(1-x) - (1-e^{-ax})y]_{x=1} = -y(1-e^{-a}) < 0,$$

其上的轨线方向向左. 从而知 R_0 为系统 (1) 的正向不变区域. 若 $((x(0), y(0)) \in R_0$, 则有 $((x(t), y(t)) \in R_0, t > 0$, 若 $((x(0), y(0)) \in R^+ - R_0$ 由于 $R^+ - R_0$ 中没有平衡点或极限环, 必存在 $T > 0$, 使得 $((x(t), y(t)) \in R_0, t > T$. 证毕.

注 1 从 p 的表达式知, 由于 $\delta \neq 0$, 我们不能由铅直等倾线在平衡点 $P_0(x^*, y^*)$ 处的切线斜率 $f_1'(x^*)$ 的符号来判定 $P_0(x^*, y^*)$ 的稳定性, 这是捕食者有密度制约的捕食系统的显著特点.

注2 由引理2知,当我们把式(1)定义的动力系统的相空间限制在第一象限的闭包 $\overline{R^+}$ 时,系统(1)实际上为一耗散系统, R_0 为其一个吸收集.

注3 可能存在的极限环必在该吸收集 R_0 中.

2 主要结果及其证明

定理4 设 $(x - x^*)H(x) < 0, x \in (0, 1)$, 其中

$$H(x) = \frac{rx(1-x)}{1-e^{-ax}} - y^* \left(\frac{e^{ax} - 1}{e^{ax^*} - 1} \right)^{\delta/a},$$

则系统(1)正平衡点 $P_0(x^*, y^*)$ 在第一象限内全局渐进稳定.

证明 对系统(1)作如下一系列非退化变换:

$$x = x - x^*, y = y - y^*, \quad (4)$$

$$x = x^*(e^u - 1), y = y^*(e^v - 1), \quad (5)$$

$$X = u, Y = v - \delta x^* \int_0^u \frac{e^t}{1 - e^{-\alpha x^* e^t}} dt = v - \frac{\delta}{a} \ln \frac{e^{\alpha x^* e^u} - 1}{e^{\alpha x^*} - 1}, \quad (6)$$

$$d\tau = \frac{y^*(1 - e^{-\alpha x^* e^X})}{x^* e^X} \left(\frac{e^{\alpha x^* e^X} - 1}{e^{\alpha x^*} - 1} \right)^{\delta/a} dt. \quad (7)$$

系统(1)变为下列广义 Li nard 系统

$$\frac{dX}{d\tau} = -\phi(Y) - F(X), \quad \frac{dY}{d\tau} = g(X), \quad (8)$$

其中

$$\phi(Y) = e^Y - 1, \quad F(X) = - \left[\frac{rx^* e^X (1 - x^* e^X)}{y^* (1 - e^{-\alpha x^* e^X})} \left(\frac{e^{\alpha x^* e^X} - 1}{e^{\alpha x^*} - 1} \right)^{-\delta/a} - 1 \right],$$

$$g(X) = \left[1 - e^{-\alpha x^* e^X} - d - r \delta \frac{x^* e^X (1 - x^* e^X)}{1 - e^{-\alpha x^* e^X}} \right] \frac{x^* e^X}{y^* (1 - e^{-\alpha x^* e^X})} \left(\frac{e^{\alpha x^* e^X} - 1}{e^{\alpha x^*} - 1} \right)^{-\delta/a},$$

在上述一系列的变换下,系统(1)的平衡点 $P_0(x^*, y^*)$ 变为系统(8)的平衡点 $(0, 0)$,为此,只须证明系统(8)的平衡点 $(0, 0)$ 在区域 $(-\infty, \ln(1/x^*)) \times \mathbf{R}$ 渐进稳定即可. 令

$$V(X, Y) = \int_0^X g(X) dX + \int_0^Y \phi(Y) dY.$$

由 $P_0(x^*, y^*)$ 为系统(1)唯一的正平衡点,即 $g(X)$ 只有一个零点即 $X = 0$,故有 $Xg(X) > 0, X \in (-\infty, \ln(1/x^*))$, $Y\phi(Y) > 0, Y \in \mathbf{R}$ 是显然的,所以, $V(X, Y)$ 是区域 $(-\infty, \ln(1/x^*)) \times \mathbf{R}$ 上的定正函数.

$$\frac{dV}{d\tau} = g(X)X + \phi(Y)Y = g(X)[- \phi(Y) - F(X)] + \phi(Y)g(X) = -g(X)F(X).$$

我们注意到, $(x - x^*)H(x) < 0, x \in (0, 1)$ 隐含 $XF(X) > 0, X \in (-\infty, \ln(1/x^*))$. 事实上

$$(x - x^*)H(x) < 0, \quad x \in (0, 1)$$

$$\Leftrightarrow \ln \frac{x}{x^*} \left[\frac{rx(1-x)}{y^*(1-e^{-ax})} \left(\frac{e^{ax} - 1}{e^{ax^*} - 1} \right)^{-\delta/a} - 1 \right] < 0, \quad x \in (0, 1)$$

$$\Leftrightarrow X \left[\frac{rx^* e^X (1 - x^* e^X)}{y^* (1 - e^{-\alpha x^* e^X})} \left(\frac{e^{\alpha x^* e^X} - 1}{e^{\alpha x^*} - 1} \right)^{-\delta/a} - 1 \right] < 0, \quad X \in \left[-\infty, \ln \frac{1}{x^*} \right)$$

$$\Leftrightarrow XF(X) > 0, \quad X \in \left[-\infty, \ln(1/x^*) \right),$$

故知, $dV/d\tau = -g(X)F(X) < 0, X \in (-\infty, \ln(1/x^*)) - \{0\}$. 由 Liapunov 第二方法知定理结论成立. 证毕.

注 4 我们定义曲线 $l_3: y = f_3(x) = y^* ((e^{\alpha x} - 1)/(e^{\alpha x^*} - 1))^{\delta/a}$, 则该曲线经过三点 $O(0, 0)$, $P_0(x^*, y^*)$ 和 $B(1, y^* ((e^{\alpha} - 1)/(e^{\alpha x^*} - 1))^{\delta/a})$. 定理 4 告诉我们, 只要铅直等倾线 $l_1: y = f_1(x) = (rx(1-x))/(1 - e^{-\alpha x})$ 和曲线 l_3 在 R_0 内仅有交点即正平衡点 $P_0(x^*, y^*)$, 则 $P_0(x^*, y^*)$ 全局渐近稳定. 这样一来, 我们只须通过 l_1 和 l_3 的位置关系即可判定正平衡点 $P_0(x^*, y^*)$ 的渐近稳定性.

由定理 4 和注 4, 我们可以得到下面的两个推论:

推论 5 若 $f_1'(x^*) \leq [\delta x^* (1-x^*)]/(1 - e^{-\alpha x^*})^2$, 且铅直等倾线 $l_1: y = f_1(x)$ 和曲线 $l_3: y = f_3(x)$ 在 $(0, 1)$ 内分别是上凸和下凸, 即 $f_1''(x) \leq 0, f_3''(x) \geq 0$, 则正平衡点 $P_0(x^*, y^*)$ 的局部渐近稳定性隐含全局渐近稳定性.

证明 注意到 $p \leq 0 \Leftrightarrow f_1'(x^*) \leq [\delta x^* (1-x^*)]/(1 - e^{-\alpha x^*})^2 = f_3'(x^*), f_1(x^*) = f_3(x^*)$. 当 $f_1''(x) \leq 0, f_3''(x) \geq 0$, 显然有 $f_3(x) > f_1(x), x \in (x^*, 1)$, 而铅直等倾线 $l_1: y = f_1(x) = [rx(1-x)]/[1 - e^{-\alpha x}]$ 和曲线 $l_3: y = f_3(x)$ 在 $(0, x^*)$ 内不可能有交点, 否则, 必有 $f_0(x) = 0 > \lim_{x \rightarrow 0^+} f_1(x) = r/a$, 矛盾. 所以必有 $(x-x^*)H(x) < 0, x \in (0, 1)$. 证毕.

推论 6 若 $f_1'(x) < 0, x \in (0, 1)$, 则正平衡点 $P_0(x^*, y^*)$ 是全局稳定的.

注 5 定理 1 的几何意义非常清晰, 但验证起来不太方便, 我们可以通过 Dulac 函数证明系统 (1) 闭轨道的不存在性来获得正平衡点 $P_0(x^*, y^*)$ 的全局稳定性.

定理 7 如果存在 β 使得下列 3 种情况之一满足:

- (i) $2 \leq \beta \leq (\delta + a)/a$;
- (ii) $\max\{2 - a, 1\} \leq \beta \leq \min\{\ln(\delta/a) + 2, 2\}$;
- (iii) $1 \leq \beta \leq \min\{(\delta e^a)/a + 1 - a, 2 - a\}$;

则正平衡点 $P_0(x^*, y^*)$ 在第一象限内全局渐进稳定.

证明 取 Dulac 函数 $B(x, y) = 1/(x^\beta y)$, 则当 $(x, y) \in \text{inter}(R_0) := (0, 1) \times (0, (1-d)/\delta)$ 时,

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x}(BP) + \frac{\partial}{\partial y}(BQ) &= \frac{1}{y} \frac{(1-\beta) + (\beta-2)x}{x^\beta} - \frac{(ax + \beta)e^{-\alpha x} - (\beta - \delta x)}{x^{\beta+1}} \leq \\ &= -\frac{(ax + \beta)e^{-\alpha x} - (\beta - \delta x)}{x^{\beta+1}}, \end{aligned}$$

考虑函数 $f_5(x) = (ax + \beta)e^{-\alpha x} - (\beta - \delta x)$, 则有 $f_5'(x) = a(1 - \beta - ax)e^{-\alpha x} + \delta$. 易知 $f_5(x)$ 在 $x_0 = (2 - \beta)/a$ 处达最小值. 分别考虑 $x_0 < 0, 0 \leq x_0 \leq 1$ 和 $x_0 > 1$ 三种情形, 可以得到分别在条件 (i), (ii), (iii) 下均有 $f_5'(x) \geq 0$, 而 $f_5(0) = 0$, 故 $(ax + \beta)e^{-\alpha x} - (\beta - \delta x) > 0, x \in (0, 1)$. 从而 $\partial(BP)/\partial x + \partial(BQ)/\partial y < 0, (x, y) \in \text{inter}(R_0)$. 系统 (1) 在 R_0 内无环, 结合引理 3 知结论成立. 证毕.

下面讨论极限环的存在唯一性.

定理 8 设

- (i) $f_2'(x) > f_1'(x), x \in (0, 1)$;
- (ii) $f_1'(x^*) > [\delta x^* (1-x^*)]/(1 - e^{-\alpha x^*})^2 = f_3'(x^*)$;

(ii) $uM'(k(u)) \cdot k'(u) - M(k(u)) < 0$, $u \in (-d - r/a, 1 - d - e^{-a})$, 其中

$$M(x) = [(1 - e^{-ax})/f_3(x)](f_1'(x)f_3(x) - f_1(x)f_3'(x)),$$

$k(u)$ 为 $\delta(f_2(x) - f_1(x)) = u$ 的反函数, 则系统(1)在第一象限内存在唯一稳定极限环.

证明 当 $f_1'(x^*) > [\delta x^*(1 - x^*)]/(1 - e^{-ax^*})^2 = f_3'(x^*)$ 时, $P_0(x^*, y^*)$ 为系统(1)的不稳定焦点或结点. 而由引理3知, 区域 R_0 为系统(1)的正向不变集, 由Poincaré-Bendixson定理知, 系统(1)至少存在一个极限环.

对系统(8), 再作时间反向变换 $\tau \rightarrow -\tau$ 得

$$dX/d\tau = \phi(Y) - F(X), \quad dY/d\tau = -g(X). \quad (9)$$

其中

$$F(X) = \left[\frac{f_1(x^* e^X)}{f_3(x^* e^X)} - 1 \right],$$

$$g(X) = -\delta[f_2(x^* e^X) - f_1(x^* e^X)] \frac{1}{f_3(x^* e^X)} \frac{x^* e^X}{1 - e^{-ax^* e^X}}.$$

直接验证(9)式满足极限环唯一性条件(文献[2]定理1.2):

- (i) $X(f_2(x^* e^X) - f_1(x^* e^X)) > 0$, 即 $Xg(X) > 0$, $X \in (-\infty, \ln(1/x^*)) - \{0\}$;
- (ii) $\phi(0) = 0$, $\phi(Y) = e^Y - 1$ 单调增加;
- (iii) $F(0) = 0$, 且

$$F'(X) = f(X) = x^* e^X \frac{f_1'(x^* e^X)f_3(x^* e^X) - f_1(x^* e^X)f_3'(x^* e^X)}{f_3^2(x^* e^X)},$$

$$f(0) = (x^*/y^*)(f_1'(x^*) - f_3'(x^*)),$$

$$f(X) - cg(X) = \frac{x^* e^X}{f_3(x^* e^X)(1 - e^{-ax^* e^X})} \times$$

$$\left[\frac{1 - e^{-ax^* e^X}}{f_3(x^* e^X)} (f_1'(x^* e^X)f_3(x^* e^X) - f_1(x^* e^X)f_3'(x^* e^X)) + c\delta(f_2(x^* e^X) - f_1(x^* e^X)) \right].$$

令 $G(x) = \frac{1 - e^{-ax}}{f_3(x)} (f_1'(x)f_3(x) - f_1(x)f_3'(x)) + c\delta(f_2(x) - f_1(x))$,

$x = k(u)$ 为 $K(x) := \delta(f_2(x) - f_1(x)) = u$ 的反函数, 则 $k(u)$ 满足 Cauchy 问题

$$dk/du = 1/(K'(k(u))), \quad k(0) = x^*,$$

且 $k(-d - r/a) = 0$, $k(1 - d - e^{-a}) = 1$, 即 $k(u)$ 在 $(-d - r/a, 1 - d - e^{-a})$ 是正的单调增加函数. 再令

$$M(k(u)) := \frac{1 - e^{-ak(u)}}{f_3(k(u))} ((f_1'(k(u))f_3(k(u)) - f_1(k(u))f_3'(k(u))) + c\delta(f_2(k(u)) - f_1(k(u)))).$$

直接计算得

$$M\left(k\left(-d - \frac{r}{a}\right)\right) = -\frac{r\delta}{a} < 0,$$

$$M(k(0)) = (1 - e^{-ax^*})(f_1'(x^*) - f_3'(x^*)) > 0,$$

$$M(k(1 - d - e^{-a})) = (1 - e^{-a})f_1'(1) = -r < 0.$$

我们断言, 对任意的实数 c , $M(k(u)) + cu$ 在 $(-d - r/a, 1 - d - e^{-a})$ 内的零点是简单的.

事实上,若存在 c_0 使得 $M(k(u)) + cu$ 在 $(-d - r/a, 1 - d - e^{-a})$ 内有多重零点 u_0 , 则有

$$\left. \begin{aligned} M'(k(u_0)) \cdot k'(u_0) &= c_0 \\ M(k(u_0)) &= -c_0 u_0 \end{aligned} \right\} \Rightarrow u_0 M'(k(u_0)) \cdot k'(u_0) - M(k(u)) = 0.$$

这与条件 (iii) 矛盾. 从而知, $f(X) - cg(X)$ 在 $(-\infty, \ln(1/x^*))$ 内的零点是简单的. 证毕.

由定理 8 及其证明过程, 我们得到定理 9.

定理 9 设 $f_2'(x) > f_1'(x)$, $x \in (0, 1)$, $N(u) = M(k(u))$ 在 $(-d - r/a, 1 - d - e^{-a})$ 上严格上凸, 即 $N''(u) < 0$, $M(k(u))$ 定义如定理 8, 则

(i) 当 $f_1'(x^*) < [\delta x^* (1 - x^*)] / (1 - e^{-ax^*})^2 = f_3'(x^*)$, 即 $N(0) < 0$, 系统 (1) 正平衡点 $P_0(x^*, y^*)$ 在第一象限内全局渐进稳定. 即 $P_0(x^*, y^*)$ 的局部稳定性隐含全局稳定性.

(ii) 当 $f_1'(x^*) > [\delta x^* (1 - x^*)] / (1 - e^{-ax^*})^2 = f_3'(x^*)$, 即 $N(0) > 0$, 系统 (1) 在第一象限内存在唯一稳定极限环. 即 $P_0(x^*, y^*)$ 的局部不稳定性隐含极限环的唯一性.

证明 (i) 由于 $N(u) = M(k(u))$ 在 $(-d - r/a, 1 - d - e^{-a})$ 上严格上凸, $N(0) = (1 - e^{-ax^*})(f_1'(x^*) - f_3'(x^*)) < 0$ 隐含

$$N(u) \leq N'(0)u + N(0) = N'(0)u + (1 - e^{-ax^*})(f_1'(x^*) - f_3'(x^*)) < N'(0)u,$$

即 $N(u) - N'(0)u < 0$, $u \in (-d - r/a, 1 - d - e^{-a})$. 取 $c = -N'(0)$, 有

$$f(X) - (-N'(0))g(X) = \frac{x^* e^X}{f_3(x^* e^X)(1 - e^{-ax^* e^X})} [N(u) - N'(0)u] < 0.$$

即 $f(X) - (-N'(0))g(X)$ 在 $(-\infty, \ln(1/x^*))$ 内没有零点, 据文献 [2] 定理 1.2 得, 系统 (1) 不存在极限环, $P_0(x^*, y^*)$ 是全局稳定的.

(ii) 令 $\Phi(u) = uN'(u) - N(u)$, 则 $\Phi'(u) = uN''(u)$. 可见 $\Phi(u)$ 在 $u = 0$ 达最大值 $-N(0) = -(1 - e^{-ax^*})(f_1'(x^*) - f_3'(x^*)) < 0$. 由定理 8 得系统 (1) 在第一象限内存在唯一稳定极限环. 证毕.

注 6 由定理 9 知, 若有 $f_2(x) - f_1(x)$ 严格单调上升, $N(u) = M(k(u))$ 严格上凸, 则系统 (1) 的全局动力学性质完全由正平衡点的局部稳定性所决定.

3 数值模拟

用 Maple 软件包进行数值模拟, 定理 8 和定理 9 的条件是可以实现的. 对 (1) 式, 取 $r = 4$, $a = 1.8$, $\delta = 0.09115$, $d = 0.01264$, 得系统

$$\begin{cases} dx/dt = 4x(1-x) - (1 - e^{-1.8x})y, \\ dy/dt = y[(1 - e^{-1.8x}) - 0.09115y - 0.01264], \end{cases} \quad (10)$$

此时,

$$\begin{aligned} P_0(x^*, y^*) &\approx (0.2128919368, 2.105619194), \\ f_1'(x^*) &\approx -0.900813817 < 0.6029242739 \approx f_3'(x^*). \end{aligned}$$

$f_2(x) - f_1(x)$ 是 $(0, 1)$ 上的正函数, 如图 2 所示. $N(u)$ 是一上凸函数, 如图 3 所示. 这样一来, 定理 9 的条件 (i) 全部满足. 考虑到引理 3, 取 R_0 (R_0 定义如引理 3) 边界上两初值 $x(0) = 1$, $y(0) = 0.2$ 和 $x(0) = 1$, $y(0) = 2$, 得到两相轨线, 数值模拟得到图 4. 从图 4 可以看出, 这些轨线的 ω 极限点均为正平衡点 $P_0(x^*, y^*) \approx (0.2128919368, 2.105619194)$, 它为一焦

点. 故 $P_0(x^*, y^*)$ 在第一象限是全局稳定的.

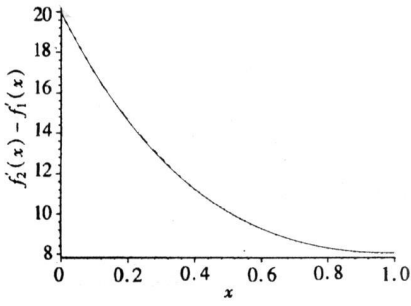


图2 函数 $f_2'(x) - f_1'(x)$ 的正性

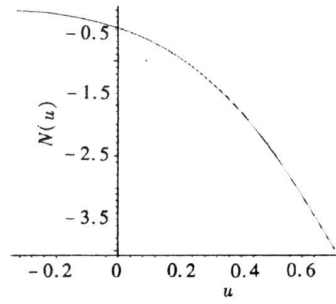


图3 函数 $N(u)$ 的上凸性

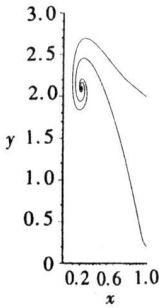


图4 $P_0(x^*, y^*)$ 的全局稳定性

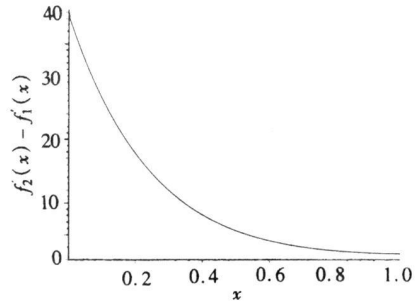


图5 函数 $f_2'(x) - f_1'(x)$ 的正性

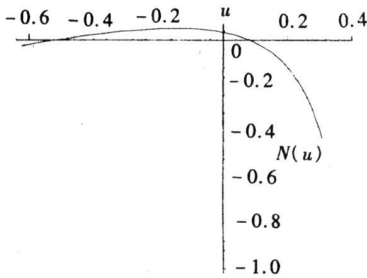


图6 函数 $N(u)$ 的上凸性

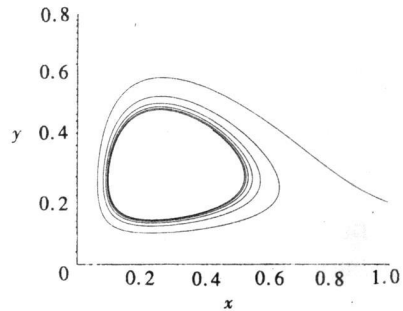


图7 外绕极限环的相轨道

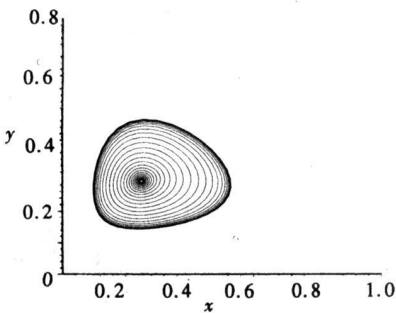


图8 内绕极限环的相轨道

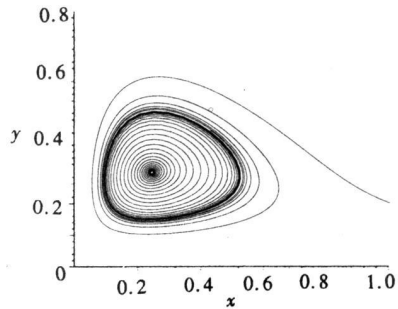


图9 极限环的存在唯一性

取 $r = 1, a = 4, \delta = 0.1, d = 0.6$, 得系统

$$\begin{cases} dx/dt = x(1-x) - (1-e^{-4x})y, \\ dy/dt = y[(1-e^{-4x}) - 0.1y - 0.6], \end{cases} \quad (11)$$

此时,

$$P_0(x^*, y^*) \simeq (0.248\ 323\ 381\ 9, 0.296\ 450\ 939\ 9),$$

$$f_1'(x^*) \simeq 0.101\ 938\ 372\ 5 > 0.470\ 822\ 281\ 8E-1 \simeq f_3'(x^*).$$

$f_2(x) - f_1(x)$ 是 $(0, 1)$ 上的正函数, 如图 5 所示. $N(u)$ 是一上凸函数, 如图 6 所示. 这样一来, 定理 9 的条件 (ii) 全部满足. 取 R_0 的边界点 $x(0) = 1, y(0) = 0.2$ 作为初值, 得到在外绕一个极限环的相轨线如图 7 所示, 再取与奇点 $P_0(x^*, y^*) \simeq (0.248\ 323\ 381\ 9, 0.296\ 450\ 939\ 9)$ 邻近的点 $x(0) = 0.250\ 323\ 381\ 9, y(0) = 0.299\ 450\ 939\ 9$ 作为初值, 得到在内绕该极限环的相轨线, 如图 8 所示. 综合图 7 和图 8 得图 9, 知前述的极限环是唯一的. 该极限环在 x 和 y 轴方向的振幅相当, 近似一个圆.

致谢 本文作者感谢宁波大学科学基金的资助.

[参 考 文 献]

- [1] Sugie Jitsuro. Two-parameter bifurcation in a predator-prey system of Ivlev type[J]. Journal of Mathematical Analysis and Application, 1998, 217(2): 349-371.
- [2] Kooij R E, Zegeling Z. A predator-prey model with Ivlev's functional response[J]. Journal of Mathematical Analysis and Application, 1996, 198(2): 473-489.
- [3] De Angelis D L, Goldstein R A, O'Neill R V. A model for trophic interaction[J]. Ecology, 1975(56): 881-892.
- [4] 唐秋林. 一类具 Ivlev 型功能反应的捕食者食饵系统[J]. 北华大学学报(自然科学版), 2002, 3(5): 381-384.
- [5] FENG Jian-wen, CHEN Shi-hua. Global asymptotic behavior for the competing predators of the Ivlev types[J]. Mathematica Applicata, 2000, 13(4): 85-88.

Global Analysis of Ivlev's Type Predator-Prey Dynamical System

XIAO Hai-bin^{1, 2}

(1. Department of Mathematics, Ningbo University, Ningbo, Zhejiang 315211, P. R. China;

2. Department of Mathematics, Nanjing University, Nanjing 210093, P. R. China)

Abstract: A class of Ivlev's type predator-prey dynamic systems with prey and predator both having linear density restricts is considered. By using the qualitative methods of ODE, the positive equilibrium's global stability and existence and uniqueness of non-small amplitude stable limit cycle were obtained. Especially under certain conditions, it shows that existence and uniqueness of non-small amplitude stable limit cycle is equivalent to the positive equilibrium's local instability and the positive equilibrium's local stability implies its global stability. That is to say, the global dynamic of the system is entirely determined by the local stability of the positive equilibrium.

Key words: limit cycle; global stability; density restrict; Ivlev type functional response; existence and uniqueness