

# I 型动态扩展裂纹尖端的弹粘-理想塑性场\*

王振清, 梁文彦, 周博, 苏娟

(哈尔滨工程大学 建筑工程学院, 哈尔滨 150001)

(王银邦推荐)

**摘要:** 由于材料在扩展裂纹尖端的粘性效应的存在, 考虑粘性效应并假设粘性系数与塑性等效应变率的幂次成反比, 对理想塑性材料中平面应变扩展裂纹尖端场进行了弹粘塑性渐近分析, 得到了不含间断的连续解, 并讨论了 I 型裂纹数值解的性质随各参数的变化规律. 分析表明, 应力和应变均具有幂奇异性, 通过分析使尖端场的弹、粘、塑性可以合理匹配. 对于 I 型裂纹, 裂纹尖场不含弹性卸载区. 趋于极限情况时, 裂纹尖端处于一种超粘性状态, 并积聚了大量的能量, 在各个受压应力状态下裂纹扩展.

**关键词:** 动态扩展; 弹粘塑性材料; 裂纹尖端场; 粘性效应

**中图分类号:** O346 **文献标识码:** A

## 引 言

扩展裂纹尖端的动态渐近解虽然解决了准静态解中存在的许多矛盾, 但是其自身也存在一些问题<sup>[1]</sup>, 例如, 某些动态解中含有塑性激波<sup>[2-3]</sup>. 而在某些情况下, 当裂纹扩展速度趋于 0 时, 动态解趋于静态解而非准静态解<sup>[4]</sup>. 但在这些动态解中, 都没有考虑材料的粘性效应. 为了研究粘性效应作用下的扩展裂纹尖端场, 高玉臣<sup>[5]</sup>引入了一种简化的弹粘塑性模型, 即忽略弹性阶段的粘性效应, 如图 1 所示. 对 I 型裂纹, 分别得到了对数型和幂型两种奇异解, 并确定了两种奇异解的分界<sup>[6]</sup>. 在此基础上, 王振清<sup>[7]</sup>研究了 II 型裂纹, 贾斌等人<sup>[8]</sup>研究了 II 型裂纹, 得到了与 I 型问题相似的结论. 但是, 这些研究中所采用的人工粘性系数均与距离裂纹尖端的极径  $r$  成正比, 这虽然使奇异量级得到了匹配, 却也造成材料性质成为坐标的函数从而失去了均匀性. 此外, 对同种材料得到两种奇异解, 这也是值得深入讨论的. 本文假设粘性系数与塑性等效应变率的幂次成反比, 经过渐近分析得到了均匀材料中的单一幂奇异解. 最后通过与极限情况的对比, 验证了解的正确性. 并发现当  $\beta$  趋于极限情况时, 裂纹尖端处于一种粘性状态, 并积聚了大量的能量, 在各个受压应力状态下的裂纹扩展.

## 1 基本方程

令  $X_{\alpha}$  ( $\alpha = 1, 2$ ) 表示平面上的固定坐标系. 考虑一条半无限大的裂纹在无限大的固体中

\* 收稿日期: 2005-07-20; 修订日期: 2007-01-06

基金项目: 国家教育部博士点基金资助项目(20060217010)

作者简介: 王振清(1963-), 男, 黑龙江汤原人, 博士, 教授, 博士生导师(联系人: Tel/ Fax: + 86-451-82519264; E-mail: wangzhenqing@hbeu.edu.cn).

以恒定速度  $V$  沿  $X_1$  方向扩展,  $X_2$  与裂纹面垂直. 再以裂纹尖端为原点建立与裂纹尖端一起移动的随动坐标系  $o-xy$  和  $o-r\theta$ , 如图 2 所示. 对于定常扩展, 裂尖场中任何物理量  $\Omega$  的物质导数为

$$\Omega = \frac{d\Omega}{dt} = -V \frac{\partial \Omega}{\partial x} = V \left[ \frac{\sin\theta}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} - \cos\theta \frac{\partial}{\partial r} \right] \Omega. \quad (1)$$

对于图 1 所示的弹粘塑性模型, 在三维情况下本构方程为

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1+\nu}{E} \sigma_{ij} - \frac{\nu}{E} \sigma_{kk} \delta_{ij} + \frac{1}{\eta} \left[ 1 - \frac{K}{\sqrt{J_2}} \right] S_{ij}, \quad (2)$$

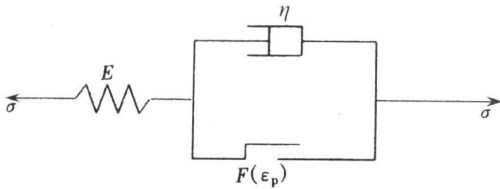


图 1 弹粘塑性力学模型

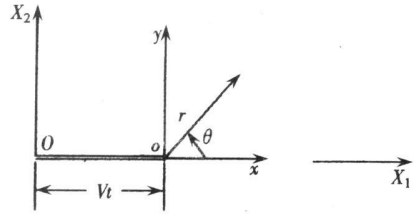


图 2 固定坐标系与随动坐标系

式中  $\nu$  为 Poisson 比,  $\delta_{ij}$  为 Kronecker 符号,  $K$  为材料屈服强度,  $J_2$  为应力张量的第二不变量,  $E$  为弹性模量 ( $10^{11}$ ),  $\eta$  为粘性系数.

定义等效塑性应变  $\varepsilon_p$  的表达式为

$$\varepsilon_p = \int \left[ \frac{2}{3} \varepsilon_{ij}^p \varepsilon_{ij}^p \right]^{1/2} dt; \quad (3)$$

塑性流动因子为

$$\lambda = \frac{1}{\eta} \left[ \frac{\sqrt{J_2}}{K} - 1 \right]. \quad (4)$$

考虑裂尖场的粘性应与应变率有关, 设粘性系数  $\eta$  的形式如下:

$$\eta = C (\dot{\varepsilon}_p)^{-\beta} \quad (0 < \beta < 1), \quad (5)$$

式中  $C$  为非正常数. 把上式代入式 (2), 经过整理后可得理想塑性材料的弹粘塑性本构关系为

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1+\nu}{E} \sigma_{ij} - \frac{\nu}{E} \sigma_{kk} \delta_{ij} + \frac{3S_{ij}}{2\sigma} \left[ \frac{2}{3C} \right]^{1/(1-\beta)} H[\sigma - \sqrt{3}K] [\sigma - \sqrt{3}K]^{1/(1-\beta)}, \quad (6)$$

其中 Heaviside 阶跃函数为

$$H[\sigma - \sqrt{3}K] = \begin{cases} 1, & \sigma - \sqrt{3}K > 0, \\ 0, & \sigma - \sqrt{3}K \leq 0. \end{cases} \quad (7)$$

假设应力具有如下形式的幂奇异性:

$$\sigma_{ij} \sim r^{-\delta} \quad (0 < \delta < 1/2), \quad (8)$$

并进一步假定在裂纹尖端, 粘性应力和塑性应力同量级, 且弹性应变和塑性应变同量级, 由量级协调可得

$$\delta = \frac{1}{\beta} - 1. \quad (9)$$

由  $0 < \delta < 1/2$ , 可知仅考虑  $2/3 < \beta < 1$  的情况即可.

## 2 动态扩展裂纹渐近方程

在不可压缩条件下, 对于平面应变 I 型裂纹, 在极坐标下, 几何方程和运动方程为

$$\varepsilon = \frac{\partial u_r}{\partial r}, \quad \varepsilon_\theta = \frac{1}{r} \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} + \frac{u_r}{r}, \quad \varepsilon_\theta = \frac{1}{2} \left[ \frac{1}{r} \frac{\partial u_r}{\partial \theta} + \frac{\partial u_\theta}{\partial r} - \frac{u_\theta}{r} \right], \quad (10)$$

$$\frac{\partial \alpha_r}{\partial r} + \frac{\partial \alpha_\theta}{r \partial \theta} + \frac{\alpha_r - \alpha_\theta}{r} = \rho \alpha_r, \quad \frac{\partial \alpha_\theta}{r \partial \theta} + \frac{\partial \alpha_r}{\partial r} + \frac{2\alpha_\theta}{r} = \rho \alpha_\theta. \quad (11)$$

本构方程为

$$\begin{cases} \varepsilon_r = -\varepsilon_\theta = \frac{1}{4\mu} (\alpha_r - \alpha_\theta) + \frac{\alpha_r - \alpha_\theta}{2\sigma} B (\sigma - \sqrt{3}K)^{1/(1-\beta)}, \\ \varepsilon_{r\theta} = \frac{1}{2\mu} \alpha_{r\theta} + \frac{\alpha_\theta}{\sigma} B (\sigma - \sqrt{3}K)^{1/(1-\beta)}, \end{cases} \quad (12)$$

$$\text{其中} \quad B = \frac{3}{2} \left[ \frac{2}{3C} \right]^{1/(1-\beta)}.$$

在不可压缩条件下, 引入位移势函数  $U$ , 则位移分量可以表示为

$$u_r = -\frac{\partial U}{r \partial \theta}, \quad u_\theta = \frac{\partial U}{\partial r}. \quad (13)$$

根据量级匹配的原则, 设位移势函数  $U$  为如下形式:

$$U = r^{2-\delta} g(\theta). \quad (14)$$

并且可以把各应力分量、等效应力及等效塑性应变分别表示为

$$\alpha_r = r^{-\delta} [P(\theta) + S(\theta)], \quad \alpha_\theta = r^{-\delta} [P(\theta) - S(\theta)], \quad \alpha_{r\theta} = r^{-\delta} T(\theta), \quad (15)$$

$$\sigma = \Sigma(\theta) r^{-\delta}, \quad (16)$$

引入下列无量纲量:

$$D^* = \frac{B}{V}, \quad T = \frac{T}{\mu}, \quad S = \frac{S}{\mu}, \quad P = \frac{P}{\mu}, \quad \Sigma = \frac{\Sigma}{\mu}, \quad Ma^2 = \frac{\rho V^2}{\mu}, \quad f = \frac{K}{\mu}, \quad (17)$$

$$\lambda = \frac{D^*}{\Sigma} (\Sigma - \sqrt{3}f)^{1/(1-\beta)}. \quad (18)$$

把各相关量代入运动方程和本构方程, 同时注意物质导数的求导规则式(1), 经无量纲化并整理得

$$S' = \frac{2\mathcal{H}'}{\sin\theta} - \frac{2D^*S}{\Sigma \sin\theta} (\Sigma - \sqrt{3}f)^{1/(1-\beta)} - \delta S \cot\theta + 2T, \quad (19)$$

$$\begin{aligned} P' &= \frac{2\mathcal{H}'}{\sin\theta} - \frac{2D^*S}{\Sigma \sin\theta} (\Sigma - \sqrt{3}f)^{1/(1-\beta)} - \delta S \cot\theta + \\ &\quad \mathcal{F} - \delta Ma^2 [h' \sin\theta - (1-\delta)h \cos\theta], \end{aligned} \quad (20)$$

$$\begin{aligned} (1 - Ma^2 \sin^2\theta) T' &= \\ &\quad Ma^2 \sin\theta \left[ 2S \sin\theta + \mathcal{F} \cos\theta + \frac{2D^*T}{\Sigma} (\Sigma - \sqrt{3}f)^{1/(1-\beta)} + (1-\delta^2)h \right] - \\ &\quad Ma^2 [(1-\delta)h \sin\theta + \mathcal{H}' \cos\theta] + \delta(P+S) - 2S, \end{aligned} \quad (21)$$

$$\begin{aligned} (1 - Ma^2 \sin^2\theta) h'' &= \\ &\quad - (1-\delta^2)h - \mathcal{F} \cos\theta - \frac{2D^*T}{\Sigma} (\Sigma - \sqrt{3}f)^{1/(1-\beta)} - \\ &\quad \delta(P+S) \sin\theta + Ma^2 \sin\theta [(1-\delta)h \sin\theta + \mathcal{H}' \cos\theta], \end{aligned} \quad (22)$$

$$h'(\theta) = \sin\theta g''(\theta) - (1-\delta) \cos\theta g'(\theta) + (2-\delta) \sin\theta g(\theta). \quad (23)$$

### 3 数值计算与结果分析

在本问题中共有 3 个参数需要选择: 反映裂纹扩展速度的参数  $Ma$ , 反映材料粘性的系数

$D^*$  及指数  $\beta$ . 问题的边界条件为

$$\begin{cases} T(0) = h(0) = 0, P(\pi) - S(\pi) = 0, T(\pi) = 0, \\ h'(0) = [2S(0)(-\sqrt{3}S(0))^{\beta/(1-\beta)} + \delta S(0)]/2\delta. \end{cases} \quad (24)$$

因此以  $S(0)$  和  $P(0)$  为未知量进行双参数打靶, 对上述 3 个参数分别取可能的数值进行计算, 典型结果见表 1. 解随各参数的变化曲线见图 3~ 4, 图中的各量均已无量纲化.

表 1 解随  $Ma$  的变化 ( $\beta = 0.8, D^* = 1.0$ )

$Ma$	0.00	0.01	0.20	0.30
$S(0) \times 10^{-1}$	- 2.558 1	- 2.557 5	- 2.353 3	- 2.113 0
$P(0)$	1.733 5	1.733 4	1.674 3	1.600 3

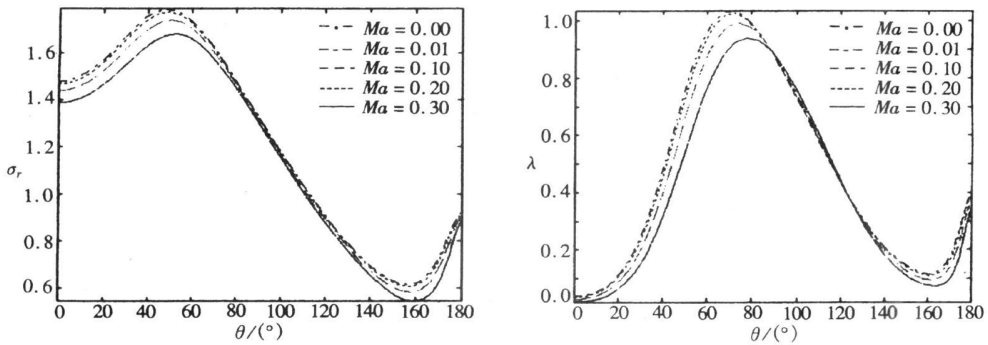


图 3 应力  $\sigma_r$  及塑性流动因子  $\lambda$  随  $Ma$  的变化曲线 ( $\beta = 0.8, D^* = 1.0$ )

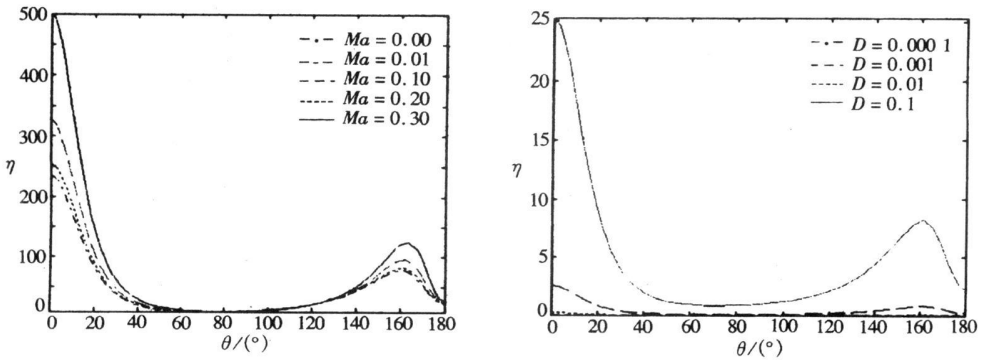


图 4 粘性系数  $\eta$  随各个参数的变化曲线

通过对计算结果的分析与比较可以发现, 当其它参数固定时,

- 1) 随着  $Ma$  单调递减, 即裂纹扩展速度减小, 应力幅值和塑性应变单调递增, 解稍有变化但不大, 且当  $Ma \rightarrow 0$  时仍有解, 此解即应为准静态解;
- 2) 随着  $D^*$  单调递减, 此时材料的粘性减小, 应力幅值和塑性应变单调递增, 解的变化比较显著, 但塑性流动因子不随  $D^*$  变化. 当  $D^* = 0$  时, 方程组无解;
- 3) 随着  $\beta$  单调递减(相当于递增), 此时材料的粘性增加, 应力幅值、塑性应变和塑性流动因子都单调递减. 当  $\beta \rightarrow 1$  时,  $\delta \rightarrow 0$ , 问题无解.

## 4 极限情况 ( $\beta \rightarrow 2/3$ )

随着  $\beta$  单调递减(相当于  $\delta$  递增), 此时材料的粘性增加,  $\beta \rightarrow 2/3$  时, 粘性系数数量级达到  $10^8$ , 此时材料处于一种粘性状态, 裂纹尖端应力将发生变化. 从应力图中可以看出此时所有  $\sigma_r$ 、 $\sigma_\theta$  均为负值, 也就是说明此时裂纹尖端时是处于受压状态.

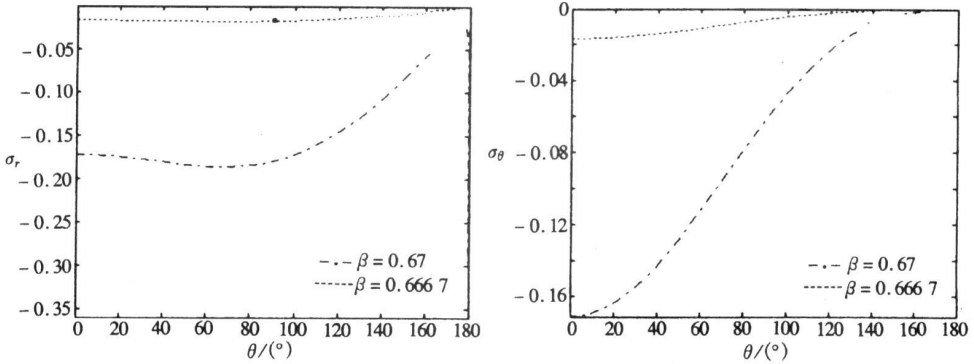


图5 应力随  $\beta$  的变化曲线

## 5 结 论

- 1) 由于在力学模型中考虑了材料的粘性效应, 本文得到的裂纹尖端场是局部自治的, 结果中不含必须由远场条件确定的待定参数或系数. 这一点与高玉臣<sup>[9]</sup>得到的结论是一致的.
- 2) 采用弹粘塑性模型, 结合合理的粘性假设, 通过渐近分析表明在裂纹尖端, 应力和应变均具有形如  $r^{-\delta}$  ( $0 < \delta < 1/2$ ) 的幂奇异性, 奇异性指数由材料的粘性系数唯一确定.
- 3) 本文得到的裂尖场是完全连续的, 不含有一些无粘性模型中存在的塑性激波.
- 4) 对不可压缩条件下的平面应变 I 型裂纹问题, 裂尖场完全由粘塑性区构成, 不存在弹性卸载区.
- 5) 由于粘性的引入, 本文的结果具有很多更加合理的特性, 这表明粘性是研究扩展裂纹尖端场时的一个重要因素.

致谢 本文作者感谢哈尔滨工程大学基础研究基金(002020260707; HEUFT07005)的资助.

### [参 考 文 献]

- [1] 高玉臣, 韩斌, 黄克智. 扩展裂纹准静态渐近解中的矛盾[J]. 力学学报, 1986, 18(1): 88-92.
- [2] Gao Y C, Nemat-Nasser S. Near-tip dynamic fields for a crack advancing in a power-law elastic-plastic material: mode I, II and III[J]. Mech Materials, 1983, 2(3): 305-317.
- [3] Gao Y C. Asymptotic dynamic solution to the mode I propagating crack tip field[J]. Internat J Fracture, 1985, 29(4): 171-180.
- [4] Gao Y C, Nemat-Nasser S. Mode II dynamic fields near a crack tip growing in an elastic-perfectly plastic solid[J]. J Mech Phys Solids, 1984, 32(1): 1-19.
- [5] Gao Y C. Uniparameter plastic field near a dynamic crack-tip[J]. Mech Res Comm, 1988, 15(5): 307-313.
- [6] Gao Y C. Further study on strain singularity behavior of moving cracks in elastic-viscoplastic materi-

- als[ J]. Theoret Appl Fracture Mech , 1990, **14**(3): 233-242.
- [7] 王振清. 弹粘塑性材料的动态裂尖场[ J]. 力学学报, 1993, **25**(2): 159-168.
- [8] 贾斌, 王振清, 李永东, 等. 稳恒扩展裂纹尖端的弹粘塑性场[ J]. 应用力学学报, 2003, **20**(1): 64-69.
- [9] Gao Y C, Wang Z Q. Stress and strain field near tip of mode III growing crack in materials with creep behavior[ J]. Theoret Appl Fracture Mech, 1996, **25**(2): 113-126.

## Perfect Elastic-Viscoplastic Field at Mode I Dynamic Propagating Crack-Tip

WANG Zhen-qing, LIANG Wen-yan, ZHOU Bo, SU Juan

( School of Civil Engineering , Harbin Engineering University , Harbin 150001, P. R. China )

**Abstract:** The viscosity of material is considered at propagating crack-tip. Under the assumption that the artificial viscosity coefficient is in inverse proportion to power law of the plastic strain rate, an elastic-viscoplastic asymptotic analysis was carried out for moving crack-tip fields in power-hardening materials under plane-strain condition. A continuous solution was obtained containing no discontinuities. The variations of numerical solution were discussed for mode I crack according to each parameter. It is shown that stress and strain both possess exponential singularity. The elasticity, plasticity and viscosity of material at crack-tip only can be matched reasonably under linear-hardening condition. And the tip field contains no elastic unloading zone for mode I crack. It approaches the limiting case, crack-tip is under ultra-viscous situation and energy accumulates, crack tip begins to propagate under different compression situations.

**Key words:** dynamic propagation; elastic-viscoplastic material; crack-tip field; viscosity