

II型界面裂纹的非对称动态扩展问题*

吕念春^{1,3}, 杨鼎宁², 程云虹⁴, 程 靳³

- (1. 沈阳理工大学 材料科学与工程学院, 沈阳 110168;
2. 哈尔滨工程大学 建筑工程学院, 哈尔滨 150001;
3. 哈尔滨工业大学 航天工程与力学系, 哈尔滨 150001;
4. 东北大学 土木工程系, 沈阳 110006)

(王银邦推荐)

摘要: 采用复变函数论的方法, 对 II 型界面裂纹的非对称动态扩展问题进行了研究. 通过自相似函数的方法可以获得解析解的一般表达式. 应用该法可以迅速地将所论问题转化为 Riemann-Hilbert 问题, 并求得了非对称扩展裂纹分别在集中载荷、阶跃载荷作用下的解析解. 利用这些解并采用叠加原理, 就可以求得任意复杂问题的解.

关键词: 复变函数; II 型界面裂纹; 自相似函数; 解析解

中图分类号: O346.1 **文献标识码:** A

引 言

近几十年来, 对 II 型界面裂纹的静力学问题已有许多人进行了研究^[1-3]. 由于数学上的困难, 人们对动力学问题的研究还远远不够深入^[4-9]. 一些研究者对界面边缘裂纹及非均匀扩展的界面裂纹问题进行了研究, 但大多只获得数值解^[10-13], 获得解析解的却很少^[14-15], 因此有必要对非对称动态扩展的问题进行研究. 本文对 II 型界面裂纹在集中载荷、阶跃载荷作用下的动力学问题分别进行求解, 利用复变函数论的方法给出解的一般表示. 应用该法可以很容易地将所研究的问题转化为 Riemann-Hilbert 问题, 而后一问题容易用通常的 Muskhelishvili^[16-17] 方法进行求解.

1 正交异性体弹性动力学反平面问题的相关方程

对于正交异性体, 我们选择 Cartesian 坐标轴和物体的弹性对称轴相一致, 所考虑的问题被限制在反平面上, 则正交异性体的反平面运动方程为

$$C_{55} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + C_{44} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = \rho \frac{\partial^2 w}{\partial t^2}, \quad (1)$$

* 收稿日期: 2005-06-20; 修订日期: 2007-01-23

基金项目: 中国博士后基金资助项目(2005038199); 黑龙江省自然科学基金重点资助项目(ZJG04-08)

作者简介: 吕念春(1965—), 男, 辽宁朝阳人, 副教授, 博士, 主要从事复合材料断裂动力学方面的研究(E-mail: lnc_65@163.com);

程靳(联系人, Tel: +86-451-86416375; E-mail: hiwg@0451.com).

式中 C_{44} 、 C_{55} 为弹性常数, ρ 为材料密度, w 为沿 z 方向的位移^[5-9]. 采用 Atkinson 变换^[5,9,15] 方法, 令

$$\xi = x - \eta + Ty, \tag{2}$$

这里 η 为复变量, T 为 η 的函数.

现构造运动方程的解如下:

$$w = \operatorname{Re} \int_{-\infty}^{\infty} \phi(\xi) d\eta, \tag{3}$$

式中的积分是在 η 的实轴上进行的. 将 (3) 式代入 (1) 式后可知, 只要满足关系式

$$C_{55} + C_{44}T^2 - \rho\eta^2 = 0, \tag{4}$$

则运动方程 (1) 将成为恒等式, 因此 $\phi(\xi)$ 是由边界条件所确定的任意函数. 而 (4) 式有两个根, 我们仅取虚部为正的根, 而后可得

$$T(\eta) = i \sqrt{(C_{55} - \rho\eta^2)/C_{44}}. \tag{5}$$

因此, 在 $y = 0$ 上可得到如下一般性结论^[2, 5-8, 18]:

当 Lw 是齐次函数时, 我们令

$$w^0 = Lw, \quad \tau_{xz}^0 = L\tau_{xz}, \quad \tau_{yz}^0 = L\tau_{yz}; \tag{6}$$

当 $L\tau_{xz}$ 、 $L\tau_{yz}$ 是齐次函数时, 我们令

$$w^0 = \frac{\partial}{\partial t} Lw, \quad \tau_{xz}^0 = \frac{\partial}{\partial t} L\tau_{xz}, \quad \tau_{yz}^0 = \frac{\partial}{\partial t} L\tau_{yz}, \tag{7}$$

则总有

$$\tau_{yz}^0 = \frac{1}{t} \operatorname{Re} F(\tau), \quad \tau_{xz}^0 = \frac{C_{55}}{C_{44}t} \operatorname{Re} \left[\frac{F(\tau)}{T(\tau)} \right], \quad \frac{\partial w^0}{\partial \tau} = \frac{1}{C_{44}} \operatorname{Re} \left[\frac{F(\tau)}{T(\tau)} \right]. \tag{8}$$

若令 $f(\tau) = F(\tau)/T(\tau)$, 则 (8) 式变为

$$\tau_{yz}^0 = \frac{1}{t} \operatorname{Re} [f(\tau) T(\tau)], \quad \tau_{xz}^0 = \frac{C_{55}}{C_{44}t} \operatorname{Re} f(\tau), \quad \frac{\partial w^0}{\partial \tau} = \frac{1}{C_{44}} \operatorname{Re} f(\tau). \tag{9}$$

2 两种不同正交异性材料的非对称界面问题

设两种不同材料界面处于 $y = 0$ 的平面上, 在无限远处受到剪切载荷 P 的作用, 开始出现一无限小的微观裂纹, 并且裂纹以常速 V_1 、 V_2 分别沿 x 轴正、负方向不对称扩展, 且 $V_1 > V_2 > 0$, 如图 1 所示. 由于在 $y = 0, -\infty < x < \infty$ 平面上剪切应力相等, 但方向相反, 在裂纹之外两种材料的界面上, 位移应连续^[5-9, 15].

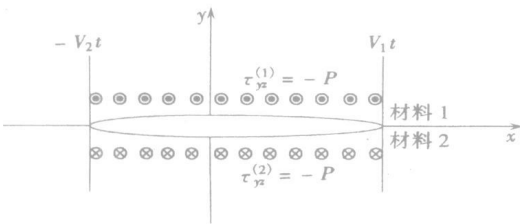


图 1 两种不同材料界面的裂纹扩展示意图

利用 (9) 式可推出, 两种正交异性材料界面的连续条件可改写为^[5-9, 15]

$$\operatorname{Re} f^{(1)}(\tau)/C_{44}^{(1)} = \operatorname{Re} f^{(2)}(\tau)/C_{44}^{(2)}, \tag{10}$$

$$x < -V_2t \text{ 或 } x > V_1t.$$

式中右上角括号内的数字分别表示 1、2 两种材料中相应的物理量. 为了不失一般性, 我们总假定

$C_{55}^{(1)}/\rho^{(1)} < C_{55}^{(2)}/\rho^{(2)}$. 我们应当注意到当两种介质相同时, 所得的解必须转化为单一介质中问题的相应解^[5-9, 15], 可以得出

$$f^{(1)}(\tau) = m(\tau) n^{(1)}(\tau), \quad f^{(2)}(\tau) = m(\tau) n^{(2)}(\tau), \tag{11}$$

$$\begin{cases} n^{(1)}(\tau) = \frac{\sqrt{(C_{55}^{(2)} - \rho^{(2)} \tau^2)/C_{44}^{(2)}}}{\sqrt{(C_{55}^{(1)} - \rho^{(1)} \tau^2)/C_{44}^{(1)}}} + \frac{(C_{55}^{(2)} - \rho^{(2)} \tau^2)/C_{44}^{(2)}}{(C_{55}^{(1)} - \rho^{(1)} \tau^2)/C_{44}^{(1)}}, \\ n^{(2)}(\tau) = 1 + \frac{\sqrt{(C_{55}^{(2)} - \rho^{(2)} \tau^2)/C_{44}^{(2)}}}{\sqrt{(C_{55}^{(1)} - \rho^{(1)} \tau^2)/C_{44}^{(1)}}}, \end{cases} \quad (12)$$

式中 $m(\tau)$ 必须满足下式

$$\begin{cases} \operatorname{Re} m(\tau) = 0, & \tau < -V_2 \text{ 或 } \tau > V_1, \\ \operatorname{Im} m(\tau) = 0, & -V_2 < \tau < V_1. \end{cases} \quad (13)$$

由(9)、(11)、(12)、(13)式给出了具有任意自相似指数的不同正交异性材料界面扩展裂纹断裂动力学问题的一般解,显然此问题转化为寻找单一自相似函数 $m(\tau)$. 在满足(13)式的条件下,只要自相似函数 $m(\tau)$ 满足具体问题的边界条件即可,不需再考虑运动方程及界面的连接条件^[5-9, 15].

3 界面裂纹不对称扩展问题解的基本形式

假设在 $t = 0$ 时刻,各向异性体界面上开始出现一微观穿透裂纹,我们选择 Cartesian 坐标轴和物体的弹性坐标轴一致,所考虑的问题都被限制在 $x-y$ 平面上,裂纹以常速 V_1 、 V_2 分别沿 x 轴正、负方向不对称扩展,且 $V_1 > V_2 > 0$,则所考虑问题转化为以下边界条件问题:

$$\begin{cases} \tau_x(x, 0, t) = f_1(x, t), & -V_2t < x < V_1t, \\ w(x, 0, t) = 0, & x < -V_2t \text{ 或 } x > V_1t. \end{cases} \quad (14)$$

引入 $\tau = x/t$,利用上面的相关公式和广义函数论^[19-20]中的 $t\delta(x) = \delta(x/t)$,可以把以上边界条件变化为以下边值问题:

$$\begin{cases} \operatorname{Re}[f(\tau)T(\tau)] = f_2[\tau, \delta(\tau)], & -V_2 < \tau < V_1, \\ \operatorname{Re} f(\tau) = 0, & \tau < -V_2 \text{ 或 } \tau > V_1. \end{cases} \quad (15)$$

则根据 $f(\tau)$ 和 $m(\tau)$ 的关系(11)式和以上条件,可确定单一未知函数 $m(\tau)$ 的形式:

$$m(\tau) = f_3[\tau, \xi(\tau)], \quad (16)$$

进而可以把所研究问题归结为 Keldysh-Sedov 问题

$$\begin{cases} \operatorname{Re} m(\tau) = 0, & \tau < -V_2 \text{ 或 } \tau > V_1, \\ \operatorname{Im} m(\tau) = 0, & -V_2 < \tau < V_1. \end{cases} \quad (17)$$

综合考虑不对称性、无穷远条件以及裂纹尖端的奇异性^[21-23],则可得以上问题解的基本形式如下:

$$m(\tau) = Q[(V_1 - \tau), (V_2 + \tau)]. \quad (18)$$

而后利用公式(9)或(11)就可以很容易地推导出裂纹不对称扩展问题的应力、位移和应力强度因子.

4 具体问题的解

为了更好地解决 II型界面裂纹不对称扩展问题,对受集中载荷作用下的 II型运动裂纹进行求解,并根据广义函数原理,利用自相似函数将不同边界条件问题转化为 Keldysh-Sedov 混合边值问题,从而获得了相应问题的解.

1) 设在 $t = 0$ 时刻,坐标原点在集中荷载 P 的作用下,开始出现一微观裂纹,裂纹以常速

V_1 、 V_2 分别沿 x 轴正、负方向不对称扩展, 且 $V_1 > V_2 > 0$, 在 $y = 0$ 的半平面上, 问题的边界条件可以表示为

$$\begin{cases} \tau_{yz}^{(1)} = \tau_{yz}^{(2)} = -P\delta(x), & -V_2t < x < V_1t, \\ w^{(1)} - w^{(2)} = 0, & x < -V_2t \text{ 或 } x > V_1t. \end{cases} \quad (19)$$

显然, 本问题位移为齐次, 这里的 $L = 1$, 利用 $\tau = x/t$ 及广义函数论^[19-20] 和 (6)、(9)、(11) 式可将边界条件 (19) 的第 1 式写为:

$$\operatorname{Re} [T^{(2)}(\tau) m(\tau) n^{(2)}(\tau)] = -Pt\delta(x) = -P\delta(\tau), \quad -V_2 < \tau < V_1. \quad (20)$$

则由上式可推出 $m(\tau)$ 的解必为如下形式:

$$m(\tau) = \xi(\tau)/\tau, \quad (21)$$

式中 $\xi(\tau)$ 在区间 $-V_2 < \tau < V_1$ 中无奇点, 又由于 $T(\tau)$ 在亚音速内为纯虚量, $n(\tau)$ 为纯实量, 因此 $\xi(\tau)$ 在区间 $-V_2 < \tau < V_1$ 上一定为纯实量. 这样, 问题 (20) 变为

$$\begin{cases} \operatorname{Re} \xi(\tau) = 0, & \tau < -V_2 \text{ 或 } \tau > V_1, \\ \operatorname{Im} \xi(\tau) = 0, & -V_2 < \tau < V_1. \end{cases} \quad (22)$$

考虑到不对称性、无穷远条件及裂纹尖端的奇异性^[21-23], 可得 Keldysh-Sedov 问题 (22) 的唯一解

$$\xi(\tau) = \frac{A}{\sqrt{(V_1 - \tau)(V_2 + \tau)}}, \quad (23)$$

这里 A 为待定实常数.

然后, 将 (23) 式代入 (21) 式得

$$m(\tau) = \frac{A}{\tau \sqrt{(V_1 - \tau)(V_2 + \tau)}}. \quad (24)$$

将 (24) 式代入到 (20) 及 (5) 式, 在 $\tau \rightarrow 0$ 时, 即可确定实常数 A 为

$$A = -\frac{P \sqrt{V_1 V_2}}{\pi \sqrt{(C_{55}^{(2)}/C_{44}^{(2)}) n^{(2)}(0)}}. \quad (25)$$

然后将 (24) 式代入 (6)、(9)、(11) 式, 即可求得 $y = 0$ 上的应力 τ_{yz} 、位移 w 、动态应力强度因子 $K_3(t)$ 分别为

$$\tau_{yz}(x, 0, t) = \frac{A \sqrt{(C_{55}^{(2)} - \rho^{(2)} \tau^2)/C_{44}^{(2)}}}{\tau \sqrt{(x - V_1 t)(x + V_2 t)}} n^{(2)}(\tau), \quad x < -V_2 t \text{ 或 } x > V_1 t, \quad (26)$$

$$w = \frac{1}{C_{44}^{(2)}} \operatorname{Re} \int_{-\infty}^{x/t} \frac{A}{\tau \sqrt{(V_1 - \tau)(V_2 + \tau)}} n^{(2)}(\tau) d\tau, \quad -V_2 t < x < V_1 t, \quad (27)$$

$$\begin{aligned} K_3^{(1)}(t) &= \lim_{x \rightarrow V_1 t} \sqrt{2\pi(x - V_1 t)} \frac{A \sqrt{(C_{55}^{(2)} - \rho^{(2)} \tau^2)/C_{44}^{(2)}}}{\tau \sqrt{(\tau - V_1)(\tau + V_2)}} n^{(2)}(\tau) = \\ &A \frac{\sqrt{2\pi} \sqrt{(C_{55}^{(2)} - \rho^{(2)} V_1^2)/C_{44}^{(2)}}}{V_1 \sqrt{(V_1 + V_2)t}} n^{(2)}(V_1), \end{aligned} \quad (28)$$

$$\begin{aligned} K_3^{(2)}(t) &= \lim_{x \rightarrow -V_2 t} \sqrt{-2\pi(x + V_2 t)} \frac{A \sqrt{(C_{55}^{(2)} - \rho^{(2)} \tau^2)/C_{44}^{(2)}}}{\tau \sqrt{(\tau - V_1)(\tau + V_2)}} n^{(2)}(\tau) = \\ &A \frac{\sqrt{2\pi} \sqrt{(C_{55}^{(2)} - \rho^{(2)} V_2^2)/C_{44}^{(2)}}}{V_2 \sqrt{(V_1 + V_2)t}} n^{(2)}(-V_2). \end{aligned} \quad (29)$$

(28)、(29) 式中的上角标分别表示 $x \rightarrow V_1 t, x \rightarrow -V_2 t$ 时的动态应力强度因子。

2) 假设除了施加在坐标原点上的载荷变为一单位阶跃载荷以外, 其它条件均与上例相同, 则此问题的边界条件为:

$$\begin{cases} \tau_{yz}^{(1)} = \tau_{yz}^{(2)} = -PH(x), & -V_2 t < x < V_1 t, \\ w^{(1)} - w^{(2)} = 0, & x < -V_2 t \text{ 或 } x > V_1 t, \end{cases} \quad (30)$$

这里的 $H(x)$ 是 Heaviside 函数, 且有 $H'(x) = \delta(x)$ 。

显然, 本问题应力为齐次, 这里的 $L = 1$ 。根据(7)、(9)、(11)式及广义函数论^[19,20]可将边界条件(30)的第1式写为

$$\text{Re} [T^{(2)}(\tau) m(\tau) n^{(2)}(\tau)] = -PH'(x) = -P\delta(\tau), \quad -V_2 < \tau < V_1. \quad (31)$$

则由上式可推知 $m(\tau)$ 的解必满足如下形式:

$$m(\tau) = \xi(\tau)/\tau, \quad (32)$$

式中 $\xi(\tau)$ 在区间 $-V_2 < \tau < V_1$ 中无奇点。又由于 $T(\tau)$ 在亚音速内为纯虚量, $n(\tau)$ 为纯实量, 因此 $\xi(\tau)$ 在区间 $-V_2 < \tau < V_1$ 上一定为纯实量。这样, 问题(31)导致

$$\begin{cases} \text{Re} \xi(\tau) = 0, & \tau < -V_2 \text{ 或 } \tau > V_1, \\ \text{Im} \xi(\tau) = 0, & -V_2 < \tau < V_1. \end{cases} \quad (33)$$

考虑到不对称性、无穷远条件及裂纹尖端的奇异性^[21-23], 可得 Keldysh-Sedov 问题(33)的唯一解

$$\xi(\tau) = \frac{A}{[\tau(V_1 - \tau)(V_2 + \tau)]^{3/2}}, \quad (34)$$

这里 A 为待定实常数。

将(34)式代入(32)式得

$$m(\tau) = \frac{A}{\tau[\tau(V_1 - \tau)(V_2 + \tau)]^{3/2}}. \quad (35)$$

然后将(35)式代入到(31)及(5)式, 当 $\tau \rightarrow 0$ 时, 即可确定实常数 A ,

$$A = -\frac{P(V_1 V_2)^{3/2}}{\pi \sqrt{C_{55}^{(2)}/C_{44}^{(2)}} n^{(2)}(0)}. \quad (36)$$

在各向同性体中, 弹性波的扰动范围可以用半径为 $c_1 t, c_2 t$ 的圆形区域来表示, 这里的 c_1, c_2 分别为弹性体的纵、横波波速 ($c_1 > c_2$)。而在各向异性体中, 扰动的范围不在是圆形区域, 不会超过弹性体的门槛值 $C_d = \sqrt{C_{55}/\rho}$ (声速)。当 $|x| > C_d t$ 时, 有 $\text{Im}[T(\tau)] = 0$, 因而应力、位移皆为 0, 这说明 $y = 0$ 时, 弹性波的扰动不会超过 $C_d t$ 。

然后将(35)式代入(7)、(9)、(11)式后, 即可得 $y = 0$ 上的应力 τ_z 、位移 w 、动态应力强度因子 $K_3(t)$ 分别为

$$\begin{aligned} \tau_z = & \int_{-\infty}^x \frac{1}{t} \text{Re} \frac{A \sqrt{(C_{55}^{(2)} - \rho^{(2)} \tau^2)/C_{44}^{(2)}}}{\tau[\tau(V_1 - \tau)(V_2 + \tau)]^{3/2}} n^{(2)}(\tau) dt = \\ & - \text{Re} \int_{c_d}^{x/t} \frac{A \sqrt{(C_{55}^{(2)} - \rho^{(2)} \tau^2)/C_{44}^{(2)}}}{\tau^2 [\tau(V_1 - \tau)(\tau + V_2)]^{3/2}} n^{(2)}(\tau) d\tau, \\ & x < -V_2 t \text{ 或 } x > V_1 t, \end{aligned} \quad (37)$$

$$w = \frac{1}{C_{44}^{(2)}} \text{Re} \int_0^{x/t} \int_{c_d}^{\tau} \frac{A_1}{\tau[\tau(V_1 - \tau)(V_2 + \tau)]^{3/2}} n^{(2)}(\tau) d\tau dt,$$

$$-V_2 t < x < V_1 t, \quad (38)$$

$$K_3^{(1)}(t) = \lim_{x \rightarrow V_1 t} \sqrt{2\pi(x - V_1 t)} \times \\ \operatorname{Re} \int_{C_d}^{\infty/t} \frac{A \sqrt{(C_{55}^{(2)} - \rho^{(2)} \tau^2)/C_{44}^{(2)}}}{\tau^2 [(\tau - V_1)(\tau + V_2)]^{3/2}} n^{(2)}(\tau) d\tau = \\ 2 \sqrt{2\pi t} \frac{A \sqrt{(C_{55}^{(2)} - \rho^{(2)} V_1^2)/C_{44}^{(2)}}}{V_1^2 (V_1 + V_2)^{3/2}} n^{(2)}(V_1), \quad (39)$$

$$K_3^{(2)}(t) = \lim_{x \rightarrow -V_2 t} \sqrt{-2\pi(x + V_2 t)} \times \\ \operatorname{Re} \int_{C_d}^{\infty/t} \frac{A \sqrt{(C_{55}^{(2)} - \rho^{(2)} \tau^2)/C_{44}^{(2)}}}{\tau^2 [(\tau - V_1)(\tau + V_2)]^{3/2}} n^{(2)}(\tau) d\tau = \\ 2 \sqrt{2\pi t} \frac{A \sqrt{(C_{55}^{(2)} - \rho^{(2)} V_2^2)/C_{44}^{(2)}}}{V_2^2 (V_1 + V_2)^{3/2}} n^{(2)}(-V_2). \quad (40)$$

(39)、(40)式的极限属于 $0 \cdot \infty$ 型,必须转化为 ∞/∞ 型后,方可应用罗比塔(L'Hospital)法则进行求导计算^[24],从而得出上式的极限值.

5 动态应力强度因子的变化规律

针对具体问题的实际情况需将解析解转化为数值解,才能更有效地说明动态应力强度因子的变化规律.下面我们以公式(28)、(29)、(39)、(40)为例来表示动态应力强度因子与时间的关系,见图2和图3.所取参数如下:

$$C_{55}^{(2)} = 2C_{44}^{(2)} = 10.00 \text{ GPa}, \quad \rho^{(2)} = 2.7 \times 9.8 \times 10^3 \text{ N/m}^3;$$

$$C_{55}^{(1)} = 2C_{44}^{(1)} = 16.00 \text{ GPa}, \quad \rho^{(1)} = 7.8 \times 9.8 \times 10^3 \text{ N/m}^3;$$

$$V_1 = 300 \text{ m/s}; \quad V_2 = 250 \text{ m/s}; \quad P = 200 \text{ N}.$$

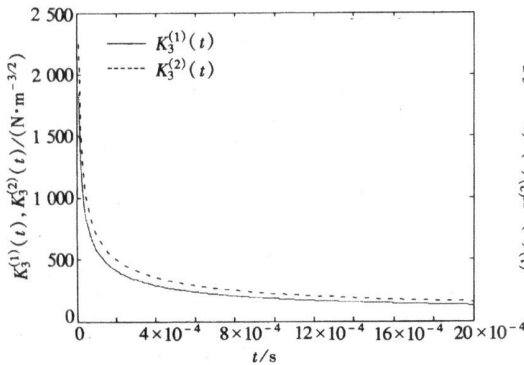


图2 动态应力强度因子 $K_3^{(1)}(t)$ 、 $K_3^{(2)}(t)$ 和时间 t 的关系

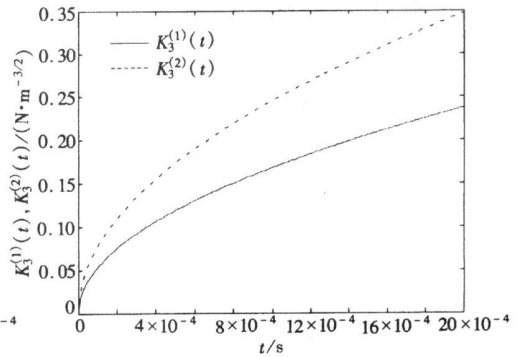


图3 动态应力强度因子 $K_3^{(1)}(t)$ 、 $K_3^{(2)}(t)$ 和时间 t 的关系

通过(28)、(29)式数值计算可知,随着时间的延长动态应力强度因子衰减的趋势逐渐减慢,以至最后趋近于一常数,具有明显的奇异性,见图2;相关的数值关系见表1.这一变化趋势与文献[25-26]的结果相类似,从而说明这一结果的正确性.对于(39)、(40)式数值计算可知,随着时间的延长动态应力强度因子从0开始逐渐增加,最后趋近于一常数,见图3.其变化趋势与文献[27-30]相类似,因而说明这一结果的正确性.相关的数值关系见表2.

表 1 动态应力强度因子 $K_3^{(1)}(t)$ 、 $K_3^{(2)}(t)$ 和时间 t 的相关数值

t/s	2×10^{-4}	4×10^{-4}	6×10^{-4}	8×10^{-4}	10×10^{-4}
$K_3^{(1)}(t)/(N \cdot m^{-3/2})$	413.292 0	292.241 6	238.614 3	206.646 0	184.829 8
$K_3^{(2)}(t)/(N \cdot m^{-3/2})$	503.385 6	355.947 3	290.629 8	251.692 8	225.120 9
t/s	12×10^{-4}	14×10^{-4}	16×10^{-4}	18×10^{-4}	20×10^{-4}
$K_3^{(1)}(t)/(N \cdot m^{-3/2})$	168.725 8	156.209 7	146.120 8	137.764 0	130.694 4
$K_3^{(2)}(t)/(N \cdot m^{-3/2})$	205.506 3	190.261 9	177.973 7	167.795 2	159.184 5

表 2 动态应力强度因子 $K_3^{(1)}(t)$ 、 $K_3^{(2)}(t)$ 和时间 t 的相关数值

t/s	2×10^{-4}	4×10^{-4}	6×10^{-4}	8×10^{-4}	10×10^{-4}
$K_3^{(1)}(t)/(N \cdot m^{-3/2})$	0.075 1	0.106 3	0.130 2	0.150 3	0.168 0
$K_3^{(2)}(t)/(N \cdot m^{-3/2})$	0.109 8	0.155 3	0.190 2	0.219 7	0.245 6
t/s	12×10^{-4}	14×10^{-4}	16×10^{-4}	18×10^{-4}	20×10^{-4}
$K_3^{(1)}(t)/(N \cdot m^{-3/2})$	0.184 1	0.198 8	0.212 5	0.225 4	0.237 6
$K_3^{(2)}(t)/(N \cdot m^{-3/2})$	0.269 0	0.290 6	0.310 6	0.329 5	0.347 3

6 结 论

采用自相似函数的途径能够获得 III 型界面非对称扩展裂纹问题的解析解, 这可认为是弹性理论的相似种类的动态问题. 解的方法是以专用的解析函数理论为基础, 是简单的和简明的. 这已经相当减少需要解决这一裂纹扩展问题的计算工作量. 对于不同正交异性材料界面上的裂纹扩展问题, 有些研究人员认为应具有 $r^{-1/2}$ 阶奇异性^[22, 10], 有些则认为应具有其它阶奇异性, 即使如此, 文中的方法仍然适用. 如果二种材料具有相同的材料常数, 那么这些解就转化为单一正交异性材料中相应问题的解, 详见文献[31-34]. 对材料 1 进行求解时, 可代入(12)式中的第 1 式, 然后采用文中的相同方法即可求解.

[参 考 文 献]

- [1] Liu X F. Closed-form solution for a mode-III interface crack between two bonded dissimilar elastic layers[J]. Internat J Fracture, 2001, **109**(1): 3-8.
- [2] Erigen A C, Suhubi E S. Elastodynamics. Vol 2. Linear Theory [M]. New York, San Francisco, London: Academic Press, 1975.
- [3] Alezander M, Korsunsky. Debonding of a weak interface in front of a through-thickness crack[J]. Internat J Fracture, 2001, **109**(4): 35-40.
- [4] Wei P J, Zhang S Y, Wu Y L, et al. Dynamic SIF of interface crack between two dissimilar viscoelastic bodies under impact loading[J]. Internat J Fracture, 2000, **105**(2): 127-136.
- [5] LÜ Nian-chun, CHENG Jin, CHENG Yun-hong. Mode III interface crack propagation in two joined media with weak dissimilarity and strong orthotropy[J]. Theoret Appl Fracture Mech, 2001, **36**(3): 219-231.
- [6] 程新. 不同正交异性材料界面上的扩展裂纹问题[J]. 固体力学学报, 1987, **8**(2): 108-116.
- [7] 吕念春, 唐立强, 程云虹. 正交异性复合材料界面上反平面动态自相似扩展裂纹问题的解[J]. 力学季刊, 2003, **24**(1): 108-112.
- [8] 杨敬源, 吕念春, 唐立强. 沿弱界面的 III 型界面裂纹中心区受均布载荷下的动态扩展问题[J]. 哈

- 尔滨工业大学学报, 2004, 37(3): 414-417.
- [9] Atkinson C. On the dynamic stress and displacement field associated with a crack propagating across the interface between two media[J]. Internat J Engng Sci, 1975, 13(5): 491-506.
- [10] Brock L M. Dynamic intensity factors for an interface flaw extending at a non-uniform rate[J]. J Elasticity, 1974, 4(1): 51-63.
- [11] Lee K W, Earmme Y Y. An interfacial edge crack anisotropic bimaterial under anti-plane singularity [J]. Internat J Fracture, 2000, 104(1): 15-23.
- [12] Choi S R, Chong C H, Chai Y S. Interfacial edge cracking in two bonded dissimilar orthotropic quarter planes under anti-plane shear[J]. Internat J Fracture, 1994, 67(2): 143-150.
- [13] Rubin-Gonzalez C, Mason J J. Dynamic intensity factors at the tip of a uniformly loaded semi-infinite crack in an orthotropic material[J]. J Mech Phys Solids, 2000, 48(5): 899-925.
- [14] WANG Yue-shen, WANG Duo. Transient motion of an interface dislocation and self-similar propagation of an interface crack: anti-plane motion[J]. Eng Fracture Mech, 1996, 55(5): 717-725.
- [15] 吕念春, 程云虹, 田秀波, 等. III型界面裂纹 Dugdale 模型的动态扩展问题[J]. 应用数学和力学, 2005, 26(9): 1105-1113.
- [16] Muskhelishvili N I. Some Fundamental Problems in the Mathematical Theory of Elasticity [M]. Moscow: Nauka, 1966.
- [17] Muskhelishvili N I. Singular Integral Equations [M]. Moscow: Nauka, 1968.
- [18] 吕念春, 程靳, 程云虹. 反平面动态扩展裂纹问题的研究[J]. 应用力学学报, 2004, 12(4): 156-160.
- [19] Hoskins R F. Generalized Functions [M]. New York: Ellis Horwood, 1979, 19-125.
- [20] 王夔山. 奇异函数及其在力学中的应用[M]. 北京: 科学出版社, 1993, 3-45.
- [21] Gakhov F D. Boundary-Value Problems [M]. Moscow: Fizmatgiz, 1963, 10-136.
- [22] Sih G C. Mechanics of Fracture 4. Elastodynamics Crack Problems [M]. Leyden: Noordhoff, 1977, 213-247.
- [23] Kanwal R P, Sharma D L. Singularity methods for elastostatics[J]. J Elasticity, 1976, 6(4): 405-418.
- [24] 同济大学数学教研室. 高等数学(上册)[M]. 北京: 高等教育出版社, 1994, 167-172.
- [25] Kalthoff J F, Beinert J, Winkler S. Measurements of dynamic stress intensity factors for fast running and arresting cracks in double-cantilever-beam specimens[A]. In: Fast Fracture and Arrest [C]. 627. Chicago, IL, Philadelphia Pa: ASTM-STP, 1977, 161-176.
- [26] Kabayashi A S. Dynamic fracture analysis by dynamic finite element method: generation and prediction analyses[A]. In: Nonlinear and Dynamic Fracture Mechanics [C]. (35). New York, NY: AMD, ASME, 1979, 19-36.
- [27] Ravi-Chandar K, Knauss W G. An experimental investigation into dynamic fracture—Pt 1 crack initiation and arrest[J]. Internat J Fracture, 1984, 25(4): 247-262.
- [28] Ravi-Chandar K, Knauss W G. An experimental investigation into dynamic fracture—Pt 2 microstructural aspects[J]. Internat J Fracture, 1984, 26(1): 65-80.
- [29] Ravi-Chandar K, Knauss W G. An experimental investigation into dynamic fracture—Pt 3 on steady-state crack propagation and crack branching[J]. Internat J Fracture, 1984, 26(2): 141-154.
- [30] Ravi-Chandar K, Knauss W G. An experimental investigation into dynamic fracture—Pt 4 on the interaction of stress waves with propagation cracks[J]. Internat J Fracture, 1984, 26(3): 189-200.
- [31] 程靳. 某些正交异性体弹性动力学问题[J]. 哈尔滨工业大学学报. 工程力学专辑, 1985(增刊): 8-21.
- [32] L N C, Cheng J, Cheng Y H. A dynamic model of bridging fiber pull-out of composite materials[J]. Mech Res Comm, 2005, 32(1): 1-14.

- [33] Atkinson C. The propagation of a brittle crack in anisotropic material[J]. *Internat J Engrg Sci*, 1965, 3(2): 77-91.
- [34] 吕念春, 程云虹, 胥红敏, 等. 复合材料桥纤维拔出问题的动态裂纹模型[J]. *应用数学和力学*, 2004, 25(10): 1093-1100.

Asymmetrical Dynamic Propagation Problems on Mode III Interface Crack

LÜ Nian-chun^{1,3}, YANG Ding-ning², CHENG Yun-hong⁴, CHENG Jin³

(1. School of Material Science and Engineering, Shenyang Ligong University, Shenyang 110168, P. R. China;

2. School of Architecture Engineering, Harbin Engineering University, Harbin 150001, P. R. China;

3. Department of Astronautics and Mechanics, Harbin Institute of Technology, Harbin 150001, P. R. China;

4. Department of Civil Engineering, Northeastern University, Shenyang 110006, P. R. China)

Abstract: By application of the theory of complex functions, asymmetrical dynamic propagation problems on mode III interface crack are studied. The universal representations of analytical solutions are obtained by the approaches of self-similar functions. The problems researched can be facilely transformed into Riemann-Hilbert problems and analytical solutions to an asymmetrical propagation crack under the condition of point loads and unit-step loads, respectively, are acquired. After those solutions were used by superposition theorem, the solutions of arbitrarily complex problems could be attained.

Key words: complex functions; mode III interface crack; self-similar function; analytical solutions