文章编号: 1000-0887(2007) 04-0462-09

一维磁流体力学方程组经典解的生命区间*

刘法贵

(华北水利水电学院 数学系, 郑州 450011)

(李继彬推荐)

摘要: 考虑具耗散项的一维磁流体力学方程组 Cauchy 问题. 对于非耗散情形证明了如果初始能量和磁场强度弱于声波的能量, 则 Cauchy 问题的光滑解在有限时间内破裂; 对于耗散情形, 如果初始能量、磁场强度和耗散强度弱于声波的能量, 则 Cauchy 问题的光滑解在有限时间内破裂, 而且给出了生命区间估计.

关 键 词: 磁流体力学方程组; Cauchy 问题; 经典解; 耗散机制; 生命区间
中图分类号: O175.27 文献标识码: A

引 言

考虑 Lagrange 坐标下一维磁流体力学方程组[1-3]:

$$\begin{cases} \partial_t v - \partial_x u = 0, \\ \partial_t u + \partial_x P(v, s) + \dfrac{1}{4\pi}(H_y \partial_x H_y + H_z \partial_x H_z) + 2\alpha u = 0, \\ \partial_t H_y + H_y v^{-1} \partial_x u = 0, \ \partial_t H_z + H_z v^{-1} \partial_x u = 0, \ \partial_t s = 0, \end{cases} \tag{1}$$

其中 $\alpha \geqslant 0$ 表示常数, u、v、H_y、H_z 和 s 分别表示速度、比容、磁场 $\boldsymbol{H}$ 在 y 和 z 方向的分量(这里假设 x 方向的分量 H_x 为常数, 不失一般性, 假设 $H_x \equiv 0$) 和熵, 压力函数 $P = P(v, s)$ 满足(见文献[1]):

$$\partial_v P(v, s) < 0, \ \partial_v^2 P(v, s) > 0, \qquad \forall v > 0. \tag{2}$$

对于 $\alpha = 0$ 的情形, 在紧支初始数据、周期初始数据和具衰减的初始数据条件下, 方程组(1) 的 Cauchy 问题的经典解奇性有较好的研究(见文献[2-9]), 但对一般小的初始数据和 $\alpha > 0$ 的情形研究结果则比较少.

让 $H_1 = vH_y, \ H_2 = vH_z,$

则(1) 式可化为

$$\begin{cases} \partial_t v - \partial_x u = 0, \\ \partial_t u + \partial_x P(v, s) + H^*(v, \partial_x v, H_1, H_2) + 2\alpha u = 0, \\ \partial_t H_1 = 0, \ \partial_t H_2 = 0, \ \partial_t s = 0, \end{cases} \tag{3}$$

* 收稿日期: 2005-05-27; 修订日期: 2007-01-10
基金项目: 国家自然科学基金资助项目(10571024); 河南省自然科学基金资助项目(2005 10078005); 河南省教育厅科学基金资助项目(200511051700)
作者简介: 刘法贵(1965—), 男, 河南南阳人, 教授, 博士(Tel: +86-371-65790858; Fax: +86-371-65790758; E-mail: Liufagui@ncwu.edu.cn).

其中 $$H^*(v,\partial_x v,H_1,H_2)=(4\pi v^3)^{-1}[v(H_1\partial_x H_1+H_2\partial_x H_2)-(H_1^2+H_2^2)\partial_x v].\tag{4}$$
因此，为考虑方程组(1)，只须讨论方程组(3)即可.

注意到(2)式，在区域 $v>0$ 上，方程组(3)存在下列实特征值:
$$\lambda_1(\boldsymbol{U})=-\sqrt{-\partial_v P+(4\pi v^3)^{-1}(H_1^2+H_2^2)}<\lambda_2(\boldsymbol{U})\equiv\lambda_3(\boldsymbol{U})\equiv\lambda_4(\boldsymbol{U})=0<\lambda_5(\boldsymbol{U})=-\lambda_1(\boldsymbol{U}),\tag{5}$$
其中 $\boldsymbol{U}=(u,v,s,H_1,H_2)^{\mathrm{T}}$. 显然，方程组(3)是具常重特征值 $\lambda_i(\boldsymbol{U})(i=2,3,4)$ 和真正非线性特征值 $\lambda_1(\boldsymbol{U})$ 及 $\lambda_5(\boldsymbol{U})$ 的双曲型方程组.

考虑方程组(3)的具下列初始数据的 Cauchy 问题
$$t=0:u=u_0(x),\ v=v_0(x)>0,\ s=s_0(x),\ H_i=H_{i0}(x)\quad(i=1,2).\tag{6}$$
由(3)式和(6)式，对于 $t\geqslant 0$,
$$s(t,x)=s_0(x),\ H_i(t,x)=H_{i0}(x)\qquad(i=1-2).\tag{7}$$
因此，方程组(3)可化为
$$\begin{cases}\partial_t v-\partial_x u=0,\\ \partial_t u+\partial_x P(v,s_0(x))+H^*(v,\partial_x v,H_{10}(x),H_{20}(x))+2\alpha u=0.\end{cases}\tag{8}$$
本文考虑 Cauchy 问题(3)和(6)，第1节给出本文的主要结果(定理2和定理3)，第2节和第3节给出主要结果的证明.

1　主要结果

让 $$R=u+\int_{v_*}^{v}\lambda(v,x)\mathrm{d}v,\ S=u-\int_{v_*}^{v}\lambda(v,x)\mathrm{d}v,\tag{9}$$
其中 $v_*>0$ 为常数,
$$\lambda(v,x)\equiv\lambda(v,s_0(x),H_{10}(x),H_{20}(x))=\sqrt{-\partial_v P(v,s_0(x))+(4\pi v^3)^{-1}(H_{10}^2(x)+H_{20}^2(x))}>0,\qquad\forall v>0.\tag{10}$$
则方程组(8)等价于
$$\begin{cases}\partial_t R-\lambda\partial_x R=\beta_1 H_{10}'(x)+\beta_2 H_{20}'(x)+\beta_3 s_0'(x)-\alpha(R+S),\\ \partial_t S+\lambda\partial_x S=\beta_1 H_{10}'(x)+\beta_2 H_{20}'(x)+\beta_3 s_0'(x)-\alpha(R+S),\end{cases}\tag{11}$$
其中
$$\begin{cases}\beta_1\equiv\beta_1(v,x)=-\left[(4\pi v^2)^{-1}H_{10}(x)+\lambda\int_{v_*}^{v}\partial_{H_1}\lambda(y,x)\mathrm{d}y\right],\\ \beta_2\equiv\beta_2(v,x)=-\left[(4\pi v^2)^{-1}H_{20}(x)+\lambda\int_{v_*}^{v}\partial_{H_2}\lambda(y,x)\mathrm{d}y\right],\\ \beta_3\equiv\beta_3(v,x)=-\left(\partial_s P(v,s_0(x))+\lambda\int_{v_*}^{v}\partial_s\lambda(y,x)\mathrm{d}y\right).\end{cases}\tag{12}$$
相应地，(6)式可化为
$$t=0:\begin{cases}R=R_0(x)\equiv R(u_0(x),v_0(x),s_0(x),H_{10}(x),H_{20}(x)),\\ S=S_0(x)\equiv S(u_0(x),v_0(x),s_0(x),H_{10}(x),H_{20}(x)).\end{cases}\tag{13}$$

1.1　$\alpha=0$ 的情形

假设(H)

$$\begin{cases} u_0(x)=u_*+\varepsilon\phi(x),\ v_0(x)=v_*+\varepsilon\psi(x), \\ H_{i0}(x)=H_i^*+\varepsilon^{1+\theta}\phi_i(x) \qquad (i=1,2), \\ s_0(x)=s_*+\varepsilon^{1+\theta}\phi_3(x), \end{cases}$$

其中 $\varepsilon>0$ 是一小参数, $\theta>0$ 为常数, $\phi(x),\psi(x)\in C^1(\mathbf{R})$ 为具有有界的 C^1 模, $\phi_i(x)\in C_0^2(\mathbf{R})$ $(i=1,2,3)$, u_*、H_i^* 和 s_* 是常数. 不失一般性, 假设 $u_*=H_1^*=H_2^*=s_*=0$.

根据文献[7], 容易得到下面定理:

定理 1 假设条件(H)成立, $\phi(x),\psi(x)\in C_0^1(\mathbf{R})$ 满足

$$\sup_{x\in\mathbf{R}}\left\{(1+|x|)(|\Phi(x)|+|\Phi'(x)|)\right\}<+\infty,$$

其中 $\Phi(x)=(\phi(x),\psi(x),\phi_1(x),\phi_2(x),\phi_3(x))^{\mathrm{T}}$. 则存在适当小的 $\varepsilon_0>0$ 使对任意的 $\varepsilon\in(0,\varepsilon_0]$, Cauchy 问题(3)和(6)的 C^1 解一定在有限时间内破裂, 且其 C^1 解的生命区间 $T(\varepsilon)$ 满足

$$c\varepsilon^{-1}\leqslant T(\varepsilon)\leqslant C\varepsilon^{-1}, \tag{14}$$

其中 $c>0$ 和 $C>0$ 为不依赖于 ε 的常数.

定理 2 假设条件(H)成立, 且存在点 $x_0\in\mathbf{R}$, 使

$$u_0'(x_0)+\lambda(v_0(x_0),x_0)v_0'(x_0)<0 \tag{15}$$

或

$$u_0'(x_0)-\lambda(v_0(x_0),x_0)v_0'(x_0)<0, \tag{16}$$

那么, 存在适当小的 $\varepsilon_0>0$ 使对任意的 $\varepsilon\in(0,\varepsilon_0]$, Cauchy 问题(3)和(6)的 C^1 解一定在有限时间内破裂, 且经典解的生命区间 $T(\varepsilon)$ 满足(14)式.

1.2 $\alpha>0$ 的情形

定理 3 假设 $\boldsymbol{U}_0(x)=\boldsymbol{U}(0,x)\ (\neq\mathbf{0})$ 是具周期 $p>0$ 的周期向量函数, 且

$$\mathrm{TV}_0^p(u_0)+\mathrm{TV}_0^p(v_0)>0, \tag{17}$$

$$\sqrt{\mathrm{TV}_0^p(s_0')+\mathrm{TV}_0^p(H_{10}')+\mathrm{TV}_0^p(H_{20}')}+\sqrt{\alpha}\leqslant\varepsilon(\mathrm{TV}_0^p(u_0)+\mathrm{TV}_0^p(v_0)), \tag{18}$$

其中 $\varepsilon>0$ 是仅依赖于 $u_0(x)$ 和 $v_0(x)$ 的 C^0 模的常数, $\mathrm{TV}_0^p(f(x))$ 表示 $f(x)$ 在区间 $[0,p]$ 上的总变差. 如果 $u_0(x)$、$v_0(x)$ 的 C^0 模和 $\varepsilon>0$ 充分小, 则 Cauchy 问题(3)和(6)的 C^1 解 $\boldsymbol{U}=\boldsymbol{U}(t,x)$ (这里 $u(t,x),v(t,x)\in C^1$, $s(t,x),H_1(t,x),H_2(t,x)\in C^2$) 的生命区间 $T(p)$ 满足

$$T(p)\leqslant\frac{Cp}{\mathrm{TV}_0^p(u_0)+\mathrm{TV}_0^p(v_0)}, \tag{19}$$

其中 $C>0$ 为不依赖 $p>0$ 的常数.

2 定理 2 的证明

引理 2.1 假设条件(H)成立, $\varepsilon>0$ 充分小, 则在 Cauchy 问题(11)和(13)的 C^1 解存在区域 $R(T)$ 上, 成立

$$|R(t,x)|\leqslant C_1\varepsilon, \qquad |S(t,x)|\leqslant C_1\varepsilon, \tag{20}$$

这里及以后 $C_i>0\ (i=1,2,\cdots)$ 表示不依赖 ε 和 T 的常数,

$$R(T)=\left\{(t,x)\mid t\in[0,T],\ x\in\mathbf{R},\ T>0\right\}.$$

证明 由(H), 容易得到

$$|u_0(x)|,\ |v_0(x)-v_*|\leqslant C_2\varepsilon. \tag{21}$$

那么,由连续性,在解的存在区域 $R(T)$ 上先验假设

$$|u(t,x)|\leqslant 1,\ |v(t,x)-v_*|\leqslant v_*/2. \tag{22}$$

由(12)、(22)式和(H),有

$$|\beta_i(v,x)|\leqslant C_3 \qquad (i=1,2,3). \tag{23}$$

这样,沿特征线积分(11)式并注意(13)、(21)、(23)式和(H),得到

$$|R(t,x)|\leqslant C_4\varepsilon,\ |S(t,x)|\leqslant C_4\varepsilon, \qquad \forall (t,x)\in R(T). \tag{24}$$

由(9)式,得

$$|u(t,x)|\leqslant C_5\varepsilon,\ |v(t,x)-v_*|\leqslant C_5\varepsilon, \qquad \forall (t,x)\in R(T). \tag{25}$$

因此,如果 $\varepsilon>0$ 充分小,则先验假设(22)式是合理的. 引理 2.1 证毕.

注记 2.1 由(25)式,易知存在适当小的 $\varepsilon_0>0$ 使对任意 $\varepsilon\in[0,\varepsilon_0]$,在 Cauchy 问题(3)和(6)的 C^1 解存在区域 $R(T)$ 上,有 $v(t,x)>0$.

定理 2 的证明 定义 $D^-=\partial_t-\lambda\partial_x,\ D^+=\partial_t+\lambda\partial_x$,

$$A(v,x)=\partial_x\lambda(v,x)-\frac{\partial_v\lambda}{\lambda}\int_{v_*}^{v}\partial_x\lambda(y,x)\mathrm{d}y+\frac{\partial_v\lambda}{2\lambda}\sum_{i=1}^{3}\partial_x\beta_i(v,x)\phi_i'(x), \tag{26}$$

$$B(v,x)=\frac{1}{2\lambda}\sum_{i=1}^{3}\partial_v\beta_i(v,x)\phi_i'(x), \tag{27}$$

$$C(v,x)=\sum_{i=1}^{3}\left[\left(\partial_x\beta_i(v,x)-\frac{\partial_v\beta_i}{\lambda}\int_{v_*}^{v}\partial_x\lambda(y,x)\mathrm{d}y\right)\phi_i'(x)+\beta_i(v,x)\phi_i''(x)\right], \tag{28}$$

$$h=h(v,x)=\frac{1}{2}\ln\lambda,\quad g=g(v,x)=\int_{v_*}^{v}(Be^h)(y,x)\mathrm{d}y, \tag{29}$$

那么,对(11)式关于 x 微分,并由(9)式,(26)式至(29)式,得

$$D^-w=-a(v,x)w^2+k_1(v,x)w+k_2(v,x), \tag{30}$$

$$D^+z=-a(v,x)z^2-k_1(v,x)z+k_2(v,x), \tag{31}$$

其中

$$w=e^h\partial_xR+g,\quad z=e^h\partial_xS+g, \tag{32}$$

$$a(v,x)=-\frac{\partial_v\lambda}{2\lambda}e^{-h}>0 \qquad (\text{注意到(2)式}), \tag{33}$$

$$k_1(v,x)=2a(v,x)g(v,x)+(A+D)(v,x), \tag{34}$$

$$k_2(v,x)=-a(v,x)g^2(v,x)-(A+D+Ce^h+G)(v,x), \tag{35}$$

$$D(v,x)=\frac{\partial_v\lambda}{2\lambda}\int_{v_*}^{v}\partial_x\lambda(y,x)\mathrm{d}y-\frac{1}{2}\partial_x\lambda(v,x), \tag{36}$$

$$G(v,x)=Be^h\int_{v_*}^{v}\partial_x\lambda(y,x)\mathrm{d}y-\lambda\int_{v_*}^{v}\partial_x(Be^h)(y,x)\mathrm{d}y. \tag{37}$$

由(30)、(31)式,得

$$\begin{cases} D^-w\leqslant-\frac{1}{2}aw^2+\frac{k_1^2}{2a}+k_2,\quad D^+z\leqslant-\frac{1}{2}az^2+\frac{k_1^2}{2a}+k_2. \end{cases} \tag{38}$$

让 $x=x_i(t,\alpha_i)$ (这里 $x_i(0,\alpha_i)=\alpha_i,\ i=1,2$) 表示方程组(11)第 i 特征线. 积分(38)式,并注意(34)式至(37)式,(26)式至(29)式,(H)和引理 2.1,得

$$w(t,x)\leqslant(w_0(\alpha_1)+C_6\varepsilon^{1+\theta})+C_7\int_0^t w^2(\tau,x_1(\tau,\alpha_1))\mathrm{d}\tau, \tag{39}$$

$$z(t,x)\leqslant(z_0(\alpha_2)+C_6\varepsilon^{1+\theta})+C_7\int_0^t z^2(\tau,x_2(\tau,\alpha_2))\,d\tau, \tag{40}$$

其中 $w_0(x)=w(0,x)$, $z_0(x)=z(0,x)$. 因此, 由(39)、(40) 式, 有

$$\begin{cases} w(t,x)\leqslant\dfrac{w_0(\alpha_1)+C_6\varepsilon^{1+\theta}}{1+C_7(w_0(\alpha_1)+C_6\varepsilon^{1+\theta})t}, \\ z(t,x)\leqslant\dfrac{z_0(\alpha_2)+C_6\varepsilon^{1+\theta}}{1+C_7(z_0(\alpha_2)+C_6\varepsilon^{1+\theta})t}. \end{cases} \tag{41}$$

如果(15) 式成立, 那么, 由(32) 式, 对 $t=0$ 和充分小的 $\varepsilon>0$, 有 $w_0(\alpha_1)+C_6\varepsilon^{1+\theta}<-C_8\varepsilon$. 从而, 存在有限的时间 $t_0>0$ 满足

$$1+C_7(w_0(\alpha_1)+C_6\varepsilon^{1+\theta})t_0=0,$$

使得当 $t\to t_0^-$ 时, $w(t,x_1(t,\alpha_1))\to-\infty$. 这样 Cauchy 问题(11) 和(13) 在

$$0\leqslant t<1/C_9\varepsilon \tag{42}$$

上存在 C^1 解. (42) 式表明(14) 式的右端成立($C=C_9^{-1}$).

下面证明(14) 式的左端.

由(30) 和(31) 式, 注意到引理 2. 1, 有

$$y(t)\leqslant C_{10}\varepsilon+C_{11}\int_0^t y^2(t)\,dt, \tag{43}$$

其中 $y(t)=\max\left\{\sup\limits_{x\in\mathbf{R}}|w(t,x)|,\sup\limits_{x\in\mathbf{R}}|z(t,x)|\right\}$. 利用(44) 式得

$$y(t)\leqslant C_{12}\varepsilon,\qquad 0\leqslant t\leqslant\min\left(1/(2C_{10}C_{11}),T\right).$$

因此(14) 式的左端亦成立. 定理 2 证毕.

3 定理 3 的证明

由周期性, 得

$$\begin{cases} |H'_{i0}(x)|_{C^0}\leqslant\mathrm{TV}_0^p(H'_{i0}) \qquad (i=1,2), \\ |s'_0(x)|_{C^0}\leqslant\mathrm{TV}_0^p(s'_0). \end{cases} \tag{44}$$

那么, 由(2)、(9) 式, (17) 和(18) 式分别等价于

$$\mathrm{TV}_0^p(R_0)+\mathrm{TV}_0^p(S_0)>0 \tag{45}$$

和

$$\sqrt{\mathrm{TV}_0^p(H'_{10})+\mathrm{TV}_0^p(H'_{20})+\mathrm{TV}_0^p(s'_0)}+\sqrt{\alpha}\leqslant C_0\varepsilon(\mathrm{TV}_0^p(R_0)+\mathrm{TV}_0^p(S_0)), \tag{46}$$

其中 $C_0>0$ 为不依赖于 $p>0$ 的常数. 这样, 为证(19) 式, 只须证明

$$T(p)\leqslant\frac{Cp}{\mathrm{TV}_0^p(R_0)+\mathrm{TV}_0^p(S_0)}, \tag{47}$$

其中 $C>0$ 为不依赖于 $p>0$ 的常数.

利用(2)、(9) 和(10) 式, 易得到

$$\partial_R\lambda<0,\ \partial_S\lambda>0. \tag{48}$$

让 $\xi=\mathrm{TV}_0^p(R_0)$, $\eta=\mathrm{TV}_0^p(S_0)$. 不失一般性, 假设

$$\xi\geqslant\eta. \tag{49}$$

现在证明在 Cauchy 问题(11) 和(13) 经典解 $(R(t,x),S(t,x))$ 存在区域 $0\leqslant t\leqslant T(T>0)$ 上, 存在仅依赖于 $U_0(x)$ 的 C^1 模的常数 $M>0$ 满足

$$T\xi\leqslant M. \tag{50}$$

由(46)和(49)式,得

$$B \overset{\triangle}{=} \mathrm{TV}_0^p(H_{10}') + \mathrm{TV}_0^p(H_{20}') + \mathrm{TV}_0^p(s_0') \leqslant \varepsilon^2\xi^2, \qquad \alpha \leqslant \varepsilon^2\xi^2. \tag{51}$$

让 $M_0 = \max\left\{ \| R_0(x) \|_{C^0}, \| S_0(x) \|_{C^0} \right\}$,

那么,由 $R(t,x)$ 和 $S(t,x)$ 的连续性,存在适当小的常数 $\sigma > 0$ 使对 $0 \leqslant t \leqslant \sigma$,

$$\| R(t,x) \|_{C^0} \leqslant C_1 M_0, \quad \| S(t,x) \|_{C^0} \leqslant C_1 M_0, \tag{52}$$

这里及以后 $C_i(i = 1, 2, \dots)$ 表示不依赖于 p、T、α 和 M_0 的正常数.

下面证明在 Cauchy 问题(11)和(13)经典解存在区域 $0 \leqslant t \leqslant T$ 上,

$$\| R(t,x) \|_{C^0} \leqslant C_2 M_0, \quad \| S(t,x) \|_{C^0} \leqslant C_2 M_0, \qquad \forall t \in [0, T]. \tag{53}$$

为证明(53)式,只须证明存在适当大的常数 $k > 0$(不依赖于 M_0 和 T),使如果

$$\| R(t,x) \|_{C^0} \leqslant 2kM_0, \quad \| S(t,x) \|_{C^0} \leqslant 2kM_0, \qquad \forall t \in [0, T] \tag{54}$$

成立,则亦成立

$$\| R(t,x) \|_{C^0} \leqslant kM_0, \quad \| S(t,x) \|_{C^0} \leqslant kM_0, \qquad \forall t \in [0, T]. \tag{55}$$

由(9)式及(54)式,对 $t \in [0, T]$ 成立

$$\| u(t,x) \|_{C^0} \leqslant C_3 M_0, \quad \| v(t,x) - v_* \|_{C^0} \leqslant C_3 M_0.$$

因此,在经典解存在区域 $0 \leqslant t \leqslant T$ 上,如果 M_0 充分小,则有

$$0 < v_* - C_3 M_0 \leqslant v(t,x) \leqslant v_* + C_3 M_0. \tag{56}$$

这样,如果 $M_0 > 0$ 充分小,则

$$| \beta_i(v, x) | \leqslant C_4. \tag{57}$$

让 $x = x_1(t,y)$ 表示过 x 轴上点 $(0,y)$ 的第一特征线,则有

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} x_1(t,y) = -\lambda(v(t, x_1(t,y)), x_1(t,y)), \quad x_1(0,y) = y. \tag{58}$$

沿 $x = x_1(t,y)$ 积分方程组(11)中第 1 个方程,得

$$R(t, x_1(t,y)) = R_0(y) + \sum_{i=1}^{3}\int_0^t [\beta_i(\tau) H_{i0} - \alpha(R + S)](\tau, x_1(\tau, y))\mathrm{d}\tau, \tag{59}$$

其中 $\beta_i(\tau) = \beta_i(v(\tau, x_1(\tau,y)), x_1(\tau,y))$, $H_{30}(x) = s_0(x)$. 那么,由(50)、(51)、(54)式和(56)、(57)式,如果 $\varepsilon > 0$ 适当小,则有

$$| R(t,x) | \leqslant M_0 + C_5 M\varepsilon^2\xi + 2kM\varepsilon^2\xi \leqslant 2M_0.$$

从而,取 $k \geqslant 2$,则(55)式对 $0 \leqslant t \leqslant T$ 成立,进而(53)式成立.

类似地,可证明 $S(t,x)$ 在区域 $0 \leqslant t \leqslant T$ 上有相仿于(53)式的估计式.

对(58)、(59)式关于 y 求导,得

$$\begin{aligned}\partial_y R = {} & R_0'(y) + \sum_{i=1}^{3}\int_0^t \beta_i H_{i0}'' \partial_y x_1(\tau, y)\mathrm{d}\tau + \int_0^t (\partial_R \beta_3 \partial_y R + \partial_S \beta_3 \partial_x S \partial_y x_1) s_0' \mathrm{d}\tau + \\ & \int_0^t \left[\left(\sum_{i=1}^{2} \partial_{H_i} \beta_3 H_{i0}' + \partial_s \beta_3 s_0' \right) \partial_y x_1 s_0' + (\partial_R \beta_1 \partial_y R + \partial_S \beta_1 \partial_x S \partial_y x_1) H_{10}' \right] \mathrm{d}\tau + \\ & \int_0^t \left[\left(\sum_{i=1}^{2} \partial_{H_i} \beta_1 H_{i0}' + \partial_s \beta_1 s_0' \right) \partial_y x_1 H_{10}' + (\partial_R \beta_2 \partial_y R + \partial_S \beta_2 \partial_x S \partial_y x_1) H_{20}' \right] \mathrm{d}\tau + \\ & \int_0^t \left[\left(\sum_{i=1}^{2} \partial_{H_i} \beta_2 H_{i0}' + \partial_s \beta_2 s_0' \right) \partial_y x_1 H_{20}' - \alpha(\partial_y R + \partial_x S)\partial_y x_1(\tau, y) \right] \mathrm{d}\tau,\end{aligned} \tag{60}$$

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \partial_y x_1 = -\partial_R \lambda \partial_y R - \left(\partial_S \lambda \partial_x S + \displaystyle\sum_{i=1}^{2} \partial_{H_i} \lambda H_{i0}' + \partial_s \lambda s_0' \right) \partial_y x_1, \\ \partial_y x_1(0, y) = 1. \end{cases} \tag{61}$$

由方程组(11)的第2个方程得

$$\partial_x S = \frac{1}{2\lambda}\left(\beta_3 s_0' + \beta_1 H_{10}' + \beta_2 H_{20}' - \alpha(R+S) - \frac{\mathrm{d}S}{\mathrm{d}_1 t}\right), \tag{62}$$

其中 $\mathrm{d}S/\mathrm{d}_1 t = \partial_t S - \lambda\partial_x S$. 定义 C^1 函数 $h = h(R, S, H_{10}, H_{20}, s_0)$:

$$\partial_S h = \partial_S \lambda/2\lambda. \tag{63}$$

显然, 由(53)式, 在 C^1 解 $\boldsymbol{U} = \boldsymbol{U}(t, x)$ 存在区域 $0 \leqslant t \leqslant T$ 上, 有

$$| h(R, S, H_{10}, H_{20}, s_0) | \leqslant C_6. \tag{64}$$

注意到(11)式和(62)、(63)式, 根据(61)式得到

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\partial_y x_1 = -\partial_R \lambda\partial_y R - [\beta_3(\partial_R h + \partial_S h) + \partial_s \lambda - \lambda\partial_s h] s_0'(y)\partial_y x_1 + \\ \qquad [\beta_2(\partial_R h + \partial_S h) + \partial_{H_1} \lambda - \lambda\partial_{H_1} h] H_{10}'\partial_y x_1 + \\ \qquad [\beta_2(\partial_R h + \partial_S h) + \partial_{H_2} \lambda - \lambda\partial_{H_2} h] H_{20}'\partial_y x_1 - \\ \qquad \left[\alpha(R+S)(\partial_R h + \partial_S h) - \dfrac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}_1 t}\right]\partial_y x_1(t, y), \\ \partial_y x_1(0, y) = 1. \end{cases} \tag{65}$$

由 $R_0'(x) \neq 0$ 及周期性, 存在 $y_* \in [0, p]$ 使

$$R_0'(y_*) = \min_{0 \leqslant y \leqslant p} R_0'(y) \overset{\Delta}{=} -\delta < 0. \tag{66}$$

在 C^1 解存在区域上, 沿 $x = x_1(t, y_*)$ 先验假设

$$-\frac{3}{2}\delta \leqslant \partial_y R(t, x_1(t, y_*)) \leqslant -\frac{1}{2}\delta. \tag{67}$$

这样, 由(48)和(65)两式得

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\partial_y x_1 \leqslant C_7\delta - [\beta_3(\partial_R h + \partial_S h) + \partial_s \lambda - \lambda\partial_s h] s_0'(y_*)\partial_y x_1(t, y_*) + \\ \qquad [\beta_2(\partial_R h + \partial_S h) + \partial_{H_1} \lambda - \lambda\partial_{H_1} h] H_{10}'\partial_y x_1(t, y_*) + \\ \qquad \left[\beta_2(\partial_R h + \partial_S h) + \partial_{H_2} \lambda - \lambda\partial_{H_2} h\right] H_{20}'\partial_y x_1(t, y_*) - \\ \qquad \left[\alpha(R+S)(\partial_R h + \partial_S h) - \dfrac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}_1 t}\right]\partial_y x_1(t, y_*), \\ \partial_y x_1(0, y_*) = 1. \end{cases}$$

因此 $$\partial_y x_1(t, y_*) \leqslant \left(1 - C_7\delta\int_0^t \exp\left(\int_0^\tau A(m)\,\mathrm{d}m\right)\mathrm{d}\tau\right)\exp\left(-\int_0^t A(s)\,\mathrm{d}s\right),$$

其中

$$\begin{aligned} A(t) = &-[\beta_3(\partial_R h + \partial_S h) + \partial_s \lambda - \lambda\partial_s h] s_0'(y_*)\partial_y x_1(t, y_*) + \\ &[\beta_2(\partial_R h + \partial_S h) + \partial_{H_1} \lambda - \lambda\partial_{H_1} h] H_{10}'\partial_y x_1(t, y_*) + \\ &[\beta_2(\partial_R h + \partial_S h) + \partial_{H_2} \lambda - \lambda\partial_{H_2} h] H_{20}'\partial_y x_1(t, y_*) - \\ &\left[\alpha(R+S)(\partial_R h + \partial_S h) - \frac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}_1 t}\right]\partial_y x_1(t, y_*). \end{aligned}$$

从而, 由(44)、(50)、(51)式和(64)式, 类似于(53)式的证明, 得

$$\partial_y x_1(t, y_*) \leqslant C_8(1 - C_7\delta t). \tag{68}$$

因此, 有

$$\partial_y x_1(0, y_*) = 1,\ \partial_y x_1(t_1, y_*) \leqslant 0,$$

其中 $t_1 = 1/(C_7\delta)$． 由(67)式,并注意到 $\partial_y R = \partial_x R \partial_y x_1$,易知 $\partial_x R(t, x)$ 在有限时间 $t(0 < t \leqslant t_1)$ 内破裂．从而有

$$T(p) \leqslant 1/(C_7\delta). \tag{69}$$

根据周期性,得

$$\int_{B_1} R_0'(y)\mathrm{d}y = \int_{B_2} | R_0'(x) | \mathrm{d}x = \frac{1}{2}\xi,$$

其中 $B_1 = \left\{y \mid y \in [0, p], R_0'(y) > 0\right\}$, $B_2 = \left\{y \mid y \in [0, p], R_0'(y) < 0\right\}$． 这样,由(66)式,得

$$\xi < 2\delta p. \tag{70}$$

注意到(49)式,结合(69)和(70)两式,得到(47)式,即有(19)式成立．进一步,如果取 $M = 2pC_7^{-1}$, 则(50)式的合理性由(69)式和(70)式得到．从而由(69)式即得(19)式．

现在验证(67)式的合理性． 对 $t = 0$,容易验证(67)式是合理的． 根据连续性,存在 $T_1(0 \leqslant T_1 \leqslant T)$ 使(67)式成立． 下面只须验证(67)式对区间 $[0, T]$ 也成立．

注意到(67)式对 $t \in [0, T_1]$ 成立,那么,由(68)式,得

$$0 < \partial_y x_1(t, y_*) \leqslant C_9, \qquad \forall t \in [0, T_1].$$

这样,根据(66)、(44)、(52)、(60)、(67)式,有

$$-\delta - C_{10}N \leqslant \partial_y R(t, x_1(t, y_*)) \leqslant \delta + C_{10}N, \qquad \forall t \in [0, T_1], \tag{71}$$

其中

$$N = \int_0^{T_1} [| s_0'' | + | H_{10}'' | + | H_{20}'' |](x_1(t, y_*))\mathrm{d}t + \\ T\delta(B + \alpha) + TB^2 + (B + \alpha)\int_0^{T_1} | \partial_x S(t, x_1(t, y_*)) | \mathrm{d}t. \tag{72}$$

由周期性,注意到(50)式至(52)式和(70)式,得

$$\int_0^{T_1} [| s_0'' | + | H_{10}'' | + | H_{20}'' |](x_1(t, y_*))\mathrm{d}t = \\ -\int_{y_*}^{y^*} \frac{1}{\lambda}\left(\sum_{i=1}^{2} | H_{i0}'' | + | s_0'' |\right)(x)\mathrm{d}x \leqslant C_{11}Tp^{-1}B \leqslant C_{12}\varepsilon^2\delta, \tag{73}$$

其中 $y^* = x_1(T_1, y_*)$．

类似地,

$$T\delta(B + \alpha) \leqslant C_{13}\varepsilon^2\delta, \ TB^2 \leqslant C_{14}\varepsilon^4\delta. \tag{74}$$

根据(44)、(52)式和(62)式,得

$$\int_0^{T_1} | \partial_x S(t, x_1(t, y_*)) | \mathrm{d}t \leqslant C_{15}\left[T(B + \alpha) + \int_0^{T_1}\left|\frac{\mathrm{d}S(t, x_1(t, y_*))}{\mathrm{d}_1 t}\right|\mathrm{d}t\right]. \tag{75}$$

因为 $\int_0^{T_1}\left|\frac{\mathrm{d}S(t, x_1(t, y_*))}{\mathrm{d}_1 t}\right|\mathrm{d}t$ 表示 $S(t, x)$ 在 $x = x_1(t, y_*)$ $(0 \leqslant t \leqslant T_1)$ 上的总变差,因此,注意到(44)、(50)、(52)式和(70)式,得到

$$\int_0^{T_1}\left|\frac{\mathrm{d}S(t, x_1(t, y_*))}{\mathrm{d}_1 t}\right|\mathrm{d}t \leqslant C_{16}(Tp^{-1}\xi + T(B + \alpha)) \leqslant C_{17}T(\delta + B + \alpha). \tag{76}$$

这样,由(73)式和 $\varepsilon > 0$ 的小性,根据(75)和(76)两式得到

$$(B + \alpha)\int_0^{T_1} | \partial_x S(\tau, x_1(\tau, y_*)) | \mathrm{d}\tau \leqslant C_{18}[(B + \alpha)\delta + B^2]T \leqslant C_{19}\varepsilon^2\delta. \tag{77}$$

将(77)和(73)式代入(72)式得到$N \leqslant C_{20}\varepsilon^2\delta$. 取适当小的$\varepsilon > 0$使$C_{10}C_{20} \leqslant 1/4$, 从而, 得

$$C_{10}N \leqslant \delta/4,$$

这样, 由(71)式, 得

$$-\frac{5}{4}\delta \leqslant \partial_y R(t, x_1(t, y_*)) \leqslant -\frac{3}{4}\delta, \qquad \forall t \in [0, T_1].$$

至此验证了(67)式. 定理3证毕.

[参 考 文 献]

[1] Jeffery A. Magnetohydrodynamics[M]. New York: Interscience, 1966.

[2] Cabannes H. Theoretical Magnetofluid Dynamics[M]. Applied Mathematics and Mechanics 13. New York: Academic Press, 1970.

[3] Rammaha M A. On the formation of singularities in magnetohydrodynamics waves[J]. J Math Anal Appl, 1994, **188**(4): 940-955.

[4] KONG De-xing. Formation of singularities in one dimensional hydromagnetic flow[J]. Comm Theoret Phys, 2000, **37**(4): 385-392.

[5] Shankar R, Bhardwaj D. On reactive shock in magnetogasdynamics flow[J]. J Math Appl Anal, 1993, **129**(3): 335-348.

[6] LIU Fa-gui. Global classical solutions for one dimensional hydromagnetic flow with dissipative terms [J]. J Partial Differential Equations, 2002, **15**(1): 23-38.

[7] KONG De-xing. Life-span of classical solutions to quasilinear hyperbolic systems with slow decay initial data[J]. Chinese Ann of Math, Ser B, 2000, **21**(4): 413-440.

[8] LI Tatsien, KONG De-xing. Blow up of periodic solutions to quasilinear hyperbolic systems[J]. Nonlinear Anal, 1996, **26**(11): 1779-1789.

[9] KONG De-xing. Cauchy Problem for Quasilinear Hyperbolic Systems[M]. MSJ Memoirs. Vol **6**. Tokyo: The Mathematical Society of Japan, 2000.

Life-Span of Classical Solutions for One Dimensional Hydromagnetic Flow

LIU Fa-gui

(North China Institute of Water Conservancy and Hydroelectric Power, Zhengzhou 450011, P.R.China)

Abstract: The Cauchy problem for one dimensional hydromagnetic dynamics with dissipative terms is concerned with. For the case of non-dissipation, it is shown that the smooth solutions will develop shocks in the finite time, if the initial amounts of entropy and the 'magnetic field' is smaller than that of sound waves. And for the case of dissipation, the initial amounts of entropy, dissipative effect and the 'magnetic field' in each period is smaller than that of sound waves. Then the smooth solutions must blow up in the finite time. Moreover, the life-span of smooth solution is given.

Key words: hydromagnetic flow; Cauchy problem; classical solution; life-span