应用数学和力学, 第 28 卷 第 4 期
2007 年 4 月 15 日出版

Applied Mathematics and Mechanics
Vol. 28, No. 4, Apr. 15, 2007

文章编号: 1000-0887(2007) 04-0497-08

灾害性天气预报理论模式的稳定性分析*

施惟慧[1], 王曰朋[2]

(1. 上海大学 数学系, 上海 200072;
2. 南京信息工程大学 数学系, 南京 210044)

(周哲玮推荐)

摘要: 详细讨论、分析了涉及灾害性天气预报的理论模式的稳定性, 这些模式包括: 非静力完全弹性方程组、滞弹性方程组. 证明了非静力完全弹性方程组在无穷可微函数类中是稳定方程; 滞弹性方程组则因为对流体的特殊假设, 改变了连续方程的形式, 于是出现了“流体为粘性与不可压假设的匹配”现象, 从而使在实际预报工作中占有重要地位的这一类重要方程组与 Navier-Stokes 方程呈现了相同拓扑性质的不稳定性, 而这是在数值预报工作中首先应该避免的. 据此提出了如何修改应用模式的参考意见.

关 键 词: 非静力完全弹性方程组; 滞弹性方程; 不稳定方程; 匹配
中图分类号: O175.29 文献标识码: A

引 言

在地球环境恶化而导致突发灾害性天气日益增多的今天, 使得对这种天气预报的准确度要求不断提高. 灾害性天气数值预报的理论模式称为中小尺度运动方程组, 它们来源于大气运动基本方程组, 在大气动力学的理论与应用研究中都占据着重要地位[1]1-16, [2-4]. 以大气运动基本方程组为基础, 根据问题的性质和尺度特征, 通过对它进行简化, 从而得到具有不同表现形式的中小尺度基本方程组. 常用的简化方程包括: 非静力完全弹性模式(方程组)、滞弹性模式(方程组)、Boussinesq 近似方程以及各种形式的线性近似方程组. 在某些近似方程组中, 会表现出一个共同的特点, 即湍流粘性耗散项的存在与大气的不可压假设的数学表达出现了某种形式的“匹配”, 而这种匹配有时会破坏了方程的稳定性, 进而为后续的理论与应用研究带来很多麻烦. 本文要做的是: 首先, 从偏微分方程理论的角度对非静力完全弹性方程组的稳定性进行分析, 在此基础上以滞弹性方程组为例, 通过与 Navier-Stokes 方程的比较, 分析这种匹配带来的问题, 并提出了如何避免这些麻烦的建议.

为本文分析、使用方便起见, 先叙述要引用的有关定义和定理[5], [6]10-52.

* 收稿日期: 2005-01-20; 修订日期: 2006-12-12
基金项目: 国家自然科学基金“十五”重大研究计划资助项目(90411006); 江苏省博士后科研资助计划项目(0602024C)
作者简介: 施惟慧(1936—), 女, 北京人, 教授, 博导, 法国国家博士(联系人. E-mail: eduwyp@163.com);
王曰朋(1970—), 男, 山东惠民人, 博士(E-mail: eduwyp@163.com).

设 V、Z 是两个 C^∞ 微分流形, $\dim V = n \geqslant 2$, $\dim Z = m$, $\Sigma \subseteq V$ 是 V 的 C^∞ 子流形, $\dim\Sigma = n-1$. $\mathrm{D} \subset J^{k_0}(V, Z)$ 是一个 k_0 阶的偏微分方程组.

不稳定方程的定义

如果对任何 Σ、D 在其上的任何 $C^k(k \geqslant k_0)$ 定解问题都是不适定的, 则称 D 是 C^k 不稳定方程.

稳定方程的判别定理和推论

判别定理　设对给定的方程组 D 已经确定了其本方程 D^*. D 是 $C^k(k \geqslant k_0)$ 稳定方程的充分必要条件是:

在纤维空间 $(E_{n-1,k_0-1}(\mathrm{D}), W_{n-1,k_0-1}(V, Z), \rho_{n-1,k_0-1})$ 的分层结果中, $(n-1, k_0-1)$ 阶横截层 $S^t_{n-1,k_0-1}(\mathrm{D})$ 不是空集: $S^t_{n-1,k_0-1}(\mathrm{D}) \neq \varnothing$.

推论　如果横截层是空集 $S^t_{n-1,k_0-1}(\mathrm{D}) = \varnothing$, 则 D 是 $C^k(k \geqslant k_0)$ 不稳定方程.

注 1　对于拟线性偏微分方程组, 上述判别定理的证明是通过讨论一个特定的代数方程组的性质来完成的. 对这个代数方程组, 首先它必须是确定方程组(即未知数的个数与方程的个数一致), 而它存在唯一解的充要条件, 就是原来偏微分方程组在分层时横截层非空集的充要条件.

因此, 如果在分层过程中出现的那个特定的代数方程组是不确定方程, 那么即使不再继续计算, 就已经可以断定分层时的横截层是空集了. 换句话说, 那个特定代数方程组是确定的, 是原来的偏微分方程为稳定方程的必要条件.

在注 1 中所叙述的, 实际上涉及到分层理论对偏微分方程研究中的一个拓扑不变量, 这些概念、理论请参看文献[5], [6] 10-52. (本方程、横截层以及分层理论的有关定义、概念和定理请参看文献[5], [6] 10-52).

中尺度运动被看为叠加在某种基本状态上的扰动[1]1-16, [2-3]. 在以下的分析中假设基本状态为静止大气, 描述其状态的参数 ρ_0、p_0、T_0 和 θ_0 都只是 z 的函数, 它们满足

$$\frac{\partial p_0}{\partial z} = -\rho_0 g, \quad p_0 = \rho_0 R T_0,$$

对应的扰动量为 p', ρ', T' 和 θ', 并且

$$p = p_0 + p', \quad \rho = \rho_0 + \rho', \quad T = T_0 + T', \quad \theta = \theta_0 + \theta',$$

$$\left|\frac{p'}{p_0}\right| \ll 1, \quad \left|\frac{\rho'}{\rho_0}\right| \ll 1, \quad \left|\frac{T'}{T_0}\right| \ll 1, \quad \left|\frac{\theta'}{\theta_0}\right| \ll 1,$$

T 与位温 θ 之间的关系为 $\theta = T(1\,000/p)^{R/c_p}$. 状态方程及位温的近似关系

$$\frac{p'}{p_0} \approx \frac{\rho'}{\rho_0} + \frac{T'}{T_0}, \quad \frac{\theta'}{\theta_0} \approx \frac{c_p}{c_V}\frac{p'}{p_0} - \frac{\rho'}{\rho_0}.$$

1　非静力完全弹性方程组的 C^∞ 稳定性

z 坐标系中的非静力完全弹性方程组如下[1]291-298, [2]:

$$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} = -\frac{1}{\rho_0}\frac{\partial p'}{\partial x} + fv + \frac{1}{\rho_0}\left[\frac{\partial}{\partial x}\left(\rho_0 k_1 \frac{\partial u}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\rho_0 k_1 \frac{\partial u}{\partial y}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(\rho_0 k_2 \frac{\partial u}{\partial z}\right)\right], \tag{1a}$$

$$\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = -\frac{1}{\rho_0}\frac{\partial p'}{\partial y} - fu + \frac{1}{\rho_0}\left[\frac{\partial}{\partial x}\left(\rho_0 k_1 \frac{\partial v}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\rho_0 k_1 \frac{\partial v}{\partial y}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(\rho_0 k_2 \frac{\partial v}{\partial z}\right)\right], \tag{1b}$$

$$\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}t} = -\frac{1}{\rho_0}\frac{\partial p'}{\partial z} - g\left(\frac{1}{C_s^2}\frac{p'}{\rho_0} - \frac{\theta'}{\theta_0}\right) +$$

$$\frac{1}{\rho_0}\left[\frac{\partial}{\partial x}\left(\rho_0 k_1\frac{\partial w}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(\rho_0 k_1\frac{\partial w}{\partial y}\right)+\frac{\partial}{\partial z}\left(\rho_0 k_2\frac{\partial w}{\partial z}\right)\right], \tag{1c}$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{1}{C_{\mathrm{s}}^2}\frac{p'}{\rho_0}\right)+\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial w}{\partial z}-\frac{g}{C_{\mathrm{s}}^2}w=0, \tag{1d}$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\theta'}{\theta_0}\right)+\frac{N^2}{g}w=\frac{1}{\rho_0}\left[\frac{\partial}{\partial x}\left(\rho_0 k_1\frac{\partial\theta'}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(\rho_0 k_1\frac{\partial\theta'}{\partial y}\right)+\frac{\partial}{\partial z}\left(\rho_0 k_2\frac{\partial\theta'}{\partial z}\right)\right]+S_\theta, \tag{1e}$$

$$\frac{\mathrm{d}q_r}{\mathrm{d}t}=\frac{1}{\rho_0}\left[\frac{\partial}{\partial x}\left(\rho_0 k_1\frac{\partial q_r}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(\rho_0 k_1\frac{\partial q_r}{\partial y}\right)+\frac{\partial}{\partial z}\left(\rho_0 k_2\frac{\partial q_r}{\partial z}\right)\right]+S_r,$$

$$r=1,2,3. \tag{1f}$$

未知函数组为$(u, v, w, p', \theta', q_r)=(u_1, u_2, u_3, \cdots, u_8)\in R^3\times(R_+^*)^5=Z$, 湍流粘性与扩散系数 k_l、k_l、k_l 假设为$(x, y, z, t)=(x_1, x_2, x_3, x_4)\in R^4=V$ 和未知的充分光滑的函数, 汇源项 S_θ、S_r 则假设为自变量、未知函数及其一阶微分的充分光滑的函数, 绝热声速 $C_{\mathrm{s}}^2=\gamma RT_0$, $\gamma=c_p/c_V$, $N^2=g(\ln\theta_0)'_z$ 是 Brunt-Vaisala 频率, 其它符号的含义均按大气动力学的约定． 将这个方程组记为D, 于是可将它看为 2 阶 Ehresmann 空间 $J^2(V, Z)$ 的一个子集合 $\mathrm{D}\subset J^2(V, Z)$.

使用 Ehresmann 空间的局部坐标[5-6]可将D 改写为以下形式:

$$g_1: k_1(p_{11}^1+p_{22}^1)+k_2p_{33}^1+\Phi_1=0,$$
$$g_2: k_1(p_{11}^2+p_{22}^2)+k_2p_{33}^2+\Phi_2=0,$$
$$g_3: k_1(p_{11}^3+p_{22}^3)+k_2p_{33}^3+\Phi_3=0,$$
$$g_4: \beta(p_1^1+p_2^2+p_3^3)+p_4^4+u_1p_1^4+u_2p_2^4+u_3p_3^4+\Phi_4'=0,$$
$$g_5: k_1(p_{11}^5+p_{22}^5)+k_2p_{33}^5+\Phi_5=0,$$
$$g_i: k_1(p_{11}^i+p_{22}^i)+k_2p_{33}^i+\Phi_i=0,\qquad i=6,7,8,$$

其中

$$\beta=C_{\mathrm{s}}^2\rho_0,\quad \Phi_4'=C_{\mathrm{s}}^2\rho_0\left[-\left(\frac{g}{C_{\mathrm{s}}^2}\right)u_3+\left(\frac{1}{C_{\mathrm{s}}^2\rho_0}\right)'_z u_4\right],$$

$\Phi_i(i=1, 2, 3, 5, 6, 7, 8)$ 是原来方程组中所有微分阶数小于2 的那些项之和在局部坐标之下的表达式． 将上述方程组的左侧依次记为 g_i, 于是

$$\mathrm{D}=L(g_1, \cdots, g_8)\subset J^2(V, Z),$$

即对应 $g_i: J^2(V, Z)\to\mathbf{R}$ 的公共零点． 当然有 $g_i\in C^\infty$.

对方程稳定性的分析, 需要知道 D 的本方程: $\mathrm{D}_*=\bigcup_l \mathrm{D}_l$, 其中 $\mathrm{D}_l\subset J^l(V, Z)$ 称为D 的 l -阶本方程($l=-1, 0, 1, \cdots$)． 由于计算过程非常繁复, 此处只列出计算结果如下:

$$\begin{cases}\mathrm{D}_{-1}=J^{-1}(V, Z)=V,\\ \mathrm{D}_0=J^0(V, Z)=V\times Z,\\ \mathrm{D}_1=L(g_4)\subset J^1(V, Z),\\ \mathrm{D}_2=L(g_i, e_j(g_4), g_4)\subset J^2(V, Z),\qquad i=1, 2, \cdots, 8,\ i\neq 4; j=1, 2, \cdots, 4.\\ l\geqslant 3\text{ 时},\\ \mathrm{D}_l=L(e_{j_1j_2\cdots j_{l-2}}(g_i), e_{jj_1j_2\cdots j_{l-2}}(g_4), \cdots, g_i, e_j(g_4), g_4)\subset J^l(V, Z),\\ \qquad i=1, 2, \cdots, 8,\ i\neq 4; j, j_1, \cdots, j_{l-2}=1, 2, \cdots, 4,\ 1\leqslant j_1\leqslant j_2\leqslant\cdots\leqslant j_{l-2}\leqslant 4,\end{cases} \tag{2}$$

(上述表达式中 $e_{*\cdots *}(f)$ 代表f 的Ehresmann 对应[5], [6] 10-52)． 有了本方程的表达式, 就可对 D

的稳定性进行分析了.

定理 1 设D 中的所有参数都是其变元的 C^{∞} 可微函数. 那么非静力完全弹性方程组 D 是 C^{∞} 稳定方程.

证明 根据稳定性判别定理, 只需证明对任何 $k(k \geqslant k_0 = 2)$, D 的 $(3, k-1)$ 阶横截层都不是空集:

$$S^t_{3,k-1}(\mathrm{D}) \neq \emptyset.$$

事实上, 当所有参数都是 C^{∞} 可微函数时, 根据横截层的性质[5], [6] 10-52, 也只要证明 $(3, k_0-1) = (3,1)$ 阶横截层 $S^t_{3,1}(\mathrm{D})$ 不是空集就可以了. 根据 $D_2 = L(g_i, e_j(g_4), g_4)$ $(i = 1, 2, \cdots, 8, i \neq 4; j = 1, 2, \cdots, 4)$, 纤维空间

$$\rho_{3,1}: E_{3,1}(\mathrm{D}) \to W_{3,1}(V, Z)$$

的分层过程[5-6], 可被归结为对下面的以 $\{X_i\}$ $(i = 1, 2, \cdots, 8)$ 为未知数的代数方程组解的性质的讨论, 而它存在唯一解的充要条件就是横截层非空的充要条件[5-6]:

$$\begin{aligned}
&K_\delta X_1 = \varphi_1,\\
&K_\delta X_2 = \varphi_2,\\
&K_\delta X_3 = \varphi_3,\\
&(-\beta\delta_1)X_1 + (-\beta\delta_2)X_2 + \beta X_3 + \Delta_u X_4 = \varphi_4,\\
&[k_1(\delta_1^2 + \delta_2^2) + k_2]X_5 = \varphi_5,\\
&[k_1(\delta_1^2 + \delta_2^2) + k_2]X_i = \varphi_i, \qquad i = 6, 7, 8,
\end{aligned}$$

式中

$$K_\delta = k_1(\delta_1^2 + \delta_2^2) + k_2, \quad \Delta_u = u_3 - u_1\delta_1 - u_2\delta_2 - \delta_4,$$

φ_i $(i = 1, 2, \cdots, 8)$ 由 Φ_i、Φ_4'、D_2 以及指定的某个 $\tau \in G_3^*(TJ^1(V, Z))$ 决定, $\{\delta_1, \delta_2, \delta_4\}$ 是标志 τ 的特性的一组实数, u_i 则是 τ 的一部分坐标. $G_3^*(TJ^1(V, Z))$ 是由切空间 $TJ^1(V, Z)$ 中的三维子空间构成的横截 Grassmann 流形. 将这个代数方程组记为(*).

显然, (*) 存在唯一解的充要条件是

$$\Delta_u = u_3 - u_1\delta_1 - u_2\delta_2 - \delta_4 \neq 0, \tag{3}$$

这也就是 $(3, k_0-1) = (3,1)$ 阶横截层 $S^t_{3,1}(\mathrm{D})$ 不是空集的充要条件[5-6]. 根据方程稳定性的判别定理, 非静力完全弹性方程组是 C^{∞} 稳定方程. 定理证毕.

2 滞弹性方程组的不稳定性分析

z 坐标系中的滞弹性方程组如下[1] 291-298, [2]:

$$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} = -\frac{1}{\rho_0}\frac{\partial p'}{\partial x} + fv + \frac{1}{\rho_0}\left[\frac{\partial}{\partial x}\left(\rho_0 k_1 \frac{\partial u}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\rho_0 k_1 \frac{\partial u}{\partial y}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(\rho_0 k_2 \frac{\partial u}{\partial z}\right)\right], \tag{4a}$$

$$\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = -\frac{1}{\rho_0}\frac{\partial p'}{\partial y} - fu + \frac{1}{\rho_0}\left[\frac{\partial}{\partial x}\left(\rho_0 k_1 \frac{\partial v}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\rho_0 k_1 \frac{\partial v}{\partial y}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(\rho_0 k_2 \frac{\partial v}{\partial z}\right)\right], \tag{4b}$$

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}t} = &-\frac{1}{\rho_0}\frac{\partial p'}{\partial z} - g\left(\frac{1}{C_s^2}\frac{p'}{\rho_0} - \frac{\theta'}{\theta_0}\right) + \frac{1}{\rho_0}\left[\frac{\partial}{\partial x}\left(\rho_0 k_1 \frac{\partial w}{\partial x}\right) + \right.\\ &\left.\frac{\partial}{\partial y}\left(\rho_0 k_1 \frac{\partial w}{\partial y}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(\rho_0 k_2 \frac{\partial w}{\partial z}\right)\right],\end{aligned} \tag{4c}$$

$$\frac{\partial \rho_0 u}{\partial x} + \frac{\partial \rho_0 v}{\partial y} + \frac{\partial \rho_0 w}{\partial z} = 0, \tag{4d}$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\theta'}{\theta_0}\right)+\frac{N^2}{g}w=\frac{1}{\rho_0}\left[\frac{\partial}{\partial x}\left(\rho_0 k_1\frac{\partial\theta'}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(\rho_0 k_1\frac{\partial\theta'}{\partial y}\right)+\frac{\partial}{\partial z}\left(\rho_0 k_2\frac{\partial\theta'}{\partial z}\right)\right]+S_\theta, \tag{4e}$$

$$\frac{\mathrm{d}q_r}{\mathrm{d}t}=\frac{1}{\rho_0}\left[\frac{\partial}{\partial x}\left(\rho_0 k_1\frac{\partial q_r}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(\rho_0 k_1\frac{\partial q_r}{\partial y}\right)+\frac{\partial}{\partial z}\left(\rho_0 k_2\frac{\partial q_r}{\partial z}\right)\right]+S_r,$$

$$r=1,2,3. \tag{4f}$$

方程组中的各种符号的含义、约定都与第 1 节中的非静力完全弹性方程组相同．将此方程记为D．以下记$(x,y,z,t)=(x_1,x_2,x_3,x_4)\in R^4=V$, 未知函数组为$(u,v,w,p',\theta',q_r)=(u_1,u_2,u_3,u_4,u_5,u_r)\in R^3\times(R_+^*)^5=Z$． 与处理非静力完全弹性方程组一样, 先使用$J^2(V,Z)$ 的局部坐标改写 D 为:

$$g_1: k_1(p_{11}^1+p_{22}^1)+k_2p_{33}^1+\Psi_1=0,$$
$$g_2: k_1(p_{11}^2+p_{22}^2)+k_2p_{33}^2+\Psi_2=0,$$
$$g_3: k_1(p_{11}^3+p_{22}^3)+k_2p_{33}^3+\Psi_3=0,$$
$$g_4: p_1^1+p_2^2+p_3^3+\alpha_0u_3=0,$$
$$g_5: k_1(p_{11}^5+p_{22}^5)+k_2p_{33}^5+\Psi_5=0,$$
$$g_r: k_1(p_{11}^r+p_{22}^r)+k_2p_{33}^r+\Psi_r=0,\qquad r=6,7,8,$$

其中 $\alpha_0=(\rho_0)'_z/\rho_0$, $\Psi_i(i=1,2,3,5,\cdots,8)$ 是原来方程组中所有微分阶数小于 2 的项之和在 Ehresmann 空间的局部坐标下的表达式． 于是

$$\mathrm{D}=L(g_1,\cdots,g_8)\subset J^2(V,Z).$$

D 的本方程 $\mathrm{D}_*=\bigcup_l \mathrm{D}_l(l=-1,0,1,2,\cdots)$ 为

$$\begin{cases}\mathrm{D}_{-1}=J^{-1}(V,Z)=V=R^4,\\ \mathrm{D}_0=J^0(V,Z)=V\times Z=R^4\times R^3\times(R_+^*)^5,\\ \mathrm{D}_1=L(g_4)\subset J^1(V,Z),\\ \mathrm{D}_2=L(g_i,e_j(g_4),\hat{g}_4,g_4)\subset J^2(V,Z),\\ l\geqslant 3\text{ 时},\\ \mathrm{D}_l=L(e_{jj_1j_2\cdots j_{k-2}}(g_i),\ e_{jj_1j_2\cdots j_{k-2}}(g_4),\ e_{jj_1j_2\cdots j_{k-2}}(\hat{g}_4),\cdots,g_i,\ e(g_4),\ \hat{g}_4,\ g_4),\\ \qquad i=1,2,\cdots,8,\ i\neq 4;\ j,j_1,\cdots,j_{k-2}=1,2,\cdots,4,\ 1\leqslant j_1\leqslant j_2\leqslant\cdots\leqslant j_{k-2}\leqslant 4,\end{cases} \tag{5}$$

其中 $\hat{g}_4$ 代表下面方程的左侧:

$$\hat{g}_4: \frac{1}{\rho_0}(p_{11}^4+p_{22}^4+p_{33}^4)+(p_{11}^1+p_{22}^1)\frac{\partial k_1}{\partial x_1}+p_{33}^1\frac{\partial k_2}{\partial x_1}+(p_{11}^2+p_{22}^2)\frac{\partial k_1}{\partial x_2}+$$
$$p_{33}^2\frac{\partial k_2}{\partial x_2}+(p_{11}^3+p_{22}^3)\frac{\partial k_1}{\partial x_3}+p_{33}^3\frac{\partial k_2}{\partial x_3}+\Psi_4=0, \tag{6}$$

式中

$$\Psi_4=(p_1^1)^2+(p_2^2)^2+(p_3^3)^2+2(p_2^1p_1^2+p_3^1p_1^3+p_3^2p_2^3)+$$
$$f(p_2^1-p_1^2)-(\alpha_0)'_zp_3^3+\left[\left(\frac{1}{\rho_0}\right)'_z+\left(\frac{g}{C_s^2\rho_0}\right)\right]p_3^4-\left(\frac{g}{\theta_0}\right)p_3^5+$$
$$\left(u_1\frac{\partial f}{\partial x_2}-u_1\frac{\partial f}{\partial x_1}\right)-(\alpha_0)'_zu_3+\left(\frac{g}{C_s^2\rho_0}\right)'_zu_4-\left(\frac{g}{\rho_0}\right)'_zu_5.$$

定理 2 滞弹性方程组 D 是 $C^k(k\geqslant 2)$ 不稳定方程.

证明 根据稳定方程判别定理的推论, 如果我们能证明滞弹性方程组的 $(3,k_0-1)=(3,$

1) 阶横截层 $S^t_{3,1}(\mathrm{D})$ 是空集, 那么就证明了它是一个 $C^k(k\geqslant 2)$ 不稳定方程.

使用 D 的 2 阶本方程 D_2, 现在要证明下述以 $\left\{Y_i\right\}$ 为未知数的代数方程组不存在"稳定的"唯一解[5],[6]10-52:

$$\boldsymbol{M}\boldsymbol{Y}=\boldsymbol{B}, \tag{7}$$

其中

$$\boldsymbol{M}=\begin{bmatrix} K_\delta & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & K_\delta & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & K_\delta & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\ -\delta_1 & -\delta_2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\ \Delta_1 & \Delta_2 & \Delta_3 & \Delta\rho & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & K_\delta & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & K_\delta & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & K_\delta & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & K_\delta \end{bmatrix}_{9\times 8},$$

$$\boldsymbol{Y}^{\mathrm{T}}=[Y_1\quad Y_2\quad Y_3\quad Y_4\quad Y_5\quad Y_6\quad Y_7\quad Y_8]_{1\times 8},$$

$$\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}=[B_1\quad B_2\quad B_3\quad B_4\quad B_5\quad B_6\quad B_7\quad B_8\quad B_9]_{1\times 9},$$

$$K_\delta=k_1(\delta_1^2+\delta_2^2)+k_2,\ K_\delta=k_1(\delta_1^2+\delta_2^2)+k_2,\ K_\delta=k_1(\delta_1^2+\delta_2^2)+k_2,$$

$$\Delta_1=(\delta_1^2+\delta_2^2)\frac{\partial k_1}{\partial x_1}+\frac{\partial k_2}{\partial x_1},\quad \Delta_2=(\delta_1^2+\delta_2^2)\frac{\partial k_1}{\partial x_2}+\frac{\partial k_2}{\partial x_2},$$

$$\Delta_3=(\delta_1^2+\delta_2^2)\frac{\partial k_1}{\partial x_3}+\frac{\partial k_2}{\partial x_3},\quad \Delta\rho=\frac{1}{\rho_0}(\delta_1^2+\delta_2^2+1).$$

$B_i(i=1,2,\cdots,9)$ 由 D_2 及某个特定的 $\tau\in G_3^*(TJ^1(V,Z))$ 以及 $\Psi_i(i=1,2,3,5,\cdots,8)$、$\Psi_4$ 决定.

显然, 这个不确定代数方程组不可能存在"稳定的"唯一解. 这个结果代表的是: 在对纤维空间

$$\rho_{3,1}: E_{3,1}(\mathrm{D})\rightarrow W_{3,1}(V,Z)$$

分层时, D 的(3, 1)阶横截层 $S^t_{3,1}(\mathrm{D})$ 是空集

$$S^t_{3,1}(\mathrm{D})=\varnothing.$$

根据方程稳定性判别定理的推论, 滞弹性方程组是 $C^k(k\geqslant 2)$ 不稳定方程. 定理证毕.

注 2 定理证明过程中说到代数方程组(7)不存在"稳定的"唯一解, 其含义是: 在方程(7)是不确定方程的情形下, 不可能由它确定 $W_{3,1}(V,Z)$ 的非空开集 $S^t_{3,1}(\mathrm{D})$, 而 $S^t_{3,1}(\mathrm{D})$ 是否空集则完全决定了原来偏微分方程是否稳定.

3 中尺度不稳定方程与 Navier-Stokes 方程的比较

描述粘性、不可压流体运动的 Navier-Stokes 方程为[7]

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}\boldsymbol{u}}{\mathrm{d}t}=-\dfrac{1}{\rho}\mathrm{grad}p+\nu\Delta\boldsymbol{u}+\boldsymbol{F}(\boldsymbol{x},t),\\ \mathrm{div}\,\boldsymbol{u}=0,\\ \dfrac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}t}=\kappa\Delta T+Q(\boldsymbol{x},t,\boldsymbol{u},p,T,\partial\boldsymbol{u},\partial T,\partial p). \end{cases} \tag{8}$$

方程的未知函数是 $\boldsymbol{u}$、p、T, 其中 $\boldsymbol{u} = (u_1, u_2, u_3)$ 代表在空间 $R^4 = V$ 中流体的运动速度, p 是压力, T 是温度, 密度 $\rho > 0$ 是常数, 粘性系数 $\nu > 0$、$\kappa > 0$、源(汇) Q 可假设为常数或者是 $(\boldsymbol{x}, t) = (x_1, x_2, x_3, t) \in R^4$ 以及未知函数及其一阶微分的充分光滑的函数. 记这个方程为 D_{N-S}.

关于这个方程以及它的一些"变形方程"的 $C^k(k \geqslant 2)$ 不稳定性, 在文献[6] 134-189 中已有详细证明并给出了众多例证. 本节使用这些结果来分析有关造成中尺度基本方程组不稳定性的原因. 首先从比较粘性系数与连续方程开始.

1) 关于粘性系数

. 在 D_{N-S} 中, 粘性系数 ν 代表的是分子粘性;

. 在几类中尺度基本方程组中, 不计分子粘性, 方程组中出现的 $k_i, k_i, k_i (i = 1, 2)$ 是湍流粘性耗散系数;

它们都是二阶微分项之前的系数. 因此, 也可说它们在方程中处于相同的位置.

2) 关于连续方程

. 在 D_{N-S} 中, 流体的不可压假设使连续方程表现为式(8);

. 在非静力完全弹性方程组的连续方程中, 连续方程(1) 表现大气为可压;

. 在滞弹性方程组中, 连续方程(4) 在表现形式上虽然与不可压假设的式(8) 有区别, 但也只多出来一项 $\alpha_0 w$, 也未出现未知函数关于时间 t 的微分;

因此, 比较式(4)、(8), 可认为它们基本属于同一"类型".

3) 纤维空间

$$\rho_{3,1}: E_{3,1}(D) \to W_{3,1}(V, Z),$$

$\rho_{3,1}$ 的分层, 对于滞弹性方程, 造成(3, 1) 阶横截层 $S^t_{3,1}(D)$ 是空集的原因和Navier-Stokes 方程的(3, 1) 阶横截层 $S^t_{3,1}(D_{N-S})$ 是空集的原因一样, 都是因为出现了一组不确定代数方程组, 最后导致了原来的偏微分方程的稳定性被破坏.

为什么会出现这组不确定代数方程组呢? 根据计算、分析过程可知, 其根本原因就是: 粘性系数的存在与不可压假设形式的连续方程同时出现, 这里称其为"匹配". 而对于非静力完全弹性方程组就没有这个问题, 原因就在于它的连续方程是可压形式, 虽然它的湍流粘性、耗散系数也存在且不为零.

显然, 在同一类可微函数类中, 如果一个偏微分方程组不存在稳定的局部解, 那么也不可能存在稳定的整体解.

4 建　议

基于上述的分析, 提出以下建议作为中尺度理论模式在实际应用工作中的参考:

. 在根据问题的中尺度特征对大气运动基本方程组进行简化时, 要保留连续方程在"可压假设下"的形式, 以避免粘性系数项与不可压假设的"匹配"形式出现.

. 在大气动力学中, 出于实际计算工作中的需要, 常常会利用原来方程组中的某些微分方程经过一些"微分运算"而导出另一个微分方程. 这里要当心一个容易被忽略的问题, 即: 对方程施行微分运算的意义和根据是什么? 事实上, 经过这样运算之后所得的新方程组往往并不一定与原来的偏微分方程组等价. 等价的定义是: 变化前后的两个偏微分方程组具有相同的解空间构造. 比如, 中尺度问题中的滞弹性方程组, 利用运动方程和连续方程经过指定的"微分运算", 得到了一个所谓的 气压扰动诊断方程, 如果用这个方程"替换"原来方程组里的某个

方程(比如连续方程),那么得到的这个新方程组就与原来的方程组不等价.

因此,对中尺度基本方程组的研究,似乎应该注意以下几个问题:

. 为保证方程组的稳定性,简化过程中要避免上述的"匹配"形式出现;

. 不要对方程组施行意义不明的微分运算,避免造成前后两个微分方程不等价,而保证前后两个方程的等价性,是解决问题所必须遵守的一个必要条件.

. 简化理论模式的原因,一是相关问题的尺度要求,二是为了简化数值计算的过程. 但是,如果简化的理论模式不稳定,那么按照以它为原型通过离散手段得到的数值模式来做实际预报,也就没有了根据. 事实上,如果原来的理论模式稳定,在一定的条件下我们可以求出它的某个指定问题的解析解. 显然,从这个解析解出发,一样可以使用计算机做数值预报,而且可以控制误差.

[参 考 文 献]

[1] 张玉玲.中尺度大气动力学引论[M].北京:气象出版社,1999,1-16,291-298.

[2] 沈桐立,田永祥,葛孝贞,等.数值天气预报[M].北京:气象出版社,2003,355-380.

[3] 吕美仲,侯志明,周毅.动力气象[M].北京:气象出版社,2004,37-54.

[4] 刘式适,刘式达.大气动力学[M].北京:北京大学出版社,1999,1-33.

[5] SHIH Wei-shu. Stratifications et Equations aux Derivees Partielles, Singularities of Maps, and Applications to Differential Equations[M]. Collections Travaux en Cours. 54. Paris: Hermann, 1997, 95-124.

[6] 施惟慧,陈达段,何幼桦.分层理论与非线性偏微分方程基础[M].上海:上海大学出版社,2001,10-52,134-189.

[7] Landau L, Lifchitz E. Mecanique des Fluides [M]. Moscow: Editions Mir, 1971, 62-122.

Stability of Theoretical Model for Catastrophic Weather Prediction

SHI Wei-hui[1], WANG Yue-peng[2]

(1. Department of Mathematics, Shanghai University, Shanghai 200072, P.R.China;

2. Department of Mathematics, Nanjing University of Information Science and Technology, Nanjing 210044, P.R.China)

Abstract: Stability related to theoretical model for catastrophic weather prediction that includes non-hydrostatic perfect elastic model, anelastic model was discussed and analyzed in detail. It was proved that in infinitely differentiable function class non-hydrostatic perfect elastic equations set is stable. However, for anelastic equations set, its continuity equation is changed in form because of the particular hypothesis for fluid, so "the matching consisting of both viscosity coefficient and incompressible assumption" appears, thereby the most important equations set of this class in practical prediction shows the same instability in topological property as Navier-Stokes equation, which should be avoided first in practical numerical prediction. In light of this, the referenced suggestions to amend applied model are finally presented.

Key words: non-hydrostatic perfect elastic equations set; anelastic equation; unsteady equation; matching