

离散系统的广义同步

马忠军^{1,2}, 刘曾荣³, 张刚⁴

- (1. 桂林电子科技大学 数学与计算科学学院, 广西桂林 541004;
2. 上海大学 理学院, 上海 200444;
3. 上海大学 系统生物学研究所, 上海 200444;
4. 石家庄学院 数学系, 石家庄 050035)

(本刊编委刘曾荣来稿)

摘要: 讨论两个离散系统之间的广义同步 通过构造合适的非线性耦合项, 导出了驱动响应系统获得广义同步的充分条件 在一个正不变的有界集上, 许多混沌映射满足这些充分条件 通过 3 个例子, 说明了充分条件的有效性

关键词: 广义同步; 耦合; 离散系统

中图分类号: O231.2 **文献标识码:** A

引言

同步现象自 17 世纪由 Hugenii^[1] 发现以来, 一直吸引着许多研究者的关心 最近, 由于 Pecora 和 Carroll^[2,3] 在混沌同步方面的先驱性工作, 同时考虑到它在安全通信与控制方面的潜在应用以及复杂系统里斑图涌现(pattern emergence) 的理论价值, 耦合混沌系统的同步成了热门研究领域 在过去的 10 多年里, 许多不同的同步^[4-8] 相继被发现和研究, 其中有: 完全同步(complete or identical synchronization)、聚类同步(cluster synchronization)、相同步(phase synchronization)、滞后同步(lag synchronization) 和广义同步(generalized synchronization) 等 除恒同系统的完全同步以外, 其他种类的同步研究相对来说还缺乏理论结果和可操作性办法 从动力学方面来看, 一个同步状态代表动力系统在相空间中有一个不变流形 因此, 理论上通过合适的耦合项构造出新的不变流形是同步理论急需解决的问题 然而, 在实际操作当中, 如何构造耦合项使系统获得同步一直少有进展 最近, 我们在文献[9] 和文献[10] 中提出了一系列讨论这些问题的新观点, 为这些问题的解决提供了新的思路

本文在文献[9] 和文献[10] 的基础上, 讨论两个单向耦合离散系统的广义同步 通过对一些离散系统构造合适的耦合项(控制论里称为控制项), 我们导出了两个定理和两个推论

1 理论结果

一般来说, 单向耦合离散系统可以写成

收稿日期: 2005-04-05; 修订日期: 2007-01-04

基金项目: 国家自然科学基金资助项目(10372054; 70431002)

作者简介: 马忠军(1973), 男, 湖南省隆回县人(E-mail: mzj1234402@163.com);
刘曾荣(联系人, E-mail: zrongliu@staff.shu.edu.cn)

$$\mathbf{x}_{n+1} = \mathbf{F}(\mathbf{x}_n), \quad (1)$$

$$\mathbf{y}_{n+1} = \mathbf{G}(\mathbf{y}_n) + \mathbf{u}(\mathbf{x}_n, \mathbf{y}_n), \quad (2)$$

其中, \mathbf{G} 与 \mathbf{F} 可以恒同, 也可以不同; $\mathbf{x}_n \in R^m, \mathbf{y}_n \in R^m$ 表示两个离散系统在时刻 n 的状态; $\mathbf{u} \in R^m$ 表示耦合项; α 是代表耦合强度的参数. 本节中假设 $\mathbf{x}_0 \in D_1 \subset R^m, \mathbf{y}_0 \in D_2 \subset R^m, n \in \mathbb{N}$, 成立 $\mathbf{x}_n \in D_1, \mathbf{y}_n \in D_2$, 即 D_1 与 D_2 分别是(1)式与(2)式的正向不变集. 耦合项 \mathbf{u} 依赖 \mathbf{F} , 有时还依赖 \mathbf{G} . 本文研究这两个系统的广义同步及其特殊情形, 即完全同步和滞后同步.

令 $\mathbf{x}_n(\mathbf{x}_0)$ 和 $\mathbf{y}_n(\mathbf{x}_0, \mathbf{y}_0)$ 分别是(1)式和(2)式过初值 \mathbf{x}_0 和 \mathbf{y}_0 的解, $\|\cdot\|$ 表示 R^m 上的列范数或者 $R^m \times R^m$ 上的列和范数. 与文献[11]类似, 我们引进一些相关的定义.

定义 1 系统(1)与系统(2)称为在 $D_1 \times D_2$ 内是广义 α -同步的, 若存在连续函数 $\phi: R^m \rightarrow R^m$ 使得 $\mathbf{x}_0 \in D_1, \mathbf{y}_0 \in D_2$, 下列条件成立:

$$\lim_n \|\mathbf{y}_n(\mathbf{x}_0, \mathbf{y}_0) - \phi(\mathbf{x}_n(\mathbf{x}_0))\| = 0 \quad (3)$$

定义 2 系统(1)与系统(2)称为在 $D_1 \times D_2$ 内是滞后同步的, 若存在自然数 n_0 使得 $\mathbf{x}_0 \in D_1, \mathbf{y}_0 \in D_2$, 下列条件成立:

$$\lim_n \|\mathbf{y}_n(\mathbf{x}_0, \mathbf{y}_0) - \mathbf{x}_{n+n_0}(\mathbf{x}_0)\| = 0 \quad (4)$$

定义 3 系统(1)与系统(2)称为在 $D_1 \times D_2$ 内是完全同步的, 若 $\mathbf{x}_0 \in D_1, \mathbf{y}_0 \in D_2$, 下列条件成立:

$$\lim_n \|\mathbf{y}_n(\mathbf{x}_0, \mathbf{y}_0) - \mathbf{x}_n(\mathbf{x}_0)\| = 0 \quad (5)$$

事实上, 定义 2 和定义 3 是定义 1 的特殊情形 (只要分别令 $\phi = \mathbf{F}^{n_0}$ 和 ϕ 为恒同映射).

令 $(\mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2)(\cdot)$ 表示 $\mathbf{F}_1(\cdot) + \mathbf{F}_2(\cdot)$. 通过构造合适的耦合项, 下列定理成立:

定理 1 如果存在连续函数 ϕ 和正常数 L 使得 $\|\mathbf{x} \in D_1, \mathbf{y} \in D_2$, 条件

$$\|\mathbf{G}(\mathbf{y}) - \mathbf{F}(\mathbf{x}) - L(\mathbf{y} - \phi(\mathbf{x}))\| \leq L \|\mathbf{y} - \phi(\mathbf{x})\| \quad (6)$$

成立, 那么取耦合项 $\mathbf{u} = (\mathbf{F}(\mathbf{x}_n) - \mathbf{G}(\mathbf{y}_n))$, 当 $\alpha \in (-1/L + 1, 1)$ 时, 系统(1)和系统(2)在 $D_1 \times D_2$ 内广义 α -同步.

证明 令 $\mathbf{e}_n = \mathbf{y}_n - \phi(\mathbf{x}_n)$. 由(6)式,

$$\begin{aligned} \mathbf{e}_{n+1} &= \mathbf{y}_{n+1} - \phi(\mathbf{x}_{n+1}) = (1-\alpha) \mathbf{G}(\mathbf{y}_n) - \alpha \mathbf{F}(\mathbf{x}_n) \\ &\quad + L(1-\alpha) \mathbf{y}_n - \alpha L \phi(\mathbf{x}_n) = L(1-\alpha) \mathbf{e}_n \end{aligned}$$

当 $-1/L + 1 < \alpha < 1$ 时, 有 $\lim_n \|\mathbf{y}_n - \phi(\mathbf{x}_n)\| = \lim_n \|\mathbf{e}_n\| = 0$.

类似的, 得到

定理 2 如果存在同胚映射 $\phi: D_1 \rightarrow D_2$ 使得 $(\mathbf{G} + \mathbf{F}^{-1})$ 在 D_2 内满足 Lipschitz 条件, 即 $\mathbf{x} \in D_2, \mathbf{y} \in D_2$,

$$\|(\mathbf{G} + \mathbf{F}^{-1})(\mathbf{y}) - (\mathbf{G} + \mathbf{F}^{-1})(\mathbf{x})\| \leq L \|\mathbf{y} - \mathbf{x}\| \quad (7)$$

成立, 其中 L 是正常数, 那么取耦合项 $\mathbf{u} = (\mathbf{F}(\mathbf{x}_n) - \mathbf{G}(\mathbf{y}_n)) + (1-\alpha)(\mathbf{F}^{-1}(\mathbf{y}_n) - \mathbf{G}(\mathbf{x}_n))$, 当 $\alpha \in (-1/L + 1, 1)$ 时, 系统(1)和系统(2)在 $D_1 \times D_2$ 内广义 α -同步.

证明 令 $\mathbf{e}_n = \mathbf{y}_n - \phi(\mathbf{x}_n)$. 由(7)式,

$$\begin{aligned} \mathbf{e}_{n+1} &= \mathbf{y}_{n+1} - \phi(\mathbf{x}_{n+1}) = \\ &= (1-\alpha) (\mathbf{G} + \mathbf{F}^{-1})(\mathbf{y}_n) - \alpha (\mathbf{G} + \mathbf{F}^{-1})(\mathbf{x}_n) = \\ &= (1-\alpha) (\mathbf{G} + \mathbf{F}^{-1})(\mathbf{y}_n) - \alpha (\mathbf{G} + \mathbf{F}^{-1})(\phi(\mathbf{x}_n)) = \\ &= L(1-\alpha) \mathbf{y}_n - \alpha L \phi(\mathbf{x}_n) = L(1-\alpha) \mathbf{e}_n \end{aligned}$$

当 $-1/L + 1 < \lambda < 1$ 时, 有 $\lim_{n \rightarrow \infty} \|y_n - x_n\| = \lim_{n \rightarrow \infty} e_n = 0$

推论 1 若 G 和 F^{-1} 在 D_2 内均满足 Lipschitz 条件, 则存在 $c < 1$, 当 $\lambda \in (c, 1)$ 时, 系统(1) 和系统(2) 是广义 λ -同步的

推论 2 若 G, F 和 F^{-1} 在相应的定义域内都满足 Lipschitz 条件, 则存在 $c < 1$, 当 $\lambda \in (c, 1)$ 时, 系统(1) 和系统(2) 是广义 λ -同步的

2 定理的应用

2.1 $F = G$ 的情形

例 1 令 F 和 G 均是 H_{non} 映射, 这里 F 和 G :

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 1 + y - 1.4x^2 \\ 0.3x \end{pmatrix}$$

用代数方法, 可以找到区域 Q : 四边形 $ABCD$, 其中 $A(-1.33, 0.42), B(1.32, 0.133), C(1.245, -0.14), D(-1.06, -0.5)$, 使得 $F(Q) \subset Q$ 类似的, $G(Q) \subset Q$ 令 $e_n = F^n(x_0, y_0) - G^n(x_0, y_0)$, 有 $\|e_n\| \leq \|e_{n-1}\|$ 和 $\|F(x) - G(y)\|$ 按照定理 1 构造(2) 式中的 u 令 $u = [F(x) - G(y)]$,

其中 $x_n = \begin{pmatrix} x_{1,n} \\ x_{2,n} \end{pmatrix}, y_n = \begin{pmatrix} y_{1,n} \\ y_{2,n} \end{pmatrix}$

因此, $x_0 \in Q, y_0 \in Q$, 有 $G(y_0), F(x_0) \in Q$ 因 Q 是凸集, 我们有 $y_1 = (1-\lambda)G(y_0) + \lambda F(x_0) \in Q$ 类似导出 $y_n \in Q$ 因此

$$\|y_{n+1} - x_{n+1}\| = \|y_{n+1} - x_{n+1+n_0}\| = (1-\lambda) \|R(y_n - x_{n+n_0})\| = (1-\lambda) \|R(y_n - x_n)\| = (1-\lambda) \|R\| \|y_n - x_n\|,$$

这里 $R = \begin{pmatrix} -1.4(y_{1,n+n_0} + x_{1,n+n_0}) & 1 \\ 0.3 & 0 \end{pmatrix}$

因 Q 有界, 存在常数 $L > 0$, 使得 $\|R\| \leq L$ 由定理 1, 当 $\lambda \in (-1/L + 1, 1)$ 时, 系统(1) 和系统(2) 在 Q 内是广义 λ -同步的

取 $x_{1,0}, y_{1,0} \in (-1.06, 1.245), x_{2,0} \in (0.156182, 0.334447), y_{2,0} \in (0.275958, 0.108302)$ (即使得初值 $(x_{1,0}, x_{2,0}) \in Q, (y_{1,0}, y_{2,0}) \in Q$), $(0.7, 1)$ 和整数 $n_0 \in [0, 10]$ 在各自范围内随机取值 3 次, 利用 Mathematica 4 进行迭代运算并绘图, 得图 1 图 1 表明当 $n \rightarrow \infty$ 时 $\|y_n - x_{n+n_0}\| \rightarrow 0$

2.2 $F \neq G$ 的情形

例 2 考虑两个 Lozi 映射 F 和 G , 其中

$$F: \begin{pmatrix} x_{1,n} \\ x_{2,n} \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 1 - a_1|x_{1,n}| + a_2x_{2,n} \\ x_{1,n} \end{pmatrix},$$
$$G: \begin{pmatrix} y_{1,n} \\ y_{2,n} \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 1 - b_1|y_{1,n}| + b_2y_{2,n} \\ y_{1,n} \end{pmatrix},$$

$0 < a_2 < 1, 0 < b_2 < 1, a_1 > 1 + a_2, b_1 > 1 + b_2$ 重写 F 和 G , 有

$$F: x_n \mapsto Sx_{n+1}, G: y_n \mapsto Ty_{n+1},$$

这里

$$x_n = \begin{pmatrix} x_{1,n} \\ x_{2,n} \end{pmatrix}, y_n = \begin{pmatrix} y_{1,n} \\ y_{2,n} \end{pmatrix}, S = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$S = \begin{pmatrix} -a_1 \operatorname{sgn}(x_{1,n}) & a_2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, T = \begin{pmatrix} -b_1 \operatorname{sgn}(y_{1,n}) & b_2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},$$

$\operatorname{sgn}(\cdot)$ 表示符号函数

令 $x_{n+1} = Ux_n + \dots$, 其中 U 是 $R^{2 \times 2}$ 上的可逆常数矩阵, $\dots = (I - USU^{-1})^{-1}(-I - U)$ 把 (x_n) 记为 z_n 因此,

$$z_{n+1} = Ux_{n+1} + \dots = USx_n + U + \dots = USU^{-1}(z_n - \dots) + U + \dots = USU^{-1}z_n + (I - USU^{-1}) + U = USU^{-1}z_n + \dots$$

和 $z_{n+1} = (x_{n+1}) = F(x_n) = F \circ \tau^{-1}(z_n) + \dots$ 从而得

$$+ (G + \dots F \circ \tau^{-1})(y_n) - (G + \dots F \circ \tau^{-1})(z_n) + \dots + (USU^{-1} + T)(y_n - z_n) + [\dots + USU^{-1} + T + \dots y_n - z_n + \dots]$$

显然, $L = \dots + USU^{-1} + T + \dots$ 是有界的 1 由定理 2, 令耦合项 $u = (\dots F(x_n) - G(y_n)) + (1 - \dots)(\dots F \circ \tau^{-1}(y_n) - G \circ \tau(x_n))$, 存在 $\tau: I(-1/L + 1, 1)$, 使得系统(1) 和系统(2) 在 $R^2 \otimes R^2$ 内是广义 τ -同步的 1

取 $a_1 = 1.7, a_2 = 0.6, b_1 = 1.5, b_2 = 0.4$, 初值 $x_{1,0}, y_{1,0}, x_{2,0}, y_{2,0} \in (-5, 0, 5, 0)$ 和 $\tau: I(0.76, 1)$ 在各自范围内随机取值 3 次, $D = (0, 0)^T$ 和 $U = I$, 利用 Mathematica 4 进行迭代运算并绘图, 得图 21 图 2 表明当 $n \rightarrow \infty$ 时 $\|y_n - x_n\| \rightarrow 0$

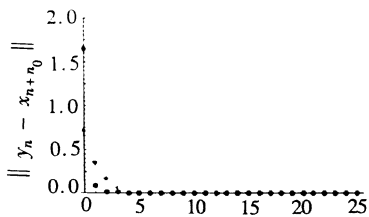


图 1 例 1 中误差 $\|y_n - x_{n+1}\|$ 随 n 的变化图

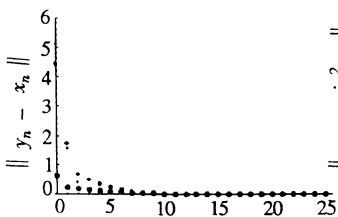


图 2 例 2 中误差 $\|y_n - x_n\|$ 随 n 的变化图

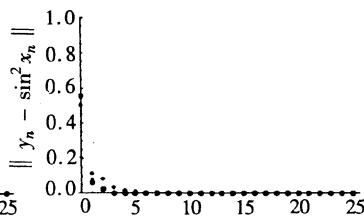


图 3 例 3 中误差 $\|y_n - \sin^2 x_n\|$ 随 n 的变化图

例 3 考虑帐篷映射 F , 其中

$$F: x \mapsto y \begin{cases} 2x, & x \in [0, 1/2], \\ 2x - 1, & x \in [1/2, 1] \end{cases}$$

和 Logistic 映射 G , 其中 $G: y \mapsto 3y(1 - y), y \in [0, 1]$

令 $u = (\dots F(x_n) - G(y_n)) + (1 - \dots)(\dots F \circ \tau^{-1}(y_n) - G \circ \tau(x_n))$, 其中 $\tau: x \mapsto \sin^2((P/2)x) + 1$ 首先证明: $P x_0, y_0 \in [0, 1]$, 条件 $x_n, y_n \in [0, 1]$ 成立 事实上, 由(1) 式, 显然 $x_n \in [0, 1]$ 众所周知, $z_{n+1} = H(z_n) = \dots F \circ \tau^{-1}(z_n) = 4z_n(1 - z_n)$ 构造一个函数 $\psi(y, z, \cdot) = (1 - \dots)G(y) + H(z) + (1 - \dots)(H(y) - G(z))$ 当 $(y, z, \cdot) \in [0, 1] \otimes [0, 1] \otimes [4/7, 1]$ 时, 由 $\psi(5/5, 5/5) = \psi(5/5, 5/5) = 0$, 得临界点 $y = z = 1/2, \tau \in [4/7, 1]$ 代入 ψ , 有 $\psi(1/2, 1/2, \cdot) = 11$ 在长方体 $[0, 1] \otimes [0, 1] \otimes [4/7, 1]$ 的 6 个表面上, 通过简单的代数计算, 得 $\psi(y, z, \cdot) \in [0, 1]$ 由有界闭集上的可微函数性质, 即该函数的最大值和最小值必然在临界点或边界点达到的性质, 因此 $\psi(y, z, \cdot) \in [0, 1] \otimes [0, 1] \otimes [4/7, 1]$, 有 $\psi(y, z, \cdot) \in [0, 1]$ 把 $(y_n, \tau(x_n), \cdot) \in [0, 1] \otimes [0, 1] \otimes [4/7, 1]$ 代入 $\psi(y, z, \cdot)$, 得系统(2) 中的 $y_{n+1} \in [0, 1]$ 从而当 $4/7 < \tau < 1$ 时, $P x_0, y_0 \in [0, 1]$ 和 P_n , 条件 $x_n, y_n \in [0, 1]$ 成立 1

因 G, τ, F 和 τ^{-1} 在 $[0, 1]$ 内都满足 Lipschitz 条件, 由推论 2, 存在常数 $L > 0$, 当 $\tau \in I$

$(\max(-1/L + 1, 4/7), 1)$, 系统(1) 和系统(2) 在 $[0, 1] \times [0, 1]$ 内是广义 ϵ - 同步的1

对 $x_0, y_0 \in [0, 1], t \in I \subset (6/7, 1)$ 在各自范围内随机取值3次, 利用 Mathematica 4 进行迭代运算并绘图, 得图 31 图 3 表明当 $n \rightarrow \infty$ 时 $|y_n - \sin^2 x_n| \rightarrow 0$

[参 考 文 献]

- [1] Hugenii C. Horoloquium Oscillatorium [M]. Paris: Apud F. Muguet, 1673.
- [2] Pecora L M, Carroll T L. Synchronization in chaotic systems[J]. Phys Rev Lett , 1990, 64(8) : 821-824.
- [3] Pecora L M, Carroll T L. Driving systems with chaotic signals[J]. Phys Rev A, 1991, 44(4) : 2374-2383.
- [4] Boccaletti S, Kurths J, Osipov G, et al. The synchronization of chaotic systems[J]. Physics Reports , 2002, 366(1) : 1-101.
- [5] MA Zhong-jun, LIU Zeng-rong, ZHANG Gang. A new method to realize cluster synchronization in connected chaotic networks[J]. Chaos, 2006, 16(2) : 023103.
- [6] ZHANG Gang, LIU Zeng-rong, MA Zhong-jun. Generalized synchronization of different dimensional chaotic dynamical systems[J]. Chaos, Solitons and Fractals, 2007, 32(2) : 773-779.
- [7] ZHENG Zhi-gang, HU Gang, HU Bam-bi. Phase slips and phase synchronization of coupled oscillators [J]. Phys Rev Lett , 1998, 81(24) : 5318-5321.
- [8] ZHENG Zhi-gang, HU Gang. Generalized synchronization versus phase synchronization[J]. Phys Rev E, 2000, 62(6) : 7882-7885.
- [9] 刘曾荣. 关于同步的几个理论问题[J]. 自然杂志, 2004, 26(5) : 298-300.
- [10] 刘曾荣. 用结构适应实现不同系统之间的完全同步[J]. 应用数学和计算数学学报, 2004, 18(2) : 68-72.
- [11] Brown R, Kocarev L. A unifying definition of synchronization for dynamical systems[J]. Chaos, 2000, 10(2) : 344-349.

G e n e r a l i z e d S y n c h r o n i z a t i o n o f D i s c r e t e S y s t e m s

MA Zhong-jun^{1, 2}, LIU Zeng-rong³, ZHANG Gang⁴

(1. School of Mathematics and Computing Science, Guilin University of Electronic Technology, Guilin Guangxi 541004, P. R. China;

2. College of Sciences, Shanghai University, Shanghai 200444, P. R. China;

3. Institute of System Biology, Shanghai University, Shanghai 200444, P. R. China;

4. Department of Mathematics, Shijiazhuang College, Shijiazhuang 050035, P. R. China)

Abstract: Generalized synchronization of two discrete systems is discussed. By constructing appropriately nonlinear coupling terms, some sufficient conditions for determining the generalized synchronization between the drive and response systems were derived. In a positive invariant and bounded set, many chaotic maps satisfy the sufficient conditions. The effectiveness of the sufficient conditions is illustrated by three examples.

Key words: generalized synchronization; coupling; discrete system