

不同功能梯度压电压磁层状介质中共线界面裂纹的动态性能分析*

张培伟¹, 周振功¹, 王彪²

(1. 哈尔滨工业大学 复合材料与结构研究所, 哈尔滨 150080;

2. 中山大学 物理与工程学院, 广州 510275)

(我刊编委王彪来稿)

摘要: 对不同功能梯度压电压磁层状介质中, 共线界面裂纹对简谐应力波作用下的动态问题, 进行了分析. 经 Fourier 变换, 使问题的求解转换为求解以裂纹面上位移间断为未知量的三重对偶积分方程, 三重对偶方程可以采用 Schmidt 方法来求解, 进而分析了功能梯度参数、入射波频率和层状介质厚度对应力、电位移和磁通量强度因子的影响.

关键词: 功能梯度压电压磁材料; 界面裂纹; 应力波

中图分类号: O345.41 **文献标识码:** A

引 言

随着压电压磁复合材料在智能材料系统中的广泛应用, 压电压磁介质中的空隙、裂纹问题已引起人们的注意^[1-3]. 一些功能梯度压电材料已得到应用^[4], 功能梯度压电材料的断裂问题也得到了分析^[5-6]. Li 和 Weng^[6] 首次考虑了功能梯度压电材料层中的静态反平面断裂问题.

近期, 功能梯度概念也首次被推广到压电压磁材料的断裂问题的分析当中^[7-8]. 但是只有无限大体中的静态反平面断裂问题得以分析^[7-8]. 在文献[7]和文献[8]中分析的断裂问题是没有限界的材料, 因此也不适合材料特性. 同时对于电压磁材料的动态断裂问题也考虑较少. 但据了解, 功能梯度压电压磁层状介质中, 共线界面裂纹对反平面简谐应力波作用下的动态问题, 还没有人利用 Schmidt 方法^[9] 考虑过.

这里, 我们试图把功能梯度概念推广应用到压电压磁材料的动态断裂问题的分析当中, 在假设材料性质沿垂直裂纹方向指数变化的条件下, 利用 Schmidt 方法^[9], 求解了不同功能梯度压电压磁层状介质中共线界面裂纹对反平面简谐应力波作用下的动态问题, 经 Fourier 变换, 使复杂边值问题的求解转换为求解以裂纹面上位移间断为未知量的三重对偶积分方程. 为了求解三重对偶方程, 直接把裂纹面上的位移间断展开成 Jacobi 多项式形式. 进而分析了功能

* 收稿日期: 2006-11-20; 修订日期: 2007-01-25

基金项目: 国家自然科学基金资助项目(10572043; 10572155); 黑龙江省杰出青年基金资助项目(JC04-08)

作者简介: 张培伟(1980—), 男, 江苏徐州人, 博士(联系人. Tel: + 86-451-86402396; Fax: + 86-451-86402386; E-mail: zhouzhg@hit.edu.cn).

梯度参数、入射波频率和层状介质厚度对应力、电位移和磁通量强度因子的影响.

1 基本方程

设在两不同功能梯度压电电压磁材料层的界面上, 有长度为 $1 - b$ 的一对共线裂纹, 如图 1 所示. $2b$ 是裂纹间的距离(对于任意长度 $d - b$ 的共线裂纹的数值解, 可以从本文中长度为 $1 - b/d (d > b > 0)$ 的解通过一个简单的变换而获得), h_1 和 h_2 分别是上下两层功能梯度压电电压磁材料层的厚度. 在本文中, b, h_1 和 h_2 都设为无量纲变量, 同时也假定应力波是沿与裂纹垂直的方向传播的, ω 是简谐波频率. $w_0^{(i)}(x, y, t)$ 、 $\Phi_0^{(i)}(x, y, t)$ 和 $\phi_0^{(i)}(x, y, t) (i = 1, 2)$ 分别是机械位移、电势和磁势, $\tau_{zk}^{(i)}(x, y, t)$ 、 $D_{k0}^{(i)}(x, y, t)$ 和 $B_{k0}^{(i)}(x, y, t) (k = x, y; i = 1, 2)$ 分别表示反平面位移、平面电位移和平面磁通量. 另外如图 1 所示, 所有变量的右上标 $i (i = 1, 2)$ 分别表示上层和下层. 因入射波是反平面简谐波, 所以所有场变量 $w_0^{(i)}(x, y, t)$ 、 $\Phi_0^{(i)}(x, y, t)$ 、 $\phi_0^{(i)}(x, y, t)$ 、 $\tau_{zk}^{(i)}(x, y, t)$ 、 $D_{k0}^{(i)}(x, y, t)$ 和 $B_{k0}^{(i)}(x, y, t)$ 都可以假设成如下形式:

$$[w_0^{(i)}(x, y, t), \Phi_0^{(i)}(x, y, t), \phi_0^{(i)}(x, y, t), \tau_{zk}^{(i)}(x, y, t), D_{k0}^{(i)}(x, y, t), B_{k0}^{(i)}(x, y, t)] = [w^{(i)}(x, y), \Phi^{(i)}(x, y), \phi^{(i)}(x, y), \tau_{zk}^{(i)}(x, y), D_k^{(i)}(x, y), B_k^{(i)}(x, y)] e^{-i\omega t}. \quad (1)$$

如公认采取的技术一样, 在以下的有关变量中舍去简谐时间项 $e^{-i\omega t}$. 如文献[10]的讨论, 本文假设裂纹是可导通的, 同时将用到标准的叠加技术, 仅考虑扰动场, 从而本问题的边界条件可表示为

$$\begin{cases} \tau_{yz}^{(1)}(x, 0^+) = \tau_{yz}^{(2)}(x, 0^-) = -\tau_0, & b \leq |x| \leq 1, \\ \tau_{yz}^{(1)}(x, 0^+) = \tau_{yz}^{(2)}(x, 0^-), w^{(1)}(x, 0^+) = w^{(2)}(x, 0^-), & |x| > 1, |x| < b, \end{cases} \quad (2)$$

$$\begin{cases} \phi^{(1)}(x, 0) = \phi^{(2)}(x, 0), D_y^{(1)}(x, 0) = D_y^{(2)}(x, 0), \\ \phi^{(1)}(x, 0) = \phi^{(2)}(x, 0), B_y^{(1)}(x, 0) = B_y^{(2)}(x, 0), & |x| < \infty, \end{cases} \quad (3)$$

$$\begin{cases} \tau_{yz}^{(1)}(x, h_1) = \tau_{yz}^{(2)}(x, -h_2) = 0, \\ D_y^{(1)}(x, h_1) = D_y^{(2)}(x, -h_2) = 0, & |x| < \infty, \end{cases} \quad (4)$$

$$\begin{cases} w^{(1)}(x, y) = w^{(2)}(x, y) = 0, \\ \phi^{(1)}(x, y) = \phi^{(2)}(x, y) = 0, & \text{当 } (x^2 + y^2)^{1/2} \rightarrow \infty, \\ \phi^{(1)}(x, y) = \phi^{(2)}(x, y) = 0, \end{cases} \quad (5)$$

这里 τ_0 是入射简谐波的幅值.

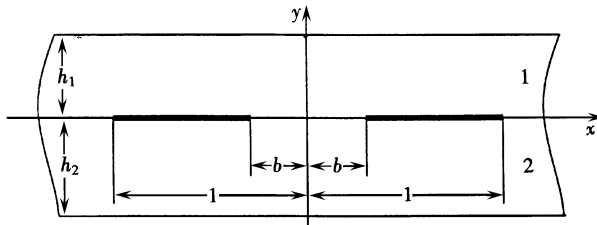


图 1 共线裂纹的几何形状和坐标系

对于材料属性任意变化的功能梯度压电电压磁材料, 其断裂问题的解析解是很难得到的. 一般情况下, 为了使问题得以求解, 如同求解各向同性功能梯度材料的方法一样^[11], 我们假设材料性质用以下形式来描述:

$$\begin{cases} c_{44}^{(1)} = c_{440}^{(1)} e^{\beta^{(1)} y}, & e_{15}^{(1)} = e_{150}^{(1)} e^{\beta^{(1)} y}, & \epsilon_{11}^{(1)} = \epsilon_{110}^{(1)} e^{\beta^{(1)} y}, \\ q_{15}^{(1)} = q_{150}^{(1)} e^{\beta^{(1)} y}, & d_{11}^{(1)} = d_{110}^{(1)} e^{\beta^{(1)} y}, & \mu_{11}^{(1)} = \mu_{110}^{(1)} e^{\beta^{(1)} y}, & \rho^{(1)}(y) = \rho_0^{(1)} e^{\beta^{(1)} y}, \\ c_{44}^{(2)} = c_{440}^{(2)} e^{\beta^{(2)} y}, & e_{15}^{(2)} = e_{150}^{(2)} e^{\beta^{(2)} y}, & \epsilon_{11}^{(2)} = \epsilon_{110}^{(2)} e^{\beta^{(2)} y}, \\ q_{15}^{(2)} = q_{150}^{(2)} e^{\beta^{(2)} y}, & d_{11}^{(2)} = d_{110}^{(2)} e^{\beta^{(2)} y}, & \mu_{11}^{(2)} = \mu_{110}^{(2)} e^{\beta^{(2)} y}, & \rho^{(2)}(y) = \rho_0^{(2)} e^{\beta^{(2)} y}, \end{cases} \quad (6)$$

这里 $c_{440}^{(i)}$ 、 $e_{150}^{(i)}$ 、 $\epsilon_{110}^{(i)}$ 、 $q_{150}^{(i)}$ 、 $d_{110}^{(i)}$ 、 $\mu_{110}^{(i)}$ 和 $\beta^{(i)}$ 分别代表剪切模量、压电系数、介电参数、压磁耦合系数、电磁耦合系数、磁通率和功能梯度参数。

功能梯度压电电压磁材料反平面问题的本构方程可表示为

$$\begin{cases} \tau_{zk}^{(i)} = c_{44}^{(i)} w_{,k}^{(i)} + e_{15}^{(i)} \phi_{,k}^{(i)} + q_{15}^{(i)} \phi_{,k}^{(i)}, \\ D_k^{(i)} = e_{15}^{(i)} w_{,k}^{(i)} - \epsilon_{11}^{(i)} \phi_{,k}^{(i)} - d_{11}^{(i)} \phi_{,k}^{(i)}, \\ B_k^{(i)} = q_{15}^{(i)} w_{,k}^{(i)} - d_{11}^{(i)} \phi_{,k}^{(i)} - \mu_{11}^{(i)} \phi_{,k}^{(i)}, \end{cases} \quad k = xy; i = 1, 2. \quad (7)$$

反平面问题的控制方程可表示为

$$\begin{cases} c_{440}^{(i)} \left[\dots^2 w^{(i)} + \beta^{(i)} \frac{\partial w^{(i)}}{\partial y} \right] + e_{150}^{(i)} \left[\dots^2 \phi^{(i)} + \beta^{(i)} \frac{\partial \phi^{(i)}}{\partial y} \right] + \\ q_{150}^{(i)} \left[\dots^2 \phi^{(i)} + \beta^{(i)} \frac{\partial \phi^{(i)}}{\partial y} \right] = - \rho_0^{(i)} \omega^2 w^{(i)}, \\ e_{150}^{(i)} \left[\dots^2 w^{(i)} + \beta^{(i)} \frac{\partial w^{(i)}}{\partial y} \right] - \epsilon_{110}^{(i)} \left[\dots^2 \phi^{(i)} + \beta^{(i)} \frac{\partial \phi^{(i)}}{\partial y} \right] - \\ d_{110}^{(i)} \left[\dots^2 \phi^{(i)} + \beta^{(i)} \frac{\partial \phi^{(i)}}{\partial y} \right] = 0, \\ q_{150}^{(i)} \left[\dots^2 w^{(i)} + \beta^{(i)} \frac{\partial w^{(i)}}{\partial y} \right] - d_{110}^{(i)} \left[\dots^2 \phi^{(i)} + \beta^{(i)} \frac{\partial \phi^{(i)}}{\partial y} \right] - \\ \mu_{110}^{(i)} \left[\dots^2 \phi^{(i)} + \beta^{(i)} \frac{\partial \phi^{(i)}}{\partial y} \right] = 0, \end{cases} \quad (8)$$

这里 $-\rho_0^{(i)} \omega^2 w^{(i)}(x, y) e^{-i\omega t} = \rho_0^{(i)} \frac{\partial^2 w_0^{(i)}(x, y, t)}{\partial t^2} = \rho_0^{(i)} \frac{\partial^2 (w^{(i)}(x, y) e^{-i\omega t})}{\partial t^2}$, $\dots^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$

是二维 Laplace 算子。

2 求解过程

由于本问题几何和载荷的对称性, 只需考虑右半部分 $0 \leq x < \infty$, $-h_2 \leq y < h_1$ 就可以。

方程(8)经 Fourier 变换后, 其位移分量、电势和磁势可分别表示为

$$\begin{cases} w^{(1)}(x, y) = \frac{2}{\pi} \int_0^\infty [A_1(s) e^{-\gamma_1^{(1)} y} + B_1(s) e^{\gamma_1^{(1)} y}] \cos(sx) ds, \\ \phi^{(1)}(x, y) = a_0^{(1)} w^{(1)}(x, y) + \frac{2}{\pi} \int_0^\infty [C_1(s) e^{-\gamma_2^{(1)} y} + D_1(s) e^{\gamma_2^{(1)} y}] \cos(sx) ds, \end{cases} \quad (9)$$

$$\begin{cases} \phi^{(1)}(x, y) = a_1^{(1)} w^{(1)}(x, y) + \frac{2}{\pi} \int_0^\infty [E_1(s) e^{-\gamma_2^{(1)} y} + F_1(s) e^{\gamma_2^{(1)} y}] \cos(sx) ds, \\ w^{(2)}(x, y) = \frac{2}{\pi} \int_0^\infty [A_2(s) e^{\gamma_1^{(2)} y} + B_2(s) e^{-\gamma_1^{(2)} y}] \cos(sx) ds, \\ \phi^{(2)}(x, y) = a_0^{(2)} w^{(2)}(x, y) + \frac{2}{\pi} \int_0^\infty [C_2(s) e^{\gamma_2^{(2)} y} + D_2(s) e^{-\gamma_2^{(2)} y}] \cos(sx) ds, \\ \phi^{(2)}(x, y) = a_1^{(2)} w^{(2)}(x, y) + \frac{2}{\pi} \int_0^\infty [E_2(s) e^{\gamma_2^{(2)} y} + F_2(s) e^{-\gamma_2^{(2)} y}] \cos(sx) ds, \end{cases} \quad (10)$$

这里 $A_1(s)$ 、 $B_1(s)$ 、 $C_1(s)$ 、 $D_1(s)$ 、 $E_1(s)$ 、 $F_1(s)$ 、 $A_2(s)$ 、 $B_2(s)$ 、 $C_2(s)$ 、 $D_2(s)$ 、 $E_2(s)$ 和 $F_2(s)$ 是未知函数,

$$\gamma_1^{(1)} = \frac{\beta^{(1)} + \sqrt{\beta^{(1)2} + 4fs^2 - \omega^2/c_1^2}}{2}, \quad \gamma_2^{(1)} = \frac{\beta^{(1)} + \sqrt{\beta^{(1)2} + 4s^2}}{2},$$

$$c_1 = \sqrt{\mu_0^{(1)}/\rho_0^{(1)}} \text{ 是上层材料的剪切波速. } \mu_0^{(1)} = c_{440}^{(1)} + a_0^{(1)}e_{150}^{(1)} + a_1^{(1)}q_{150}^{(1)},$$

$$a_0^{(1)} = \frac{\mu_{110}^{(1)}e_{150}^{(1)} - d_{110}^{(1)}q_{150}^{(1)}}{\epsilon_{110}^{(1)}\mu_{110}^{(1)} - d_{110}^{(1)2}}, \quad a_1^{(1)} = \frac{q_{150}^{(1)}\epsilon_{110}^{(1)} - d_{110}^{(1)}e_{150}^{(1)}}{\epsilon_{110}^{(1)}\mu_{110}^{(1)} - d_{110}^{(1)2}}.$$

$$\gamma_1^{(2)} = \frac{\beta^{(2)} + \sqrt{\beta^{(2)2} + 4fs^2 - \omega^2/c_2^2}}{2}, \quad \gamma_2^{(2)} = \frac{\beta^{(2)} + \sqrt{\beta^{(2)2} + 4s^2}}{2},$$

$$c_2 = \sqrt{\mu_0^{(2)}/\rho_0^{(2)}} \text{ 是下层材料的剪切波速. } \mu_0^{(2)} = c_{440}^{(2)} + a_0^{(2)}e_{150}^{(2)} + a_1^{(2)}q_{150}^{(2)},$$

$$a_0^{(2)} = \frac{\mu_{110}^{(2)}e_{150}^{(2)} - d_{110}^{(2)}q_{150}^{(2)}}{\epsilon_{110}^{(2)}\mu_{110}^{(2)} - d_{110}^{(2)2}}, \quad a_1^{(2)} = \frac{q_{150}^{(2)}\epsilon_{110}^{(2)} - d_{110}^{(2)}e_{150}^{(2)}}{\epsilon_{110}^{(2)}\mu_{110}^{(2)} - d_{110}^{(2)2}}.$$

从而由方程(7)可得

$$\begin{aligned} \tau_x^{(1)}(x, y) = & -\frac{2e^{\beta^{(1)}y}}{\pi} \int_0^\infty \left\{ \mu_0^{(1)} \gamma_1^{(1)} [A_1(s) e^{-\gamma_1^{(1)}y} - B_1(s) e^{\gamma_1^{(1)}y}] + \right. \\ & e_{150}^{(1)} \gamma_2^{(1)} [C_1(s) e^{-\gamma_2^{(1)}y} - D_1(s) e^{\gamma_2^{(1)}y}] + q_{150}^{(1)} \gamma_2^{(1)} [E_1(s) e^{-\gamma_2^{(1)}y} - \\ & \left. F_1(s) e^{\gamma_2^{(1)}y}] \right\} \cos(sx) ds, \end{aligned} \quad (11)$$

$$\begin{aligned} D_y^{(1)}(x, y) = & \frac{2e^{\beta^{(1)}y}}{\pi} \int_0^\infty \gamma_2^{(1)} \left\{ \epsilon_{110}^{(1)} [C_1(s) e^{-\gamma_2^{(1)}y} - D_1(s) e^{\gamma_2^{(1)}y}] + \right. \\ & \left. d_{110}^{(1)} [E_1(s) e^{-\gamma_2^{(1)}y} - F_1(s) e^{\gamma_2^{(1)}y}] \right\} \cos(sx) ds, \end{aligned} \quad (12)$$

$$\begin{aligned} B_y^{(1)}(x, y) = & \frac{2e^{\beta^{(1)}y}}{\pi} \int_0^\infty \gamma_2^{(1)} \left\{ d_{110}^{(1)} [C_1(s) e^{-\gamma_2^{(1)}y} - D_1(s) e^{\gamma_2^{(1)}y}] + \right. \\ & \left. \mu_{110}^{(1)} [E_1(s) e^{-\gamma_2^{(1)}y} - F_1(s) e^{\gamma_2^{(1)}y}] \right\} \cos(sx) ds, \end{aligned} \quad (13)$$

$$\begin{aligned} \tau_x^{(2)}(x, y) = & \frac{2e^{\beta^{(2)}y}}{\pi} \int_0^\infty \left\{ \mu_0^{(2)} \gamma_1^{(2)} [A_2(s) e^{\gamma_1^{(2)}y} - B_2(s) e^{-\gamma_1^{(2)}y}] + \right. \\ & e_{150}^{(2)} \gamma_2^{(2)} [C_2(s) e^{\gamma_2^{(2)}y} - D_2(s) e^{-\gamma_2^{(2)}y}] + q_{150}^{(2)} [E_2(s) e^{\gamma_2^{(2)}y} - \\ & \left. F_2(s) e^{-\gamma_2^{(2)}y}] \right\} \cos(sx) ds, \end{aligned} \quad (14)$$

$$\begin{aligned} D_y^{(2)}(x, y) = & -\frac{2e^{\beta^{(2)}y}}{\pi} \int_0^\infty \gamma_2^{(2)} \left\{ \epsilon_{110}^{(2)} [C_2(s) e^{\gamma_2^{(2)}y} - D_2(s) e^{-\gamma_2^{(2)}y}] + \right. \\ & \left. d_{110}^{(2)} [E_2(s) e^{\gamma_2^{(2)}y} - F_2(s) e^{-\gamma_2^{(2)}y}] \right\} \cos(sx) ds, \end{aligned} \quad (15)$$

$$\begin{aligned} B_y^{(2)}(x, y) = & -\frac{2e^{\beta^{(2)}y}}{\pi} \int_0^\infty \gamma_2^{(2)} \left\{ d_{110}^{(2)} [C_2(s) e^{\gamma_2^{(2)}y} - D_2(s) e^{-\gamma_2^{(2)}y}] + \right. \\ & \left. \mu_{110}^{(2)} [E_2(s) e^{\gamma_2^{(2)}y} - F_2(s) e^{-\gamma_2^{(2)}y}] \right\} \cos(sx) ds. \end{aligned} \quad (16)$$

为了求解问题, 裂纹面上的位移间断定义为

$$f(x) = w^{(1)}(x, 0) - w^{(2)}(x, 0). \quad (17)$$

把方程(9)、方程(10)代入到方程(17), 并利用 Fourier 变换和边界条件(2)至边界条件(4)可得

$$A_1(s) + B_1(s) - A_2(s) - B_2(s) = f(s), \quad (18)$$

$$a_0^{(1)} [A_1(s) + B_1(s)] - a_0^{(2)} [A_2(s) + B_2(s)] +$$

$$C_1(s) + D_1(s) - C_2(s) - D_2(s) = 0, \quad (19)$$

$$a_1^{(1)}[A_1(s) + B_1(s)] - a_1^{(2)}[A_2(s) + B_2(s)] + E_1(s) + F_1(s) - E_2(s) - F_2(s) = 0, \quad (20)$$

$$\mu_0^{(1)} \gamma_1^{(1)}[A_1(s) e^{-\gamma_1^{(1)} h_1} - B_1(s) e^{\gamma_1^{(1)} h_1}] + e_{150}^{(1)} \gamma_2^{(1)}[C_1(s) e^{-\gamma_2^{(1)} h_1} - D_1(s) e^{\gamma_2^{(1)} h_1}] + q_{150}^{(1)} \gamma_2^{(1)}[E_1(s) e^{-\gamma_2^{(1)} h_1} - F_1(s) e^{\gamma_2^{(1)} h_1}] = 0, \quad (21)$$

$$\epsilon_{110}^{(1)}[C_1(s) e^{-\gamma_2^{(1)} h_1} - D_1(s) e^{\gamma_2^{(1)} h_1}] + d_{110}^{(1)}[E_1(s) e^{-\gamma_2^{(1)} h_1} - F_1(s) e^{\gamma_2^{(1)} h_1}] = 0, \quad (22)$$

$$d_{110}^{(1)}[C_1(s) e^{-\gamma_2^{(1)} h_1} - D_1(s) e^{\gamma_2^{(1)} h_1}] + \mu_{110}^{(1)}[E_1(s) e^{-\gamma_2^{(1)} h_1} - F_1(s) e^{\gamma_2^{(1)} h_1}] = 0, \quad (23)$$

$$\mu_0^{(2)} \gamma_1^{(2)}[A_2(s) e^{-\gamma_1^{(2)} h_2} - B_2(s) e^{\gamma_1^{(2)} h_2}] + e_{150}^{(2)} \gamma_2^{(2)}[C_2(s) e^{-\gamma_2^{(2)} h_2} - D_2(s) e^{\gamma_2^{(2)} h_2}] + q_{150}^{(2)}[E_2(s) e^{-\gamma_2^{(2)} h_2} - F_2(s) e^{\gamma_2^{(2)} h_2}] = 0, \quad (24)$$

$$\epsilon_{110}^{(2)}[C_2(s) e^{-\gamma_2^{(2)} h_2} - D_2(s) e^{\gamma_2^{(2)} h_2}] + d_{110}^{(2)}[E_2(s) e^{-\gamma_2^{(2)} h_2} - F_2(s) e^{\gamma_2^{(2)} h_2}] = 0, \quad (25)$$

$$d_{110}^{(2)}[C_2(s) e^{-\gamma_2^{(2)} h_2} - D_2(s) e^{\gamma_2^{(2)} h_2}] + \mu_{110}^{(2)}[E_2(s) e^{-\gamma_2^{(2)} h_2} - F_2(s) e^{\gamma_2^{(2)} h_2}] = 0. \quad (26)$$

这里变量符号上的横杠表示经过 Fourier 变换后的变量. 把方程(11)至方程(16)代入到方程(2)和方程(3)中可得:

$$\left\{ \mu_0^{(1)} \gamma_1^{(1)}[A_1(s) - B_1(s)] + \gamma_2^{(1)} e_{150}^{(1)}[C_1(s) - D_1(s)] + q_{150}^{(1)} \gamma_2^{(1)}[E_1(s) - F_1(s)] \right\} + \left\{ \mu_0^{(2)} \gamma_1^{(2)}[A_2(s) - B_2(s)] + e_{150}^{(2)} \gamma_2^{(2)}[C_2(s) - D_2(s)] + q_{150}^{(2)} \gamma_2^{(2)}[E_2(s) - F_2(s)] \right\} = 0, \quad (27)$$

$$\gamma_2^{(1)} \left\{ \epsilon_{110}^{(1)}[C_1(s) - D_1(s)] + d_{110}^{(1)}[E_1(s) - F_1(s)] \right\} + \gamma_2^{(2)} \left\{ \epsilon_{110}^{(2)}[C_2(s) - D_2(s)] + d_{110}^{(2)}[E_2(s) - F_2(s)] \right\} = 0, \quad (28)$$

$$\gamma_2^{(1)} \left\{ d_{110}^{(1)}[C_1(s) - D_1(s)] + \mu_{110}^{(1)}[E_1(s) - F_1(s)] \right\} + \gamma_2^{(2)} \left\{ d_{110}^{(2)}[C_2(s) - D_2(s)] + \mu_{110}^{(2)}[E_2(s) - F_2(s)] \right\} = 0. \quad (29)$$

利用(18)式至(29)式 12 个方程求解 12 个未知数 $A_1(s)$ 、 $B_1(s)$ 、 $C_1(s)$ 、 $D_1(s)$ 、 $E_1(s)$ 、 $F_1(s)$ 、 $A_2(s)$ 、 $B_2(s)$ 、 $C_2(s)$ 、 $D_2(s)$ 、 $E_2(s)$ 和 $F_2(s)$, 并利用边界条件(2)和边界条件(3)可得

$$\frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} f(s) \cos(sx) ds = 0, \quad x > 1; 0 < x < b, \quad (30)$$

$$\frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} g_1(s) f(s) \cos(sx) ds = -\tau_0, \quad b \leq x \leq 1, \quad (31)$$

这里 $g_1(s)$ 是变量为 s 、材料厚度和材料性质的已知函数, 由于文章长度的限制, 函数 $g_1(s)$ 的具体形式未在本文中给出. 且 $\lim_{s \rightarrow \infty} g_1(s)/s = \alpha_1$, α_1 是一与材料性质有关的常数, 但是 α_1 与功能梯度参数 $\beta^{(1)}$ 和 $\beta^{(2)}$ 无关. 进而可得当 $(c_{440}^{(1)}, e_{150}^{(1)}, \epsilon_{110}^{(1)}, q_{150}^{(1)}, d_{110}^{(1)}, \mu_{110}^{(1)}, \rho_0^{(1)}) = (c_{440}^{(2)}, e_{150}^{(2)}, \epsilon_{110}^{(2)}, q_{150}^{(2)}, d_{110}^{(2)}, \mu_{110}^{(2)}, \rho_0^{(2)})$ 时, $\alpha_1 = -c_{440}^{(1)}/2$. 为了确定未知函数 $f(s)$, 必须求解上述三重积分方程(30)和三重积分方程(31).

3 三重积分方程的求解

这里利用 Schmidt 方法^[9]来求解三重积分方程(30)和三重积分方程(31), 首先把裂纹面上的位移间断用如下的级数形式来表示

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n P_n^{(1/2, 1/2)} \left[\frac{x - (1+b)/2}{(1-b)/2} \right] \left[1 - \frac{(x - (1+b)/2)^2}{((1-b)/2)^2} \right]^{1/2}, \quad \text{当 } b \leq x \leq 1, \quad (32)$$

$$f(x) = w^{(1)}(x, 0) - w^{(2)}(x, 0) = 0, \quad \text{当 } x > 1; 0 < x < b, \quad (33)$$

这里 b_n 是未知系数, $P_n^{(1/2, 1/2)}(x)$ 是 Jacobi 多项式^[12]. (32) 式、(33) 式经 Fourier 变换后为^[13]

$$f(s) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n F_n G_n(s) \frac{1}{s} J_{n+1} \left[s \frac{1-b}{2} \right], \quad (34)$$

这里 $F_n = 2\sqrt{\pi} \frac{\Gamma(n+1+1/2)}{n!},$

$$G_n(s) = \begin{cases} (-1)^{n/2} \cos \left[s \frac{1+b}{2} \right], & n = 0, 2, 4, 6, \dots, \\ (-1)^{(n+1)/2} \sin \left[s \frac{1+b}{2} \right], & n = 1, 3, 5, 7, \dots, \end{cases}$$

$\Gamma(x)$ 和 $J_n(x)$ 分别是 Gamma 函数和 Bessel 函数.

把方程(34)代入到方程(30)、方程(31)中, 方程(30)能够自动满足, 方程(31)经过在区间 $[b, x]$ 上对 x 积分后变为

$$\begin{aligned} \frac{2}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} b_n F_n \int_0^{\infty} \frac{1}{s} g_1(s) G_n(s) J_{n+1} \left[s \frac{1-b}{2} \right] [\sin(sx) - \sin(sb)] ds = \\ - \tau_0(x-b), \quad \text{当 } b \leq x \leq 1. \end{aligned} \quad (35)$$

方程(35)可以利用 Schmidt^[9]方法求解未知系数 b_n . 具体过程可参见文献[14]至文献[17], 这里省略.

4 强度因子

若未知系数 b_n 获得, 整个扰动应力场、扰动电位移场和磁场就可以获得. 但对于断裂力学, 重要的是确定裂纹尖端附近的扰动应力场 τ_z 、扰动电位移场 D_y 和磁场 B_y . 这里, 沿裂纹面的应力 $\tau_{yz}^{(1)}$ 、电位移 $D_y^{(1)}$ 和磁通量 $B_y^{(1)}$ 可分别表示为

$$\tau_{yz}^{(1)}(x, 0) = \tau_{yz}^{(2)}(x, 0) = \frac{2}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} b_n F_n \int_0^{\infty} \frac{1}{s} g_1(s) G_n(s) J_{n+1} \left[s \frac{1-b}{2} \right] \cos(xs) ds, \quad (36)$$

$$D_y^{(1)}(x, 0) = D_y^{(2)}(x, 0) = \frac{2}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} b_n F_n \int_0^{\infty} \frac{1}{s} g_2(s) G_n(s) J_{n+1} \left[s \frac{1-b}{2} \right] \cos(xs) ds, \quad (37)$$

$$B_y^{(1)}(x, 0) = B_y^{(2)}(x, 0) = \frac{2}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} b_n F_n \int_0^{\infty} \frac{1}{s} g_3(s) G_n(s) J_{n+1} \left[s \frac{1-b}{2} \right] \cos(xs) ds, \quad (38)$$

这里 $g_2(s)$ 和 $g_3(s)$ 是变量为 s 、材料厚度和材料性质的已知函数, 由于文章长度的限制, 函数 $g_2(s)$ 和 $g_3(s)$ 的具体形式未在本文中给出. 且 $\lim_{s \rightarrow 0} g_2(s)/s = \alpha_2$, $\lim_{s \rightarrow 0} g_3(s)/s = \alpha_3$, α_2 和 α_3 是与材料性质有关的常数. 进而可得当 $(c_{440}^{(1)}, e_{150}^{(1)}, \epsilon_{110}^{(1)}, q_{150}^{(1)}, d_{110}^{(1)}, \mu_{110}^{(1)}, \rho_0^{(1)}) = (c_{440}^{(2)}, e_{150}^{(2)}, \epsilon_{110}^{(2)}, q_{150}^{(2)}, d_{110}^{(2)}, \mu_{110}^{(2)}, \rho_0^{(2)})$ 时, $\alpha_2 = -e_{150}^{(1)}/2$ 和 $\alpha_3 = -q_{150}^{(1)}/2$.

在方程(36)~方程(38)中, 应力场、电位移场和磁通量的奇异部分可分别表示为 ($x > 1$ 或 $x < b$):

$$\begin{cases} \tau = \frac{\alpha_1}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} b_n F_n H_n(b, x), & D = \frac{\alpha_2}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} b_n F_n H_n(b, x), \\ B = \frac{\alpha_3}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} b_n F_n H_n(b, x), \end{cases} \quad (39)$$

这里

$$H_n(b, x) = \begin{cases} (-1)^{n+1} R(b, x, n), & 0 < x < b, \\ -R(b, x, n), & x > 1, \end{cases}$$

$$R(b, x, n) =$$

$$\frac{2(1-b)^{n+1}}{\sqrt{|1+b-2x|^2 - (1-b)^2} \sqrt{|1+b-2x| + \sqrt{|1+b-2x|^2 - (1-b)^2}}^{n+1}}$$

右裂纹左尖端的应力强度因子 K_L 、电位移强度因子 K_L^D 和磁通量强度因子 K_L^B 可分别为

$$K_L = \lim_{x \rightarrow b^-} \sqrt{2(b-x)} \cdot \tau = -\frac{\alpha_1}{\pi} \sqrt{\frac{2}{(1-b)}} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n b_n F_n, \quad (40)$$

$$K_L^D = \lim_{x \rightarrow b^-} \sqrt{2(b-x)} \cdot D = -\frac{\alpha_2}{\pi} \sqrt{\frac{2}{(1-b)}} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n b_n F_n = \frac{\alpha_2}{\alpha_1} K_L, \quad (41)$$

$$K_L^B = \lim_{x \rightarrow b^-} \sqrt{2(b-x)} \cdot B = -\frac{\alpha_3}{\pi} \sqrt{\frac{2}{(1-b)}} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n b_n F_n = \frac{\alpha_3}{\alpha_1} K_L. \quad (42)$$

右裂纹右尖端的应力强度因子 K_R 、电位移强度因子 K_R^D 和磁通量强度因子 K_R^B 可分别为

$$K_R = \lim_{x \rightarrow 1^+} \sqrt{2(x-1)} \cdot \tau = -\frac{\alpha_1}{\pi} \sqrt{\frac{2}{(1-b)}} \sum_{n=0}^{\infty} b_n F_n, \quad (43)$$

$$K_R^D = \lim_{x \rightarrow 1^+} \sqrt{2(x-1)} \cdot D = -\frac{\alpha_2}{\pi} \sqrt{\frac{2}{(1-b)}} \sum_{n=0}^{\infty} b_n F_n = \frac{\alpha_2}{\alpha_1} K_R, \quad (44)$$

$$K_R^B = \lim_{x \rightarrow 1^+} \sqrt{2(x-1)} \cdot B = -\frac{\alpha_3}{\pi} \sqrt{\frac{2}{(1-b)}} \sum_{n=0}^{\infty} b_n F_n = \frac{\alpha_3}{\alpha_1} K_R. \quad (45)$$

5 数值计算和讨论

从文献[16]和文献[17]中的讨论可知,可以利用 Schmidt 方法来求解方程(35),且选取级数的前10项就可以满足有关精度. 在所有的计算中,材料 I 的材料常数分别为

$$c_{440}^{(1)} = 44.0 \text{ GPa}, e_{150}^{(1)} = 5.8 \text{ C/m}^2, \epsilon_{110}^{(1)} = 5.64 \times 10^{-9} \text{ C}^2/(\text{N} \cdot \text{m}^2), q_{150}^{(1)} = 275.0 \text{ N}/(\text{A} \cdot \text{m}),$$

$$d_{110}^{(1)} = 0.005 \times 10^{-9} \text{ N} \cdot \text{s}/(\text{V} \cdot \text{C}), \mu_{110}^{(1)} = -297.0 \times 10^{-6} \text{ N} \cdot \text{s}^2/\text{C}^2, \rho_0^{(1)} = 1500 \text{ kg/m}^3;$$

材料 II 的材料常数分别为

$$c_{440}^{(2)} = 34.0 \text{ GPa}, e_{150}^{(2)} = 4.8 \text{ C/m}^2, \epsilon_{110}^{(2)} = 4.64 \times 10^{-9} \text{ C}^2/(\text{N} \cdot \text{m}^2), q_{150}^{(2)} = 195.0 \text{ N}/(\text{A} \cdot \text{m}),$$

$$d_{110}^{(2)} = 0.004 \times 10^{-9} \text{ N} \cdot \text{s}/(\text{V} \cdot \text{C}), \mu_{110}^{(2)} = -201.0 \times 10^{-6} \text{ N} \cdot \text{s}^2/\text{C}^2, \rho_0^{(2)} = 1000 \text{ kg/m}^3.$$

非均匀材料参数 $\beta^{(i)}$ ($i = 1, 2$) 变化范围取-2.0到2.0,这也覆盖了大部分实际的功能梯度材料参数的变换范围. 应力、电位移和磁通量场的数值结果如图2至图9所示,从这些图中可以得出如下结论:

(i) 本文所求解的问题与文献[7]和文献[8]所求的问题是不同,本文所求的问题是动态断裂问题,而文献[7]和文献[8]中所求的问题是静态反平面断裂问题. 从结果中可以看出,功能梯度压电电压磁材料中裂纹尖端奇异应力场、奇异电位移场和奇异磁通量场与均匀压电电压磁材料中裂纹尖端奇异应力场、奇异电位移场和奇异磁通量场具有相同的形式,如文献[6]至文献[8]的描述一样,但应力场强度因子、电位移强度因子和磁通量强度因子的幅值与材料的梯度参数具有较大的关系.

(ii) 从方程(40)至方程(45)可以看出材料的电-磁-力耦合特性,从图2至图4中可以看出电位移强度因子和磁通量强度因子具有和应力强度因子相同的变化趋势,但电位移强度因子和磁通量强度因子的幅值与应力强度因子的幅值不同,如图2至图4所示,电位移强度因子和磁通量强度因子的幅值非常小. 对于其它情况下的电位移强度因子和磁通量强度因子的结果本文不再给出.

(iii) 应力强度因子将随功能梯度压电电压磁材料层的厚度增加而减小,随后对于不同情况

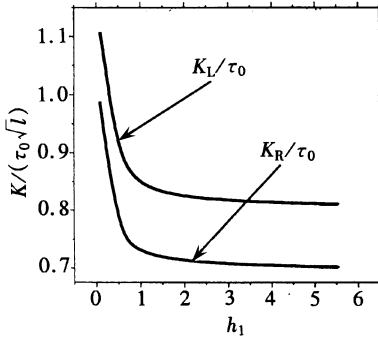


图2 应力强度因子随 h_1 的变化情况
($\beta^{(1)} = 0.3, b = 0.1, h_2 = 8.0, \beta^{(2)} = 0.4$ 和 $\omega/c_1 = 0.3$, 材料 I / 材料 II)

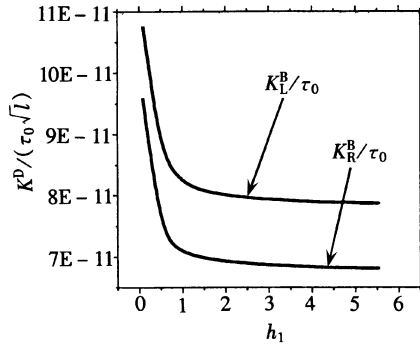


图3 电位移强度因子随 h_1 的变化情况
($\beta^{(1)} = 0.3, b = 0.1, h_2 = 8.0, \beta^{(2)} = 0.4$ 和 $\omega/c_1 = 0.3$, 材料 I / 材料 II)

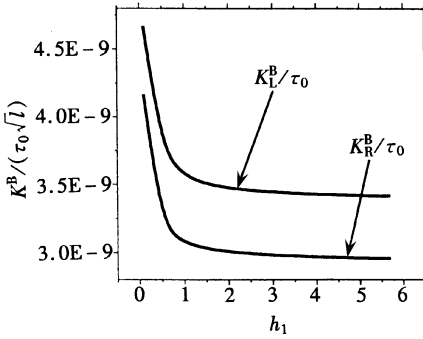


图4 磁通量强度因子随 h_1 的变化情况
($\beta^{(1)} = 0.3, b = 0.1, h_2 = 8.0, \beta^{(2)} = 0.4$ 和 $\omega/c_1 = 0.3$, 材料 I / 材料 II)

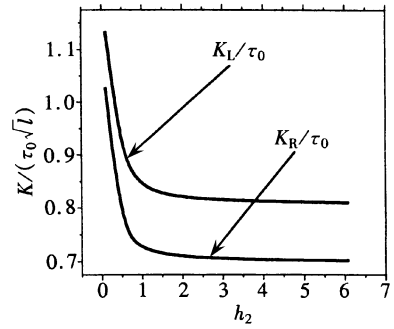


图5 应力强度因子随 h_2 的变化情况
($\beta^{(1)} = 0.3, b = 0.1, h_1 = 6.0, \beta^{(2)} = 0.4$ 和 $\omega/c_1 = 0.3$, 材料 I / 材料 II)

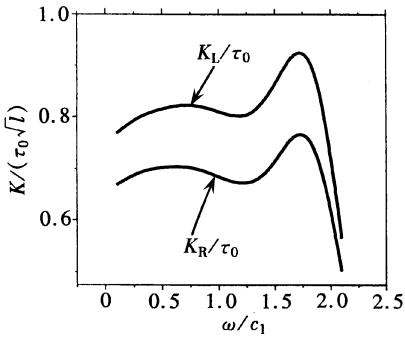


图6 应力强度因子随 ω/c_1 的变化情况
($\beta^{(1)} = 0.3, b = 0.1, h_1 = 2.0, \beta^{(2)} = 0.4$ 和 $\omega/c_1 = 8.0$, 材料 I / 材料 II)

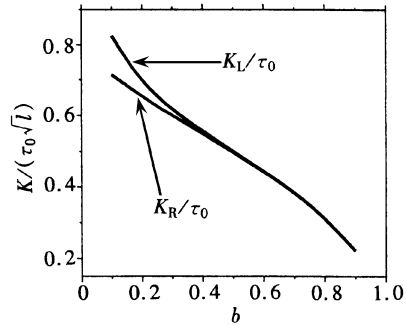


图7 应力强度因子随 b 的变化情况
($\beta^{(1)} = 0.3, h_1 = 2.0, h_2 = 8.0, \beta^{(2)} = 0.4$ 和 $\omega/c_1 = 0.3$, 材料 I / 材料 II)

都逐渐趋近于常数. 不同组合下, 这些常数值将与其在无限大平面情况下界面裂纹应力强度因子的值相同, 同时还可以从图2至图5看出, 当 $h_i > 4.0$ ($i = 1, 2$) 时材料层的厚度对结果的影响将变得非常小.

(iv) 由图6中的结果可以看出, 裂纹尖端的应力场将随着入射波频率的增加而增加直到在 $\omega/c_1 \approx 0.65$ 处达到峰值, 随后其数值将随入射波频率的增加而减小一直到 $\omega/c_1 \approx 1.25$.

当 $\omega/c_1 > 1.25$ 时, 应力场又将随着入射波频率的增加而增加直到在 $\omega/c_1 \approx 1.7$ 处达到第 2 个峰值, 随后其数值结果将减小. 第 2 个峰值将大于第 1 个峰值. 这一现象可能是由自由边界层的作用引起的.

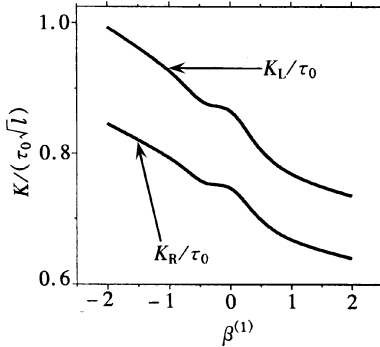


图 8 应力强度因子随 $\beta^{(1)}$ 的变化情况

($b = 0.1, h_1 = 2.0, h_2 = 8.0, \beta^{(2)} = 0.4$ 和 $\omega/c_1 = 0.3$, 材料 I / 材料 II)

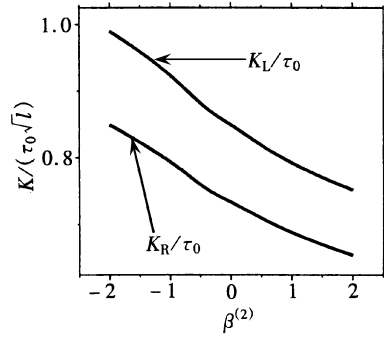


图 9 应力强度因子随 $\beta^{(2)}$ 的变化情况

($b = 0.1, h_1 = 2.0, h_2 = 8.0, \beta^{(1)} = 0.3$ 和 $\omega/c_1 = 0.3$, 材料 I / 材料 II)

(v) 如图 7 所示, 裂纹内尖端附近的应力场大于裂纹外尖端附近的应力场, 同时也表明裂纹尖端应力场随两裂纹间距离增加而减小, 即两裂纹间的相互作用将随着两裂纹间距离增加而减小.

(vi) 如图 8 至图 9 所示, 应力强度因子将随材料的功能梯度参数 $\beta^{(i)}$ ($i = 1, 2$) 的增加而减小, 这表明在实际的工程应用中, 可以通过调整功能梯度参数来降低裂纹尖端附近的应力场.

[参 考 文 献]

- [1] Sih G C, Song Z F. Magnetic and electric poling effects associated with crack growth in BaTiO₃-CoFe₂O₄ composite[J]. Theoretical and Applied Fracture Mechanics, 2003, 39(2): 209-227.
- [2] Gao C F, Tong P, Zhang T Y. Interfacial crack problems in magneto-electroelastic solids[J]. International Journal of Engineering Science, 2003, 41(18): 2105-2121.
- [3] Liu J X, Liu X L, Zhao Y B. Green's functions for anisotropic magneto-electroelastic solids with an elliptical cavity or a crack[J]. International Journal of Engineering Science, 2001, 39(12): 1405-1418.
- [4] Jin D R. Functionally graded PZT/ZnO piezoelectric composites[J]. Journal of Materials Science Letters, 2003, 22(5): 971-974.
- [5] Chen J, Liu Z X, Zou Z Z. Electromechanical impact of a crack in functionally graded piezoelectric medium[J]. Theoretical and Applied Fracture Mechanics, 2003, 39(1): 47-60.
- [6] Li C Y, Weng G J. Antiplane crack problem in functionally graded piezoelectric materials[J]. Journal of Applied Mechanics, 2002, 69(4): 481-488.
- [7] ZHOU Zhen-gong, WANG Biao. Two parallel symmetry permeable cracks in functionally graded piezoelectric/piezomagnetic materials under anti-plane shear loading[J]. International Journal of Solids and Structures, 2004, 41(9): 4407-4422.
- [8] ZHOU Zhen-gong, WU Lin-zhi, WANG Biao. The behavior of a crack in functionally graded piezoelectric/piezomagnetic materials under anti-plane shear loading[J]. Archive of Applied Mechanics, 2005, 74(8): 526-535.
- [9] Morse P M, Feshbach H. Methods of Theoretical Physics [M]. Vol 1, New York McGraw-Hill, 1958.

- [10] Soh A K, Fang D N, Lee K L. Analysis of a bi-piezoelectric ceramic layer with an interfacial crack subjected to anti-plane shear and in-plane electric loading[J]. *European Journal of Mechanics. A/Solid*, 2000, **19**(7): 961-977.
- [11] Ozturk M, Erdogan F. Mode I crack problem in an inhomogeneous orthotropic medium[J]. *International Journal of Engineering Science*, 1997, **35**(3): 869-883.
- [12] Gradshteyn I S, Ryzhik I M. *Table of Integral, Series and Products* [M]. New York: Academic Press, 1980.
- [13] Erdelyi A. *Tables of Integral Transforms* [M]. Vol 1. New York: McGraw-Hill, 1954.
- [14] 周振功, 王彪. 压电压磁复合材料中一对平行裂纹对弹性波的散射[J]. *应用数学和力学*, 2006, **27**(5): 519-526.
- [15] 周振功, 王彪. 压电压磁复合材料中界面裂纹对弹性波的散射[J]. *应用数学和力学*, 2005, **26**(1): 16-24.
- [16] 周振功, 王彪. 利用 Schmidt 方法研究压电材料 I-型界面裂纹问题[J]. *应用数学和力学*, 2006, **27**(7): 765-774.
- [17] 李琳, 周振功, 王彪. 条状功能梯度材料中偏心裂纹对反平面简谐波的散射问题[J]. *应用数学和力学*, 2006, **27**(6): 646-654.

Dynamic Behavior of Two Collinear Interface Cracks Between Two Dissimilar Functionally Graded Piezoelectric/ Piezomagnetic Material Strips

ZHANG Pei-wei¹, ZHOU Zhen-gong¹, WANG Biao²

(1. Center for Composite Materials and Structures, Harbin Institute of Technology,
Harbin 150080, P. R. China;

2. School of Physics and Engineering, Sun Yat-Sen University,
Guangzhou 510275, P. R. China)

Abstract: The dynamic interaction of two collinear interface cracks between two dissimilar functionally graded piezoelectric/ piezomagnetic material strips subjected to the anti-plane shear harmonic stress waves was investigated. By using the Fourier transform, the problem can be solved with the help of a pair of triple integral equations in which the unknown variable is the jump of displacement across crack surfaces. These equations are solved using the Schmidt method. Numerical examples are provided to show the effect of the functionally graded parameter, the circular frequency of the incident waves and the thickness of the strip upon stress, electric displacement and magnetic flux intensity factors of cracks.

Key words: functionally graded piezoelectric/ piezomagnetic material; interface crack; stress wave