

基于离散变量的拓扑优化方法^{*}

梅玉林¹, 王晓明¹, 程耿东²

(1. 大连理工大学 机械工程学院, 大连 116024;

2. 大连理工大学 工业装备结构分析国家重点实验室, 大连 116024)

(本刊编委程耿东来稿)

摘要: 单元敏度的不准确估计是离散拓扑优化算法数值不稳定的原因之一, 特别是添加材料时, 传统的敏度计算公式给出的估计误差较大, 甚至有时估计符号都是错误的. 为了克服这一问题, 通过对弹性平衡增量方程的摄动分析构造了新的增量敏度估计公式. 这一新的公式无论是添加材料还是删除材料都能较准确地估计出目标函数增量, 它可以看作是通过非局部单元刚度阵对传统敏度分析公式的修正. 以此为基础构建了一种基于离散变量的拓扑优化算法, 它可以从任意单元上添加或删除材料以使目标函数减小, 同时为避免优化过程中重新划分网格, 采用了单元软杀策略以小刚度材料模拟空单元. 这一方法的主要优点是简单, 不需要太多的数学计算, 特别有利于工程实际的应用.

关键词: 离散变量; 拓扑优化; 敏度分析; 矩阵摄动

中图分类号: O342 **文献标识码:** A

引 言

结构拓扑优化设计就是在设计域 D 中确定给定材料的最佳分布以使目标函数最小, 即依据给定的设计准则, 找到材料分布的子域 Ω , 使子域所表示的结构具有最优的目标性能. 因此拓扑优化问题可以被描述为材料分配问题, 其设计变量能表示为特征函数

$$x(\mathbf{x}) = \begin{cases} 1, & \text{当 } \mathbf{x} \in \Omega, \\ 0, & \text{当 } \mathbf{x} \in D/\Omega, \end{cases} \quad (1)$$

其中 \mathbf{x} 是设计域 D 中的点. 离散形式下, 它类似于一个具有有限元网格精度的黑白图像的表现, 拓扑优化也被转化为离散值的分配设计问题, 可用 0-1 规划加以描述. 对于线弹性结构的优化, 其离散形式一般可表示为

$$\begin{cases} \min_x J(\mathbf{u}) = \frac{1}{2} \mathbf{u}^T \mathbf{C} \mathbf{u} = \sum_{e=1}^n \mathbf{u}_e^T \mathbf{C}_e \mathbf{u}_e, \\ \text{s. t. } \mathbf{K} \mathbf{u} = \mathbf{f}, \quad V = \sum_{e=1}^n x_e V_e \leq V_{\text{allow}}, \quad x_e \in \{0, 1\}, \quad e = 1, 2, \dots, n, \end{cases} \quad (2)$$

* 收稿日期: 2006-07-13; 修订日期: 2007-04-11

基金项目: 国家自然科学基金资助项目(59805001; 50475150; 10332010); 国家教育部重点基金资助项目(104060); 教育部新世纪优秀人才支持计划资助项目(050284); 博士后科学基金资助项目(2004036110)

作者简介: 梅玉林(1969—)女, 吉林人, 博士, 副教授;

王晓明. 教授(联系人. Tel: + 86-411-84707039; E-mail: xiaoming@dlut.edu.cn).

其中 $J(u)$ 是目标函数, C 是 $n \times n$ 的目标函数矩阵, n 是设计域中的单元总数, u 和 f 分别表示结构位移向量和载荷向量, u_e 和 C_e 分别表示单元位移向量和单元目标函数矩阵, K 是总刚, x_e 是第 e 个单元的设计变量, V_e 是第 e 个单元的体积, V_{allow} 是结构许可的最大材料体积.

公式(2)中的设计变量 $x_i (i = 1, 2, \dots, n)$ 只能取0或1两个值以表示材料的有无, 虽然优化结果中并不存在中间密度单元, 但是, 众所周知, 材料分配问题是一个病态问题, 数值计算中主要表现为计算结果缺乏收敛性或结果拓扑的网格依赖性^[1-2]. 同时, 应用有限元分析离散一个设计问题时, 单元数量一般是根据有限元分析的精度来确定的, 但历史上很长一段时间认为, 这样确定的单元数量对0-1规划方法而言, 计算量太大, 常因此导致问题无法解决. 直到1999年, Beekers以Schmit和Fleury(1980)的算法为基础, 通过应用离散数学规划的共轭算法给出了一种解决问题(2)的0-1规划方法, 应用周长约束来确保解的存在^[3]. 其中周长约束方法是Haber等为得到非病态的连续优化问题而提出的^[4-5], 基本思想是通过设计结构边界的测度来限制设计解空间的拓扑复杂程度. 显然, 在体积相同的前提下, 具有大孔且大孔数量较少的结构, 比具有小孔且小孔数量较多的结构的边长要小. 因此, 给出边长上界就能有效地从可行域中排除迅速振荡的解^[1].

本文指出, 连续结构拓扑优化问题的解不存在并非一定会导致离散问题(2)的数值不稳定性, 因为设计域被离散以后, 设计是在固定的有限元网格上实施的, 可行设计空间已经被限制了, 具有比网格分辨率更高分辨率的细小结构一定不会出现在设计结果中, 所以在离散形式下问题(2)解的存在是必然的, 如果不考虑算法的复杂性, 它可以通过有限次的材料分配试算获得. 同时, 周长约束也并非必须应用, 但是在有限元网格下, 它可以作为控制设计结果拓扑复杂程度的一种工具. 然而, 单元敏度的不准确估计会导致算法的数值不稳定现象. 一般而言, 当实体材料从单元上删除时, 传统的单元敏度计算公式给出的估计通常是准确的, 相反当实体材料被加到单元上时, 特别是当这一单元周围的邻近单元没有被实体材料填充时, 单元敏度的估计值就会较大地偏离精确值, 甚至连符号的估计都是错误的. 针对这一问题, 本文提出了一种直接求解优化问题(2)的方法, 它非常简单, 不需要太多的数学公式, 特别有利于工程实际的应用.

应当指出, 在历史上一些学者已经就敏度分析不准确的相关问题进行了广泛的研究, 特别是针对半解析敏度分析问题, 那里采用了一阶向前有限差分来近似单元矩阵的导数, 它与敏度分析的解析法相比, 半解析敏度分析有时会导致相对于结构形状设计变量的敏度估计值出现严重偏差, 而这偏差源于结构位移场中一个大刚性转体的出现^[6]. 在此本文并没有沿袭这种与连续拓扑优化相比较的研究策略, 而是直接讨论离散材料分配问题, 通过矩阵摄动分析尝试找到一个目标函数的有限增量估计公式, 使其无论是添加材料还是删除材料都能给出目标函数变化更准确的估计.

1 增量敏度分析

对于拓扑优化问题(2), 设计域中的每个单元或者被实体材料填充或者为空, 优化过程中常采用弹性模量的不同来模拟, 即每个单元的弹性模量或者为实体材料弹性模量, 或者是一个很小的值, 以表示此单元为空, 这个值可以被选作 $10^{-3} \sim 10^{-6}$ 倍的实体材料弹性模量, 优化结果一般通过在设计域中反复添加材料或删除材料得到.

在迭代过程中, 为了确定结构中哪些单元的材料属性应该变化, 通常应用敏度分析来衡量

一个单元材料的删除或添加对目标函数变化的影响程度. 目前, 有许多有效的实施敏度分析的方法, 它们都是通过计算目标函数导数来实现的, 是一个无穷小分析过程. 然而, 因为问题(2)是一个典型的 0-1 优化问题, 它要求敏度分析能适应设计变量较大的修正步长, 下面将通过目标函数的增量分析来讨论这一问题.

设第 e 个单元的材料被删除或添加, 总体刚度矩阵和目标函数矩阵的变化分别是 $\Delta K = 1 K_e$ 和 $\Delta C = 1 C_e$, 这里 K_e 是单元刚度矩阵, C_e 是单元目标函数矩阵, “-”表示材料删除, “+”表示材料添加. 这样, 目标函数的变化 ΔJ 就可以用一阶渐近形式表示为

$$\Delta J = u^T C \delta u + \frac{1}{2} u^T \Delta C u, \tag{3}$$

其中, δu 是位移向量 u 的增量. 为了简化, 假设方程(2)中的力向量 f 并不因单元材料的变化而变化, 则 δu 满足

$$(K + \Delta K) \delta u = - \Delta K u, \tag{4}$$

这样, δu 可表示为

$$\delta u = - (K + \Delta K)^{-1} \Delta K u = - [I - K^{-1} \Delta K + (K^{-1} \Delta K)^2 - \dots] K^{-1} \Delta K u \approx - K^{-1} \Delta K u. \tag{5}$$

设 ω 是下面共轭方程的解:

$$K^T \omega = C u, \tag{6}$$

其中 K^T 是 K 的转置矩阵, 不失一般性, 设 K 是对称阵, 满足 $K^T = K$.

将方程(5)和方程(6)代入方程(3), 则目标函数变化的敏度公式可重写为

$$\Delta J = - \omega^T \Delta K u + \frac{1}{2} u^T \Delta C u. \tag{7}$$

数值计算发现, 当材料从单元上删除时, 方程(7)能为目标函数增量提供较准确的估计, 然而, 当材料被加到空单元上时, 方程(7)提供的目标函数增量估计通常是非常不准确的, 甚至有时估计符号都是错误的.

为了探究其中的原因, 首先分析实体材料从单元上删除的情况. 当材料从单元上删除时, $\Delta K = - K_e$, 在线弹性的假设下, 结构刚度阵 $K - K_e$ 是一个正定阵, 满足

$$X^T (K - K_e) X > 0, \tag{8}$$

其中 X 是一个非零的 n 维向量, 考虑到 K 也是一个正定阵, K_e 是一个半正定阵, 可得

$$0 \leq \frac{X^T K_e X}{X^T K X} < 1. \tag{9}$$

应用方程(9), 得到

$$0 \leq \lambda_{\max}(K^{-1} K_e) < 1, \tag{10}$$

这里, $\lambda_{\max}(A)$ 表示矩阵 A 的最大特征值, K^{-1} 是 K 的逆阵. 因此, 序列 $\{I, K^{-1} K_e, (K^{-1} K_e)^2, \dots\}$ 是一个正项级数, 其级数和 $I - K^{-1} \Delta K + (K^{-1} \Delta K)^2 - \dots$ 是收敛的, 所以方程(5)的估计符号是正确的, 但其二范数值通常比方程(4)中 δu 的小.

另一方面, 当材料被添加到空单元上时, $\Delta K = + K_e$, 方程(10)不成立, 特别是当这一空单元的邻近单元皆为空时, 可以容易地找到一个 n 维向量 X 满足 Rayleigh 商,

$$\frac{X^T K_e X}{X^T K X} \approx 10^2 \sim 10^6, \tag{11}$$

这里, $10^2 \sim 10^6$ 是实体材料弹性模量和表示空的弱材料弹性模量的比. 参见后面相对误差分

析中的简支梁算例, 这里分别计算了空单元 155、173、48 和实体单元 191 和 182 的矩阵 $K_{\text{sub}}^{-1}K_e$ 的特征值, 结果见表 1; K_{sub} 的定义参见式 (12) 的说明, 其中空单元 155、173 和 48 的最大特征值都大于实体材料与空材料的弹性模量比. 因为矩阵 $K_{\text{sub}}^{-1}K_e$ 的特征值可以看作是矩阵 $K^{-1}K_e$ 的特征值被限制在包含分析单元的子空间上的分析结果, 所以 $K^{-1}K_e$ 的最大特征值将大于 $K_{\text{sub}}^{-1}K_e$ 的特征值, 因此表 1 从数值上说明了方程 (11) 的成立. $K^{-1}K_e$ 的最大特征值一定会大于 $10^2 \sim 10^6$, 同时方程 (5) 中的 $\{I, -K^{-1}K_e, (K^{-1}K_e)^2, \dots\}$ 为交错级数, 因此它的级数和 $I - K^{-1}K_e + (K^{-1}K_e)^2 - \dots$ 是发散的, 这就导致方程 (5) 的估计是不正确的, 甚至连估计符号都是错误的.

表 1 矩阵 K_e/K_{sub} 的特征值

单元号	特 征 值							
	λ_1	λ_2	λ_3	λ_4	λ_5	λ_6	λ_7	λ_8
48	0	0	0	0.511 5	58.882 0	211.218 1	316.634 0	360.088 6
155	0	0	0	224.602 9	224.602 9	278.328 3	454.832 1	457.691 9
173	0	0	0	0.399 5	0.445 7	1.072 1	159.727 1	340.041 0
191	0	0	0	0.338 8	0.420 5	0.794 7	0.999 0	0.999 0
182	0	0	0	0.230 6	0.248 3	0.289 2	0.456 7	0.583 5

为了解决这一问题, 这里将重新构造方程 (5) 中 δu 的估计公式和序列和. 首先定义一个非局部单元刚度阵 ΔK_{NL} , 它模拟当材料删除或添加时刚度阵的有效增量,

$$\Delta K_{\text{NL}} = K_{\text{sub}} \bullet [K_{\text{sub}} + \max(0, \Delta K)]^{-1} \Delta K, \quad (12)$$

其中

$$\max(0, \Delta K) = \begin{cases} 0, & \text{当 } \Delta K \text{ 为半负定,} \\ \Delta K, & \text{当 } \Delta K \text{ 为半正定.} \end{cases}$$

K_{sub} 是刚度阵 K 的任一主子阵, 但它必须包含当前被删除材料或添加材料单元的单元刚度阵, 可以看作是包含当前被分析单元的任一子结构的刚度阵.

应用方程 (12), 方程 (5) 可以被修正为

$$\delta u \approx -K^{-1} \Delta K_{\text{NL}} u, \quad (13)$$

则敏感度公式 (7) 可以被重写为

$$\delta J = -\omega^T \Delta K_{\text{NL}} u + \frac{1}{2} (M_{u+\delta u})^T \Delta C (M_{u+\delta u} u), \quad (14)$$

其中 $M_{u+\delta u} = (K_{\text{sub}} + \max(0, \Delta K))^{-1} K_{\text{sub}}$.

理论和数值计算都表明, 无论材料被删除还是添加, 方程 (12) ~ (14) 都能较准确地估计目标函数增量, 下面给出简单的证明:

(i) 当材料被删除时, 方程 (12) 可简化为 $\Delta K_{\text{NL}} = -K_e$, 则方程 (13) 就等价于方程 (5), 方程 (14) 就等价于方程 (7), 这和前面的讨论一致, 不再赘述.

(ii) 当材料被添加时, 方程 (4) 的解可以表示为

$$\delta u = -K^{-1} \Delta K_{\text{NL}} (I + T + T^2 + \dots) u, \quad (15)$$

其中 $T = (I - K^{-1} K_{\text{sub}}) (K_{\text{sub}} + K_e)^{-1} K_e$. (16)

与方程 (9) 类似, 可以得到 $0 \leq \lambda(K^{-1} K_{\text{sub}}) < 1$ 和 $0 \leq (K_{\text{sub}} + K_e)^{-1} K_e < 1$, 并且 $-1 < \lambda(T) \leq 0$, T 是谱半径小于 1 的半负定阵, 方程 (15) 中的级数和是收敛的, 因此方程 (15) 中的 δu 就

有了明确的定义.

根据方程(12), 可以容易的得到

$$\Delta \mathbf{K}_{NL} = \mathbf{K}_e - \mathbf{K}_e \mathbf{K}_{sub}^{-1} \Delta \mathbf{K}_{NL}. \quad (17)$$

经过简单变换可得

$$(\mathbf{K} + \mathbf{K}_e) \mathbf{K}^{-1} \Delta \mathbf{K}_{NL} = \mathbf{K}_e (\mathbf{I} - \mathbf{T}). \quad (18)$$

应用方程(18), 方程(4)的解为

$$\delta \mathbf{u} = - \mathbf{K}^{-1} \Delta \mathbf{K}_{NL} = (\mathbf{I} - \mathbf{T})^{-1} \mathbf{u}. \quad (19)$$

应用级数和公式 $\sum_{k=0}^{\infty} \mathbf{T}^k = (\mathbf{I} - \mathbf{T})^{-1}$, 可知方程(19)与方程(15)相同, 证明结束.

注意到 \mathbf{T} 是负定阵, 方程(15)中的级数是交错级数, 方程(13)给出的 $\delta \mathbf{u}$ 二范数的估值大于方程(4)的估值.

另外, 当考虑由于材料变化而引起的载荷向量变化时, 位移向量的修正公式可表示为

$$\delta \mathbf{u} \approx - \mathbf{K}^{-1} \mathbf{K}_{sub} [\mathbf{K}_{sub} + \max(0, \Delta \mathbf{K})]^{-1} \Delta \mathbf{f}, \quad (20)$$

其中 $\Delta \mathbf{f}$ 是载荷向量增量.

敏度分析公式(6)、(13)、(14)、(20)在形式上与传统的敏度分析公式相似, 关键区别是这里应用主子阵修正单元刚度阵或载荷向量增量, 而非局部单元刚度阵 $\Delta \mathbf{K}_{NL}$ 可以看作是当单元材料发生变化时结构刚度阵有效变化的近似, 它避免了当在单元上添加材料时敏度估计偏离精确值的情况.

2 基于离散变量的结构拓扑优化算法

下面将给出一种基于离散变量的结构拓扑优化算法, 并阐述计算步骤. 这一算法的特点是: 1) 只要能获得单元刚度阵信息, 就可以和有限元分析软件集成; 2) 设计域中的每个单元或者被实体材料占有或者为空, 拥有典型的离散算法的特点, 没有中间密度单元.

步骤 1 初始化设计域: 给每个单元刚度阵赋值, 或者为实体材料刚度, 或者为一个接近零的小值以仿真空. 并规定每一步迭代时材料变化单元体积的最大限值, 通常可选为设计域体积的 2% 到 8%.

步骤 2 有限元分析: 求解当前结构中的位移场, 计算材料体积.

步骤 3 敏度分析:

(i) 求解共轭方程(6);

(ii) 应用方程(12)、(13)、(20)、(14) 计算每个单元的目标函数增量敏度.

步骤 4 添加材料: 在当前结构中找到一些敏度值小(或绝对值大)的空单元添加材料, 并将这些单元号记录在集合 I_a 中, 在这些空单元上添加的材料体积就等于步骤 1 中规定的每一步迭代时材料体积变化的最大限值, 然后修正这些单元的材料属性.

步骤 5 进行敏度分析: 执行步骤 2 到 3.

步骤 6 删除材料: 如果当前结构的材料体积大于规定的材料体积约束, 那么就在当前结构中找到一些敏度值小的实体材料单元删除材料, 并将这些单元号记录在集合 I_s 中. 删除材料的单元数目取决于当前结构中的材料体积, 删除材料的目的是在删除这些单元实体材料后, 设计结构的体积满足体积约束要求, 但是删除材料的体积不能大于步骤 1 中规定的每一步迭代时材料体积变化的最大限值, 然后修正这些单元的材料属性.

步骤7 检验收敛性: 比较集合 I_a 和 I_s 找到不同的单元, 计算它们的体积. 如果它们在整个设计域中所占的体积百分比小于一个规定的误差限, 则得到收敛解, 否则返回步骤2.

概念上而言, 为了简化算法可以略去步骤5. 在步骤6中要选择删除材料的单元, 就必须确定这些单元的敏度. 在实施添加材料的步骤4中, 一些单元的材料特性由空变为了实体, 而在实施删除材料的步骤6中, 一些相同单元的材料特性又要再次由实体还原为空, 这些相同单元的敏度已经在步骤3中计算过了, 所以确定它们敏度的一个简单方法就是取它们原敏度的负值. 数值算例表明, 应用这一简单的敏度计算方法, 有时候优化结果中含有一些小孔, 结果并不理想. 因为, 当删除材料时方程(13)的位移场增量被低估了, 反之, 当添加材料时方程(13)的位移场增量被高估了, 这使方程(14)给出的敏度并不准确. 总之, 当应用这一简单方法计算单元敏度时, 就可能会导致在步骤6中的单元相对敏度出现误差, 结果某些单元的材料被错误地删除了.

受文献[7]的启发, 优化问题(2)可解释为一个具有线性不等式约束的非线性规划问题, 它可通过序列线性规划方法来求解. 在每一步迭代中, 这一线性规划问题可表示为

$$\begin{cases} \min_{x_e} \Delta J = \sum_{e=1}^n \Delta J_e x_e, \\ \text{s. t. } V = \sum_{e=1}^n x_e V_e \leq V_{\text{allow}}, \quad x_e \in \{0, 1\}, \quad e = 1, 2, \dots, n, \end{cases} \quad (21)$$

其中 ΔJ_e 是第 e 个单元的增量敏度. 显然, 问题(21)是有界的, 极小值将在约束集合的一个顶点上获得. 对于最小平均柔度设计问题, 体积约束将是紧约束. 这里给出的基于离散变量的拓扑优化算法相当于应用了单纯形法求解问题(21), 每一步迭代基本解的转换就相当于单元材料的添加和删除. 步骤1中材料变化的最大体积就相当于序列线性化时优化变量的移动界限, 它确定了问题(2)在被重新线性化之前设计变量 x_e ($e = 1, 2, \dots, n$) 能变化多大.

至此, 已经介绍了这一优化算法的具体实施过程, 重要的是这里应用非局部单元刚度阵修正了传统的敏度分析公式, 非局部单元刚度阵是由主子阵确定的, 下面介绍确定主子阵的方法.

3 构造主子阵

在单元敏度分析中非常重要的一步是如何构造主子阵 K_{sub} . 在此提供两种方法.

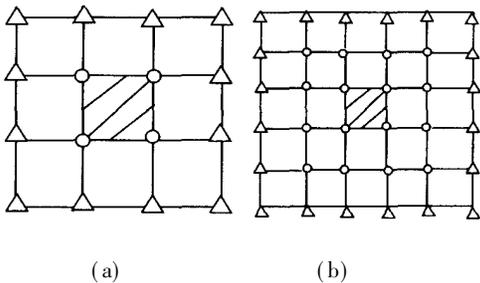


图1 子结构

不论哪种方法, 首先都要确定主子阵的行列数或列数. 为减小计算量, 下面数值算例中, 主子阵的行列数被确定为当前分析单元的自由度数, 或者分析单元与其相邻单元的总自由度数. 如图1所示, 其中阴影部分为当前分析单元, 主子阵相当于图示的子结构刚度阵, 标注三角号的节点是子结构的固定边界, 标注圆圈的节点自由度的和就是主子阵的行列数.

主子阵的行列数确定后, 就可以构造主子阵了. 若有限元分析后, 总体刚度矩阵依然存在, 且它的元素可以被方便地读出来, 那么就可以根据主子阵元素在总体刚度矩阵中的行列号直接读出数据来构造主子阵. 如果总体刚度矩阵已经被破坏, 就可以通过局部装配单元刚度

阵来构造主子阵, 当然这些操作都是在子结构上进行的.

4 相对误差分析

现以图 2 中的简支梁为例, 比较方程 (7) 和方程 (14) 的估计精度. 设填充设计域的实体材料弹性模量为 10^5 Pa, Poisson 比为 0.3. 材料分配如图 3 所示, 图中黑色区域表示实体材料, 白色区域表示空, 这里用具有小弹性模量的弱材料仿真空. 在优化过程中, 应用 20×10 个四边形单元分析和离散设计域, 图 4 是相应的位移场.

应指出实体单元的敏度就是当单元的实体材料被删除时目标函数的增量, 而空单元的敏度就是当实体材料被添加到单元上时目标函数的增量.

为了计算相对误差, 首先应用方程 (4) 和方程 (3) 计算单元敏度精确解如图 5 所示; 然后分别计算方程 (7) 和方程 (14) 的单元敏度估计解; 通过比较, 可以得到它们的相对误差, 方程 (7) 的相对误差见图 6, 方程 (14) 的相对误差见图 7. 图 5 中, 角点处的估计误差略大, 这是因为角点处单元修正后 $K^{-1} \Delta K$ 的一个特征值接近 1, 而导致变形增量 δu 不能由公式 (5) 准确估计的缘故. 角点处单元编号为 191, 其特征值参见表 1. 从图中可以看出, 与方程 (7) 相比, 方程 (14) 可以提高单元敏度估计精度大约 25 倍.

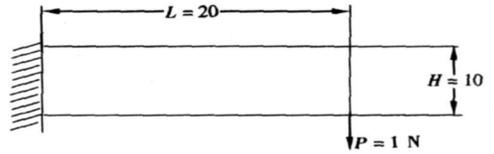


图 2 简支梁

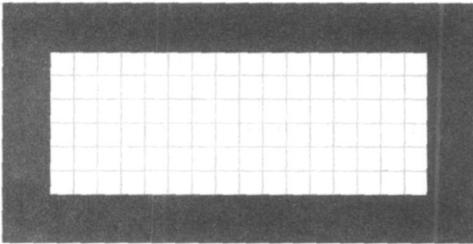


图 3 材料分配

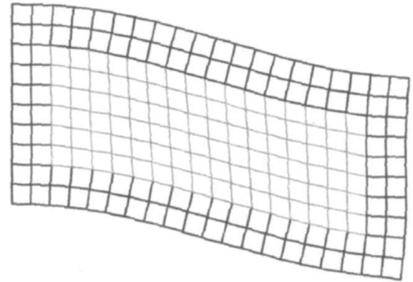


图 4 位移场

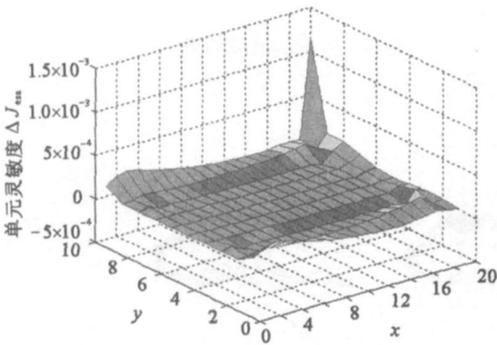


图 5 精确解

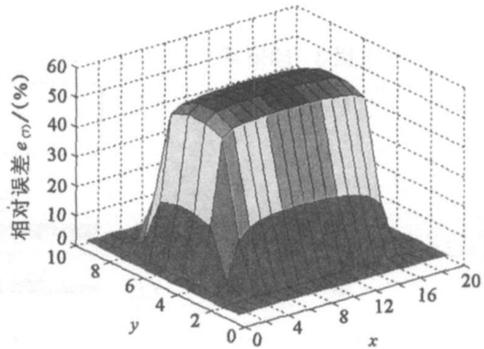


图 6 方程(7)的相对误差

5 数值算例

为了验证基于离散变量的拓扑优化方法,下面给出几个二维刚性结构的数值算例. 优化问题可被描述为,在满足材料体积约束的前提下,使结构变形能最小. 其目标函数可表示为

$$J(\mathbf{u}) = \frac{1}{2} \mathbf{u}^T \mathbf{K} \mathbf{u}. \quad (22)$$

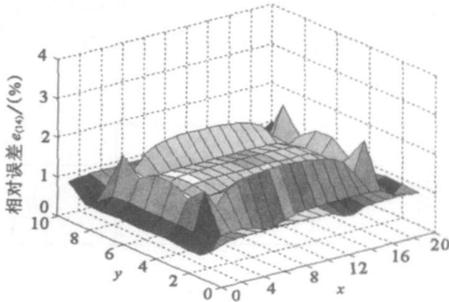


图 7 方程(14)的相对误差

算例 1 以 MBB 梁为例,设计域长 $L = 24\text{ m}$ 、高 $H = 4\text{ m}$ 如图 8 所示,载荷 $P = 800\text{ N}$ 作用在梁上部中点. 假设填充设计域的实体材料的弹性模量是 200 GPa 、Poisson 比是 0.3 , 限制体积约束 R_v 为 0.45 . 考虑到结构的对称性,优化时仅离散设计域的一半,将其划分为 42×122 个四边形单元. 这里算法中实施了步骤 5, 目标函数、约束和演化过程如图 9 和图 10 所示. 图 10(a) 是由弱材料填充的初始结构, 优化过程是通过逐渐添加材料到设计域中实现的, 图 10(j) 是优化结果, 图 11 是完整的 MBB 梁.

算例 2 为了演示优化过程也可以通过逐渐从设计域中删除材料而实现, 重新计算算例 1, 这里初始结构为填满实体材料的设计域. 目标函数、约束和演化过程如图 12 和图 13 所示,

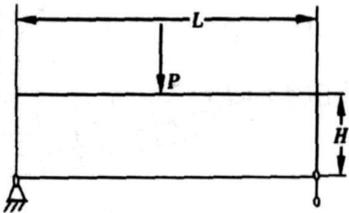


图 8 MBB 梁

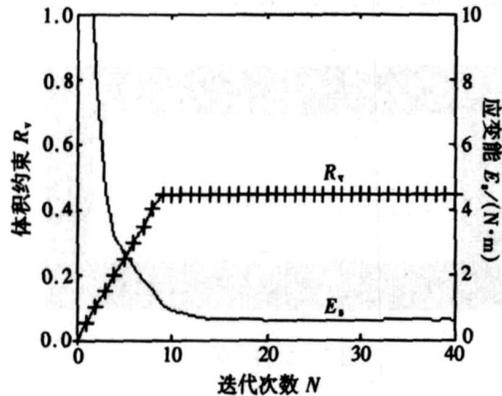
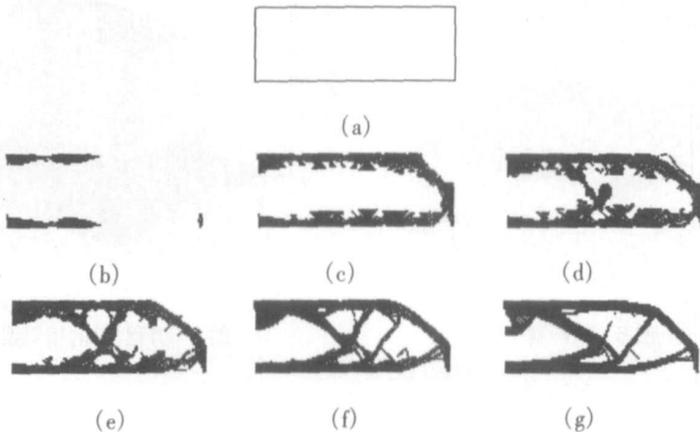


图 9 目标函数和约束





(h) (i) (j)

图 10 演化过程



图 11 完整的 MBB 梁

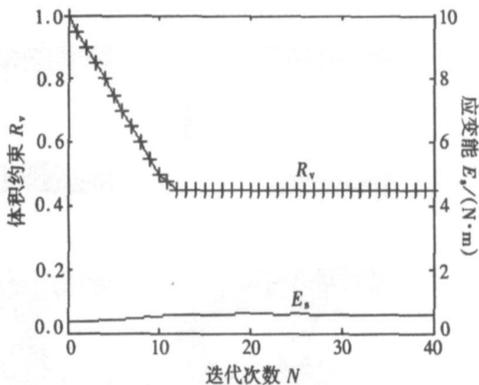


图 12 目标函数和约束

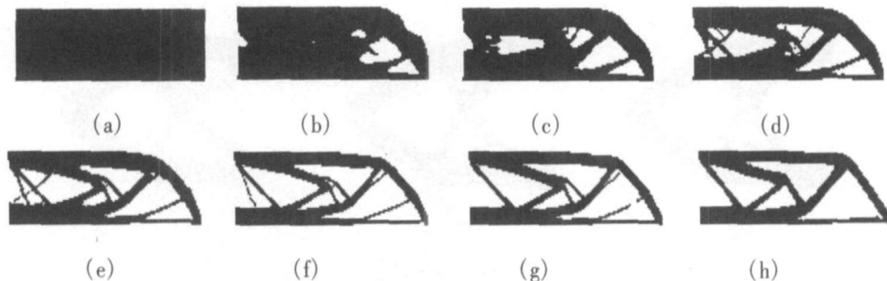


图 13 演化过程



图 14 完整的 MBB 梁

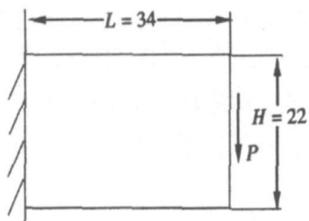


图 15 短悬臂梁(单位 m)

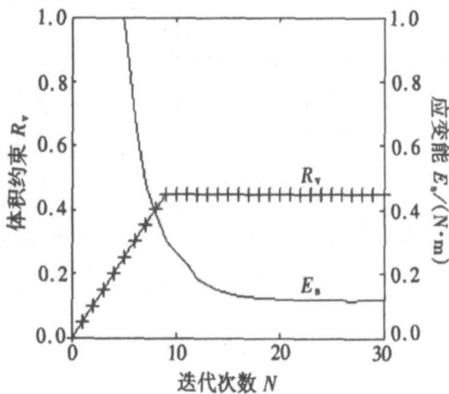


图 16 目标函数和约束

图 14 是完整的 MBB 梁.

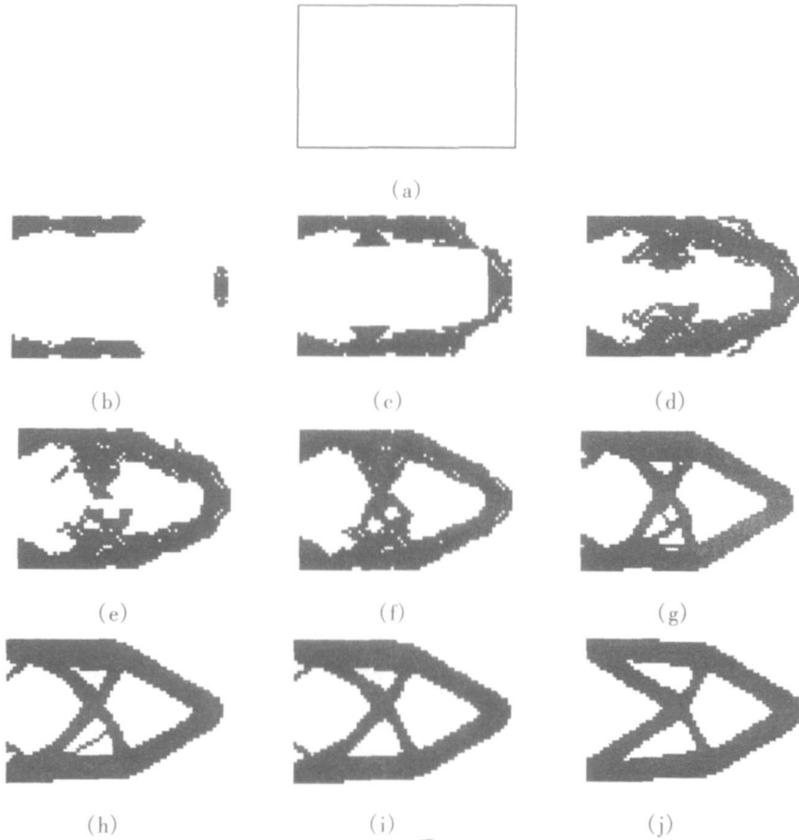


图 17 演化过程

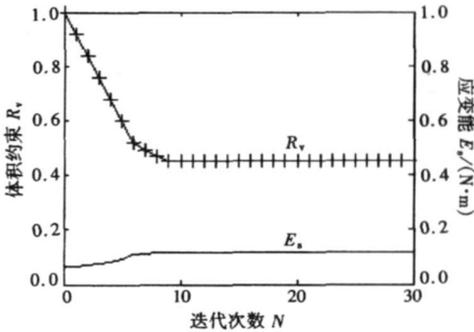


图 18 目标函数和约束

算例 3 以图 15 中的短悬臂梁为例, 设计域长 $L = 34 \text{ m}$, 高 $H = 22 \text{ m}$, 其左端固定, 右端中点作用一个垂直向下的载荷 $P = 800 \text{ N}$. 假设填充设计域的实体材料的弹性模量是 200 GPa 、Poisson 比是 0.3 , 限制体积约束 R_v 为 0.45 . 优化过程中, 应用 66×42 个四边形单元离散设计域, 并实施了算法中的步骤 5. 目标函数、约束和演化过程如图 16 和图 17 所示. 图 17(a) 是由弱材料填充的初始结构, 优化过程是通过逐渐添加材料到设计域中实现的, 图 17(j) 是优化结果.

算例 4 为了演示优化过程也可以通过逐渐从设计域中删除材料而实现, 重新计算算例 3, 这里初始结构为填满实体材料的设计域. 目标函数、约束和演化过程如图 18 和图 19 所示.

6 结 论

虽然离散拓扑优化问题的解必然存在, 但是单元灵敏度的不准确估计会导致数值不稳定现象. 为了解决这一问题, 本文通过引入非局部单元刚度阵, 构造了新的增量灵敏度分析公式, 使其无论在单元上添加材料还是删除材料, 都能较好地估计目标函数的变化. 在此基础上, 构造了基于离散变量的拓扑优化方法. 每一个单元的刚度或者是实体材料刚度, 或者是一个小值

以表示该单元为空。同时为了使目标函数下降,优化过程中实体材料可以添加到任意单元上,或从任意单元上删除。对于最大刚度设计问题,这一简单的、具有启发式的方法在理论上可以被解释为,问题(2)的序列线性化方法和单纯形方法的结合。

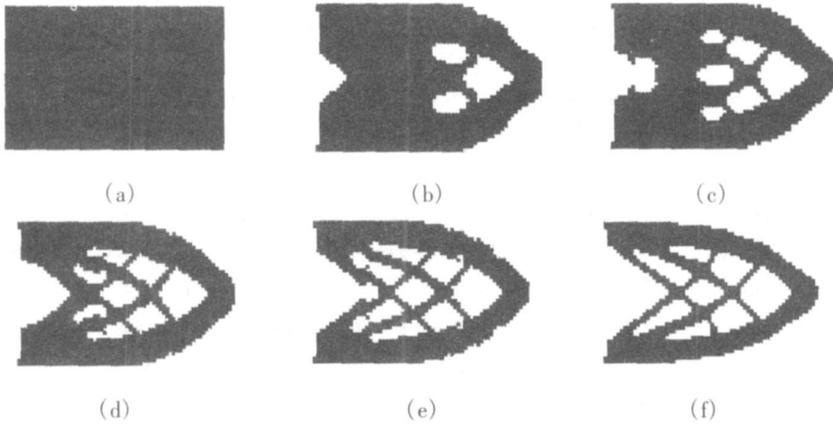


图 19 演化过程

本文提出的基于离散变量的拓扑优化方法有很多优点: 1) 设计变量或单元密度只能取 1 或 0, 特别有利于工程实际的应用; 2) 能在设计域的任意单元上删除材料或添加材料, 没有把添加材料只限制在当前结构的边界上; 3) 如果单元刚度阵能被读出来, 它能和有限元分析软件集成。总之, 这一方法就像 ESO 方法^[8]一样, 简单、不需要太多的数学表示, 是一个非常有前景的方法。

[参 考 文 献]

- [1] Hans A E, Olhoff N. Topology optimization of continuum structures: a review[J]. Appl Mech Rev, 2001, **54**(4): 331-389.
- [2] Bendsoe M P, Sigmund O. Topology Optimization Theory: Methods and Applications [M]. Berlin: Springer, 2003.
- [3] Beekers M. Topology optimization using a dual method with discrete variables[J]. Structure and Multidisciplinary Optimization, 1999, **17**(1): 14-24.
- [4] Harber R B, Jog C S, Bendsoe M P. Variable-topology shape optimization with a control on perimeter[A/J]. In: Gilmore B J, Hoeltzel D A, Dutta D, et al Eds. Proceedings of the ASME, 20th Design Automation Conference: Advances in Design Automation [C]. Washington D C: AIAA; Advances in Design Automation, ASME, 1994, **69**(2): 261-272.
- [5] Harber R B, Jog C S, Bendsoe M P. A new approach to variable-topology design using a constraint on the perimeter[J]. Structure and Multidisciplinary Optimization, 1996, **11**(1/2): 1-12.
- [6] Cheng G, Gu Y, Zhou Y. Accuracy of semi-analytical sensitivity analysis[J]. Finite Elements in Analysis and Design, 1989, **6**(2): 113-128.
- [7] Pasi Tanskanen. The evolutionary structural optimization method: theoretical aspects[J]. Computer Methods in Applied Mechanics Engineering, 2002, **191**(47/48): 5485-5498.
- [8] Xie Y M, Steven G P. A simple evolutionary procedure for structural optimization[J]. Computer & Structures, 1993, **49**(5): 885-896.

Binary Discrete Method of Topology Optimization

MEI Yu-lin¹, WANG Xiao-ming¹, CHENG Geng-dong²

(1. Mechanical Engineering Department, Dalian University of Technology,
Dalian 116024, P. R. China;

2. State Key Laboratory of Structural Analysis of Industrial Equipment,
Dalian University of Technology, Dalian 116024, P. R. China)

Abstract: The numerical non-stability of a discrete algorithm of topology optimization can result from the inaccurate evaluation of element sensitivities, especially, when material is added to elements. The estimation of element sensitivities is very inaccurate. Even their sign are also estimated wrongly. In order to overcome the problem, a new incremental sensitivity analysis formula was constructed based on the perturbation analysis of the elastic equilibrium increment equation, which can provide us with a good estimate of the change of the objective function whether material is removed from or added to elements. Meanwhile it can also be considered as the conventional sensitivity formula modified by a non-local element stiffness matrix. As a consequence, a binary discrete method of topology optimization was established, in which each element is assigned either a stiffness value of solid material or a small value indicating no material. And the optimization process can remove material from elements or add material to elements so as to make the objective function decrease. And a main advantage of the method is simplicity, no need of much mathematics, and particularly engineering application.

Key words: discrete variable; topology optimization; sensitivity analysis; matrix perturbation