

行星悬浮轨道附近的编队^{*}

龚胜平, 李俊峰, 宝音贺西

(清华大学 航天航空学院, 北京 100084)

(陈立群推荐)

摘要: 研究了不同类型的地球和火星悬浮轨道附近的相对运动. 首先, 推导了悬浮轨道附近的相对运动方程并将相对运动方程在悬浮轨道附近线性化. 利用两种半自然编队控制率进行编队控制, 其中一种为被动控制, 对工程应用有很大的价值. 在两种控制率下, 讨论了每种悬浮轨道的稳定区域. 由于两种控制率都不能满足特殊的火星悬浮轨道任务要求, 于是, 根据该任务的要求设计了一种特殊的半自然控制率. 该控制率既能满足编队任务的要求也能使相对运动稳定.

关键词: 悬浮轨道; 太阳帆; 相对运动; 编队飞行

中图分类号: V412.4 **文献标识码:** A

引 言

悬浮轨道的研究已经有很长一段时间, 最近几十年, 关于悬浮轨道的文献大量涌现^[1-11]. 最近, 龚胜平等人^[12]研究了太阳悬浮轨道附近的编队. 除了太阳悬浮轨道, McInnes 等人^[13]曾讨论过行星悬浮轨道的应用. 针对行星悬浮轨道的应用任务, McInnes 研究了行星悬浮轨道的动力学特征. 行星悬浮轨道是太阳帆悬浮在某行星的上空且作周期的圆周运动. 地球悬浮轨道被提出可用来研究磁尾以及其与太阳风的相互作用. 地球悬浮轨道的其它应用包括将其和地球同步轨道共同实现对地表面实现实时的三维成相. 火星悬浮轨道的应用也被提出^[14], 利用悬浮轨道上的大太阳帆对火星进行光照从而实现火星进行重新构建. 但是仿真结果表明需要太阳帆的面积和质量分别达到 10^{13} m^2 和 10^{10} kg 量级. 因此, 一个单独的太阳帆实现此任务并不现实. 本文提出了火星悬浮轨道附近的编队, 将多颗来自小行星的小反射物分布在悬浮轨道附近实现大帆的功能. 然后, 对于如此多的小物体在悬浮轨道附近, 各个小物体之间的相对运动特征编队将变得非常重要.

本文针对上述任务讨论了悬浮轨道附近的相对运动. 推导了相对运动方程并且将其在悬浮轨道附近线性化. 对于不同的应用任务, 研究了两种地球悬浮轨道和一种火星悬浮轨道. 基于线性相对运动方程, 两种半自然编队控制率被用来研究相对运动的稳定性. 在两种控制率下, 本文分析了每种轨道的稳定区域. 最后, 对于特殊的火星的任务, 设计了一种既能满足火星任务要求同时存在稳定区域的半自然编队, 结果表明该控制率对火星任务实际而有效.

* 收稿日期: 2006-12-08; 修订日期: 2007-03-20

基金项目: 国家自然科学基金资助项目(10672084; 10602027)

作者简介: 龚胜平(1981—), 男, 湖北人, 博士研究生(联系人, Tel: + 86-10-62773402; E-mail: gsp04@mails.tsinghua.edu.cn).

1 行星悬浮轨道

因为太阳光压场在地球附近的变化量仅为 4×10^{-3} , 可假设在地球和火星附近太阳光压场均匀. 同时假设太阳帆为全反射, 平面和均匀的镜面. 由于行星绕太阳的角速度相对行星

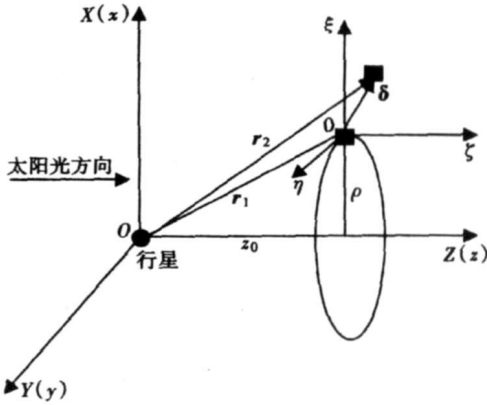


图1 行星悬浮轨道以及坐标系的定义

附近的卫星的角速度可以忽略不计, 因此行星绕太阳的旋转被忽略. 定义惯性坐标系 $OXYZ$, 原点为行星的质心, X 为行星的角速度方向, Z 为太阳与行星的连线, Y 与 X 和 Z 形成右手坐标系. 悬浮轨道为悬浮在太阳反方向绕太阳—行星连线的圆轨道, 如图1所示. 保持太阳帆在悬浮轨道上, 太阳帆必须绕惯性系旋转. 太阳帆的法线方向可以用一个夹角 α 表示, α 表示从法线方向到 Z 轴的角度. 太阳光压加速度用一个参数 $\beta = P/\sigma$ 描述, 其中 σ 为帆的单位面积的质量, P_0 为在一个天文单位处的光压加速度. 产生一个半径为 ρ 、偏移距离为 z_0 、周期为 $2\pi/\Omega$ 的悬浮轨道, 需要太阳帆的方向和光压加速度分别为

$$\begin{cases} \tan \alpha = \frac{\rho}{z_0} \left[1 - \left(\frac{\Omega}{\Omega_*} \right)^2 \right], \\ \beta = \Omega_*^2 \left\{ 1 + \left(\frac{\rho}{z_0} \right)^2 \left[1 - \left(\frac{\Omega}{\Omega_*} \right)^2 \right]^2 \right\}^{3/2} z_0, \end{cases} \quad (1)$$

其中 μ 为行星的引力常数, $\Omega_* = \sqrt{\mu/r^3}$.

2 相对运动动力学方程

本文考虑两颗星的编队, 其中主星在悬浮轨道上运行, 从星在主星附近运动. 相对运动的状态变量在一个旋转坐标系 $o\xi\zeta\eta$ 中定义, 坐标系 $o\xi\zeta\eta$ 的原点定义在主星上, η 沿太阳—行星连线方向, ξ 从悬浮轨道的中心指向原点, ζ 与 η 和 ξ 形成右手坐标系, 如图1所示. 旋转坐标系绕太阳—行星连线以角速度 Ω 旋转. 另一个旋转坐标系 $Oxyz$ 的所有坐标轴都与 $o\xi\zeta\eta$ 平行, 而原点定义在行星的质心. 在旋转坐标系 $o\xi\zeta\eta$ 中, 从星的位置可以表示为 $\delta = [x_2 - x_1 \quad y_2 - y_1 \quad z_2 - z_1]^T = [\xi \quad \zeta \quad \eta]^T$. 在惯性系 $OXYZ$ 中, 两颗太阳帆的运动方程可表示为

$$\frac{d^2 \mathbf{r}_1}{dt^2} = -\mathbf{f}(\mathbf{r}_1) + \mathbf{g}(\beta_1, \mathbf{n}_1), \quad (2)$$

$$\frac{d^2 \mathbf{r}_2}{dt^2} = -\mathbf{f}(\mathbf{r}_2) + \mathbf{g}(\beta_2, \mathbf{n}_2), \quad (3)$$

其中 $\mathbf{f}(\mathbf{r}) = (\mu/r^3)\mathbf{r}$ 是行星的引力, $\mathbf{g}(\beta_i, \mathbf{n}) = \beta_i(\mathbf{n} \cdot \mathbf{l})^2 \mathbf{n}$ 是太阳光压力. β_1 和 β_2 分别为主星和从星的光压加速度. \mathbf{n}_1 和 \mathbf{n}_2 分别为主星和从星的法线方向矢量. 由于假设太阳光压场在行星处均匀, 所以太阳光的方向在上面定义的每个坐标系都可以表示为 $\mathbf{l} = [0 \quad 0 \quad 1]^T$. 在惯性系下的相对运动方程可以通过两式相减得到

$$\frac{d^2 \delta}{dt^2} = \mathbf{f}(\mathbf{r}_1) - \mathbf{f}(\mathbf{r}_2) + \mathbf{g}(\beta_2, \mathbf{n}_2) - \mathbf{g}(\beta_1, \mathbf{n}_1). \quad (4)$$

在惯性系下的加速度和旋转坐标系下的加速度的转换关系可表示为

$$\frac{d^2 \delta}{dt^2} = \ddot{\delta} + 2\Omega \times \dot{\delta} + \Omega \times (\Omega \times \delta) + \mathcal{Q} \times \delta, \quad (5)$$

其中 d/dt 表示惯性系下的导数, $\dot{\delta}$ 表示旋转系下的导数. 由于旋转坐标系作匀速旋转, 所以 $\mathcal{Q} = \mathbf{0}$. 于是, 在旋转坐标系下的相对运动方程可以表示为

$$\ddot{\delta} + 2\Omega \times \dot{\delta} + \Omega \times (\Omega \times \delta) = \mathbf{f}(r_1) - \mathbf{f}(r_2) + \mathbf{g}(\beta_2, n_2) - \mathbf{g}(\beta_1, n_1). \quad (6)$$

方程(6)可以表示为

$$\ddot{\delta} + 2\mathbf{J}\dot{\delta} + \mathbf{M}\delta = \mathbf{F}(\delta) + \mathbf{f}_u, \quad (7)$$

右端两项分别表示为

$$\mathbf{f}_u = \mathbf{g}(\beta_2, n_2) - \mathbf{g}(\beta_1, n_1), \quad \mathbf{F}(\delta) = \mathbf{f}(r_1) - \mathbf{f}(r_2), \quad (8)$$

其中

$$\mathbf{J} = \begin{bmatrix} 0 & -\Omega & 0 \\ \Omega & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{M} = - \begin{bmatrix} \Omega^2 & 0 & 0 \\ 0 & \Omega^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

方程(7)描述了在旋转坐标系下的相对运动动力学. 如果 $\mathbf{f}_u = \mathbf{0}$, 微分方程(7)有平衡点 $\delta = \mathbf{0}$. \mathbf{f}_u 由太阳帆的姿态确定与轨道状态量无关. 因此, \mathbf{f}_u 的存在给平衡点的稳定性分析带来了很大的困难. 然而, 可以通过调节太阳帆的姿态来进行轨道控制, 即可以通过调节 \mathbf{f}_u 来进行编队控制. 所以对于该问题而言, 稳定性分析和轨道控制是一个不可分割的整体.

3 相对运动方程的线性化

对于编队问题, 两颗帆之间的相对距离 $|r_2 - r_1|$ 与帆到太阳的距离 r_1 或 r_2 是小量. 因此, 可将 $\mathbf{f}(r_2)$ 在 r_1 附近线性化为

$$\mathbf{f}(r_2) = \mathbf{f}(r_1) + \left. \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{r}} \right|_{r=r_1} \delta + o\left(\frac{\delta}{r_1}\right), \quad (9)$$

其中

$$\left. \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{r}} \right|_{r=r_1} = \frac{\mu}{r_1^3} \mathbf{I}_{3 \times 3} - \frac{3\mu}{r_1^5} \mathbf{r} \mathbf{r}^T.$$

为了保持从星在主星附近, 两颗太阳帆的太阳光压加速度和法线矢量都必须接近. 所以, $\mathbf{g}(n_2, \beta_2)$ 可以在 (n_1, β_1) 展开为

$$\begin{aligned} \mathbf{f}_u &= \mathbf{g}(r_2, n_2, \beta_2) - \mathbf{g}(r_1, n_1, \beta_1) = \left. \frac{\partial \mathbf{g}}{\partial \mathbf{n}} \right|_{\substack{n=n_1 \\ \beta=\beta_1}} (n_2 - n_1) + \\ &\quad \left. \frac{\partial \mathbf{g}}{\partial \beta} \right|_{\substack{n=n_1 \\ \beta=\beta_1}} (\beta_2 - \beta_1) + o(n_2 - n_1) + o\left(\frac{\beta_2 - \beta_1}{\beta_1} n_1\right), \end{aligned} \quad (10)$$

其中

$$\left. \frac{\partial \mathbf{g}}{\partial \beta} \right|_{\substack{n=n_1 \\ \beta=\beta_1}} = (\mathbf{l} \cdot \mathbf{n})^2 \mathbf{n}, \quad \left. \frac{\partial \mathbf{g}}{\partial \mathbf{n}} \right|_{\substack{n=n_1 \\ \beta=\beta_1}} = \beta (\mathbf{l} \cdot \mathbf{n})^2 \mathbf{I}_{3 \times 3} + 2\beta (\mathbf{l} \cdot \mathbf{n}) \mathbf{n} \mathbf{l}^T.$$

于是, 线性化的相对运动方程可以表示为

$$\ddot{\delta} + 2\mathbf{J}\dot{\delta} + \mathbf{V}\delta = \mathbf{N}\Delta n + \mathbf{P}\Delta\beta, \quad (11)$$

其中

$$\begin{aligned} \mathbf{V} &= \mathbf{M} + \frac{\mu}{r_1^3} \mathbf{I}_{3 \times 3} - \frac{3\mu}{r_1^5} \mathbf{r}_1 \mathbf{r}_1^T, \\ \mathbf{N} &= \beta_1 (\mathbf{l} \cdot \mathbf{n}_1)^2 \mathbf{I}_{3 \times 3} + 2\beta_1 (\mathbf{l} \cdot \mathbf{n}_1) \mathbf{n}_1 \mathbf{l}^T, \end{aligned}$$

$$P = (l \cdot n_1)^2 n_1.$$

对编队而言, 应该寻找方程(11)的稳定解不是渐进稳定解. 因为对方程(11)的渐进稳定解, 从星最后将收敛到主星而无法形成编队. 本文定义相对运动稳定性为从星在主星附近运动, 随着时间的增长, 从星既不发散也不收敛到主星. 本文通过计算方程(11)的系数矩阵的特征值来判断相对运动的稳定性, 如果所有的特征值都有非正的实部并且至少有一个零实部, 则相对运动问题稳定.

4 半自然编队

文献[12]研究了两类地球悬浮轨道, 第一类为极地轨道的同步轨道, 即悬浮轨道的周期 $2\pi/\Omega$ 与轨道半径和悬浮轨道半径相等的地球极地轨道的周期相等. 悬浮轨道的半径为 ρ , 所以极地轨道和悬浮轨道的周期为 $\Omega = \sqrt{\mu/\rho^3}$. 第二类为最优悬浮轨道, 由式(1)知悬浮轨道需要的太阳帆的光压加速度为悬浮轨道周期的函数. 因此通过求解 $\partial\beta/\partial\Omega = 0$ 可以得到 $\Omega = \Omega_*$ 使得悬浮轨道需要的光压加速度最小. 文献[13]讨论了火星悬浮轨道的应用任务. 任务要求太阳光经过太阳帆反射后必须到达火星表面. 因此, 太阳帆在悬浮轨道上的方向由轨道参数 ρ 和 z_0 确定为 $\alpha = 0.5 \arctan(\rho/z_0)$. 同时, 悬浮轨道的周期由太阳帆的姿态确定为 $\Omega = \Omega_* [1 - (z_0/\rho) \tan \alpha]^{1/2}$.

半自然编队表明两颗帆具备相同的光压加速能力, 即 $\Delta\beta = 0$. 仅仅通过简单的姿态调节来控制编队.

1) 第一种半自然编队控制率表示为 $\Delta n = 0$. 该控制率保证从星的法线方向在旋转坐标系中始终与主星的法线方向一致, 而主星的法线方向在旋转坐标系中为一个常矢量. 于是, 线性化的相对运动方程为

$$\delta + 2J\delta + V\delta = 0. \quad (12)$$

(a) 第一类地球悬浮轨道, 将 $\Omega = \sqrt{\mu/\rho^3}$ 代入方程(12)得

$$\begin{cases} \xi - 2\sqrt{\frac{\mu}{\rho^3}}\zeta + \left(\frac{\mu}{r_1^3} - \frac{\mu}{\rho^3} - 3\frac{\mu Q_0^2}{r_1^5}\right)\xi - 3\frac{\mu Q_0}{r_1}\eta = 0, \\ \zeta - 2\sqrt{\frac{\mu}{\rho^3}}\xi + \left(\frac{\mu}{r_1^3} - \frac{\mu}{\rho^3}\right)\zeta = 0, \\ \dot{\eta} - 3\frac{\mu Q_0}{r_1^5}\xi + \left(\frac{\mu}{r_1^3} - 3\frac{\mu z_0^2}{r_1^5}\right)\eta = 0. \end{cases} \quad (13)$$

方程(13)的表达式太复杂无法解析求解, 用数值方法来求解稳定区域. 首先数值计算系数矩阵的特征值, 如果特征值的实部小于某个正实数(如: 10^{-16}), 则认为实部为零. 该情况下的稳定区域为图2中的阴影部分.

(b) 第二类地球悬浮轨道, 将 $\Omega = \Omega_*$ 代入方程得

$$\begin{cases} \xi - 2\Omega_*^2 \zeta - 3\Omega_*^2 \frac{\rho^2}{r_1^2} \xi - 3\Omega_*^2 \frac{Q_0}{r_1} \eta = 0, \\ \zeta - 2\Omega_*^2 \xi = 0, \\ \dot{\eta} - 3\Omega_*^2 \frac{Q_0}{r_1^2} \xi - 3\Omega_*^2 \frac{z_0^2}{r_1^2} \eta = 0. \end{cases} \quad (14)$$

通过积分方程(14)中的第2式然后代入第1式进行解耦, 由积分方程(14)中的第2式得

$$\xi = -2\Omega(\xi - \xi_0). \quad (15)$$

将方程(15)代入方程(14),同时通过坐标转换将代入后引入的常数消除.解耦方程在新的变量下的方程可以表示为

$$\begin{cases} \xi + \left[4 - 3\frac{\rho^2}{r_1^2}\right] \Omega^2 \xi - 3\frac{\rho_0}{r_1^2} \Omega^2 \eta = 0, \\ \eta - 3\frac{\rho_0}{r_1^2} \Omega^2 \xi + \left[1 - 3\frac{z_0^2}{r_1^2}\right] \Omega^2 \eta = 0. \end{cases} \quad (16)$$

相对运动的稳定性可以通过求解方程(16)的特征值来判断,方程的特征多项式可以表示为

$$\omega^4 + 2\omega^2 + 1 - 9\frac{z_0^2}{r_1^2} = 0. \quad (17)$$

因此系统的稳定性可以通过判断方程(17)的根的情况决定,相对运动的充分必要条件可以表示为

$$1 - 9\frac{z_0^2}{r_1^2} \geq 0. \quad (18)$$

通过求解方程(18)可以得到该情况下编队的稳定区域为 $\rho \geq 2\sqrt{2}z_0$.

(c) 火星悬浮轨道,联立 $\Omega = \Omega_* [1 - (z_0/\rho)\tan\alpha]^{1/2}$ 和 $\alpha = 0.5\arctan(\rho/z_0)$ 可以得到 $\Omega = \Omega_* (\sqrt{r_1^2 - r_1 z_0}/\rho)$, 将其代入方程(12)得

$$\begin{cases} \xi - 2\Omega_* \frac{\sqrt{r_1^2 - r_1 z_0}}{\rho} \xi + \left[\frac{\mu}{r_1^3} - \Omega_*^2 \frac{r_1^2 - r_1 z_0}{\rho^2} - 3\frac{\rho^2}{r_1^5} \right] \xi - 3\frac{\mu Q_0}{r_1^5} \eta = 0, \\ \zeta - 2\Omega_* \frac{\sqrt{r_1^2 - r_1 z_0}}{\rho} \zeta + \left[\frac{\mu}{r_1^3} - \Omega_*^2 \frac{r_1^2 - r_1 z_0}{\rho^2} \right] \zeta = 0, \\ \eta - 3\frac{\mu Q_0}{r_1^5} \xi + \left[\frac{\mu}{r_1^3} - 3\frac{z_0^2}{r_1^5} \right] \eta = 0. \end{cases} \quad (19)$$

该表达式太复杂无法解析求解,用数值方法来求解稳定区域.数值结果表明该情况下没有稳定区域.

2) 第二种半自然编队控制率表示为 $\Delta\alpha = 0$. 该控制率保证从星的法向方向与太阳一行星的连线的夹角始终保持与主星的一致.对主星而言,该夹角为一常数.于是,线性化的相对运动方程可以表示为

$$\delta + 2\mathbf{J}\delta + \mathbf{V}\delta = \mathbf{N}\Delta n. \quad (20)$$

从星的法向方向矢量在旋转坐标系中可以表示为

$$\mathbf{n}_2 = \left[\sin\alpha \frac{x_2}{\sqrt{x_2^2 + y_2^2}} \quad \sin\alpha \frac{y_2}{\sqrt{x_2^2 + y_2^2}} \quad \cos\alpha \right]^T, \quad (21)$$

于是,两颗帆的法向矢量之差可以线性化为

$$\Delta \mathbf{n} = \mathbf{n}_2 - \mathbf{n}_1 = \left. \frac{\partial \mathbf{n}}{\partial \mathbf{r}} \right|_{r_1} \delta = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \sin\alpha(1/\rho) & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \delta. \quad (22)$$

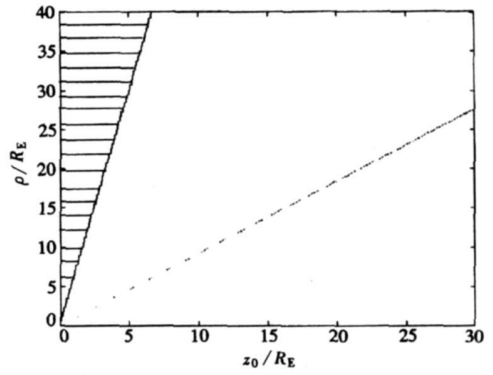


图2 $\Delta n = 0$ 时第一类地球悬浮轨道的稳定区域(R_E 为地球半径)

将方程(22)代入方程(20)得

$$\begin{cases} \xi - 2\Omega\xi + \left[\frac{\mu}{r_1^3} - \Omega^2 - 3\frac{\mu Q^2}{r_1^5} \right] \xi - 3\frac{\mu Q z_0}{r_1^5} \eta = 0, \\ \zeta - 2\Omega\zeta = 0, \\ \eta - 3\frac{\mu Q_0}{r_1^5} \xi + \left[\frac{\mu}{r_1^3} - 3\frac{\mu z_0^2}{r_1^5} \right] \eta = 0. \end{cases} \quad (23)$$

方程(23)可以通过积分方程(23)的第2式然后代入方程(23)的第1式进行解耦,积分方程(23)的第2式得

$$\zeta = -2\Omega(\xi - \xi_0). \quad (24)$$

将方程(24)代入方程(23),并通过坐标转换消除常数得到新的变量定义的解耦微分方程为

$$\begin{cases} \xi' + \left[\Omega_*^2 + 3\Omega^2 - 3\Omega_*^2 \frac{\rho^2}{r_1^2} \right] \xi - 3\Omega_*^2 \frac{Q z_0}{r_1^2} \eta = 0, \\ \eta' - 3\Omega_*^2 \frac{Q_0}{r_1^2} \xi + \left[\Omega_*^2 - 3\Omega_*^2 \frac{z_0^2}{r_1^2} \right] \eta = 0. \end{cases} \quad (25)$$

系统的稳定性可以通过方程(25)的系数矩阵的特征来判断,求解系数矩阵的特征值的特征方程可表示为

$$\omega^4 + (3\Omega^2 - \Omega_*^2) \omega^2 + \left[3\Omega^2 \Omega_*^2 - 2\Omega_*^4 - 9\Omega^2 \Omega_*^2 \frac{z_0^2}{r_1^2} \right] = 0. \quad (26)$$

(a) 第一类地球悬浮轨道. 将 $\Omega = \sqrt{\mu/\rho^3}$ 代入方程(26),通过简单的代数计算,得到相对运动稳定的充分必要条件为

$$2\left[\frac{\rho}{r_1} \right]^3 - 9\left[\frac{\rho}{r_1} \right]^2 + 6 \leq 0, \quad (27)$$

该情况下的稳定区域为 $\rho \geq 2.2635z_0$.

(b) 第二类地球悬浮轨道. 该情况下稳定区域与第一种半自然编队控制率下的第二类地球悬浮轨道的稳定区域一致, $\rho \geq 2\sqrt{2}z_0$.

(c) 火星悬浮轨道. 将 $\Omega = \Omega_* (\sqrt{r_1^2 - r_1 z_0}/\rho)$ 代入方程(26),通过简单的代数操作,得到相对运动稳定的充分必要条件为

$$9\left[\frac{z_0}{r_1} \right]^3 - 7\left[\frac{z_0}{r_1} \right]^2 - 3\frac{z_0}{r_1} + 1 \geq 0, \quad (28)$$

该情况下的稳定区域为 $\rho \geq 4.0395z_0$.

对于第二种半自然编队,每种情况都存在稳定区域.然后第二种控制率保证 $\Delta\alpha = 0$ 可以通过适当的设计太阳帆的形状实现,不需要主动控制,因此这种编队对工程应用有很大价值.

5 火星悬浮轨道任务的特殊半自然编队

对火星悬浮轨道而言,除了轨道的稳定性外,控制率需要保证太阳光经过太阳帆反射后会到达火星表面.即,在整个任务期间都必须满足关系 $\alpha = 0.5\arctan(\sqrt{x^2 + y^2}/z)$.然而,第二种半自然控制率不能保证该关系总能得到满足.在第二种控制率下,太阳光经过反射后可能偏离火星.因此,上面讨论的两种控制率对该特殊的火星任务都不适用.必须引入一种既

能满足轨道稳定性又满足任务特殊要求的新控制率. 该控制率要求从星的法向方向满足

$$\alpha = \frac{1}{2} \arctan \left[\frac{\sqrt{x_2^2 + y_2^2}}{z_2} \right]. \quad (29)$$

于是, 法线方向在旋转坐标系中的投影可以表示为

$$\mathbf{n}_2 = \left[\sin \alpha \frac{x_2}{\sqrt{x_2^2 + y_2^2}} \quad \sin \alpha \frac{y_2}{\sqrt{x_2^2 + y_2^2}} \quad \cos \alpha \right]^T. \quad (30)$$

将该矢量在主星的法向矢量附近线性化得到

$$\Delta \mathbf{n} = \mathbf{n}_2 - \mathbf{n}_1 = \left. \frac{\partial \mathbf{n}}{\partial \mathbf{r}} \right|_{r_1} \delta = \begin{bmatrix} K_{11} & 0 & K_{13} \\ 0 & K_{22} & 0 \\ K_{31} & 0 & K_{33} \end{bmatrix} \delta, \quad (31)$$

其中

$$\begin{aligned} K_{11} &= \frac{\sqrt{2} \rho_0}{4r_1^3 \lambda}, \quad K_{13} = -\frac{\sqrt{2} \rho^2}{4r_1^3 \lambda}, \quad K_{22} = \frac{\lambda}{\sqrt{2} \rho} \\ K_{31} &= \frac{\sqrt{2} \lambda}{4(r_1 - z_0)} \left[2 - \frac{\rho^2}{r_1^2} - \frac{\rho^2}{r_1(r_1 - z_0)} \right], \\ K_{33} &= \frac{\sqrt{2} \rho \lambda}{4(r_1 - z_0)} \left[\frac{z_0}{r_1^2} + \frac{\lambda^2}{r_1 - z_0} \right], \\ \lambda &= \sqrt{\frac{r_1 - z_0}{r_1}}. \end{aligned}$$

将方程(31)代入方程(20)得

$$\begin{cases} \ddot{\xi} - 2\Omega \dot{\zeta} + \left(\frac{\mu}{r_1^3} - \Omega^2 - \frac{3\mu\rho^2}{r_1^5} - \beta \cos^2 \alpha_1 K_{11} - \beta \sin 2\alpha_1 K_{31} \right) \xi - \\ \left(\frac{3\mu\rho_0}{r_1^5} + \beta \cos^2 \alpha_1 K_{13} + \beta \sin 2\alpha_1 K_{33} \right) \eta = 0, \\ \ddot{\zeta} + 2\Omega \dot{\xi} = 0, \\ \ddot{\eta} - \left(\frac{3\mu\rho_0}{r_1^5} + 3\beta \cos^2 \alpha_1 K_{31} \right) \xi + \left(\frac{\mu}{r_1^3} - 3\frac{\mu z_0^2}{r_1^5} - 3\beta \cos^2 \alpha_1 K_{33} \right) \eta = 0. \end{cases} \quad (32)$$

方程(32)可以通过积分方程(32)的第2式然后代入方程(32)的第1式进行解耦, 积分方程(32)的第2式得

$$\dot{\zeta} = -2\Omega(\xi - \xi_0). \quad (33)$$

将方程(33)代入方程(32), 并通过坐标转换消除常数得到以新的变量定义的解耦微分方程为

$$\begin{cases} \ddot{\xi}' + \left(\frac{\mu}{r_1^3} + 3\Omega^2 - \frac{3\mu\rho^2}{r_1^5} - \beta \cos^2 \alpha_1 K_{11} - \beta \sin 2\alpha_1 K_{31} \right) \xi' - \\ \left(\frac{3\mu\rho_0}{r_1^5} + \beta \cos^2 \alpha_1 K_{13} + \beta \sin 2\alpha_1 K_{33} \right) \eta' = 0, \\ \ddot{\eta}' - \left(\frac{3\mu\rho_0}{r_1^5} + 3\beta \cos^2 \alpha_1 K_{31} \right) \xi' + \left(\frac{\mu}{r_1^3} - 3\frac{\mu z_0^2}{r_1^5} - 3\beta \cos^2 \alpha_1 K_{33} \right) \eta' = 0. \end{cases} \quad (34)$$

该表达式太复杂无法解析求解稳定区域, 用数值方法来求解该情况下的稳定区域. 该情况下的稳定区域为图3中的阴影部分. 结果表明, 在该控制率下大量的稳定轨道存在. 因此

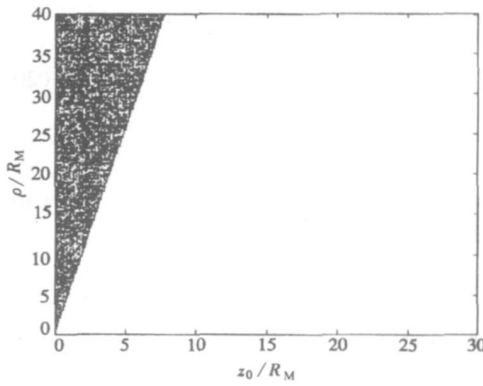


图3 火星悬浮轨道在特殊控制率下的稳定区域(R_M 为火星半径)

可以将小反射体置于稳定区域内的悬浮轨道附近,采用该控制率进行编队控制.小反射体将会在悬浮轨道附近运动且太阳光经过反射体反射后将到达火星表面.所以此控制率对于该特殊的火星任务非常的有效.

6 结 论

编队飞行非常适合目前提出的各种有关悬浮轨道的任务.本文将悬浮轨道和编队飞行结合,讨论各种不同悬浮轨道附近的编队飞行的稳定性问题.首先,通过相对运动的建模得到相对运动的动力学方程,基于该方程讨论了两种半自然编队控制率.研究表明,对于两种控制率都存在

在某些稳定的悬浮轨道附近的编队.但对于特殊的火星任务,两种编队控制都不能满足任务的要求,于是引入了特殊的编队控制率.该控制率既使相对运动稳定,而且满足任务的要求.

[参 考 文 献]

- [1] West J L. NOAA/DOD/ NASA Geostorm Warning Mission[R]. Jet Propulsion Lab, California Institute of Technology, JPL D-13986, Pasadena, CA, Oct, 1996.
- [2] Prado J Y, Perret A, Pignolet G, et al. Using a Solar Sail for a Plasma Storm Early Warning System [R]. International Academy of Astronautics, Paper 96-IAA. 3.3.06, Oct, 1996.
- [3] McInnes C R. Dynamics stability and control of non-Keplerian orbits[D]. Doctoral Thesis for the Degree of Doctor of Science. Glasgow: University of Glasgow, 2002.
- [4] Austin R E, Dod R E, Terwilliger C H. The ubiquitous solar electric propulsion stage[J]. Acta Astronautica, 1977, 4(1): 671-694.
- [5] Forward R L. Light-levitated geostationary cylindrical orbits[J]. Journal of the Astronautical Sciences, 1981, 29(1): 73-80.
- [6] McInnes C R, Simmons F L. Solar sail halo orbits I: heliocentric case[J]. Journal of Spacecraft and Rockets, 1992, 29(4): 466-471.
- [7] McInnes C R. Passive control of displaced solar sail orbits[J]. Journal of Guidance, Control, and Dynamics, 1998, 21(6): 975-982.
- [8] McInnes C R, Macpherson K P. Solar sail halo trajectories: dynamics and applications[A]. In: 42nd International Astronautical Congress [C]. IAF-91-334. Montreal, 1991, 5-11.
- [9] McInnes C R. Solar sail mission applications for non-Keplerian orbits[J]. Acta Astronautica, 1999, 45(4): 567-575.
- [10] Molostov A A, Shvartsburg A A. Heliocentric halos for a solar sail with absorption[J]. Soviet Physics Doklady, 1992, 37(4): 149-152.
- [11] Molostov A A, Shvartsburg A A. Heliocentric synchronous halos for a solar sail with absorption[J]. Soviet Physics Doklady, 1992, 37(4): 195-197.
- [12] GONG Sheng-ping, HBAOYIN He-xi, LI Jun-feng. Solar sail formation flying around a displaced solar orbit[J/L]. Journal of Guidance, Control, and Dynamics. [2007-05-17]. DOI: 10.2514/1.24315.

<http://www.writetreck.net/aiaa>.

- [13] McInnes C R, Simmons F L. Solar sail halo orbits II: geocentric case[J]. *Journal of Spacecraft and Rockets*, 1992, **29**(4): 462-479.
- [14] McInnes, C R. Non-Keplerian orbits for Mars solar reflectors[J]. *Journal of the British Interplanetary Society*, 2002, **55**(3/4): 74-84.

Formation Around Planetary Displaced Orbit

GONG Sheng-ping, LI Jun-feng, BAOYIN He-xi

(School of Aerospace, Tsinghua University, Beijing 100084, P. R. China)

Abstract: The relative motion around the planetary displaced orbit is investigated. Several kinds of displaced orbits for geocentric and Martian cases were discussed. First, the relative motion is linearized around the displaced orbits. Then, two semi-natural control laws were investigated for each kind of orbit and the stable regions were obtained for each case. One of the two control laws is the passive control law that is very attractive for engineering practice. However, the two control laws are not very suitable for the Martian mission. Another special semi-natural control law was designed based on the requirement of the Martian mission. The results show that large stable regions exist for the control law.

Key words: displaced orbit; solar sail; relative motion; formation flying