

关于 Boussinesq 方程 Barenblatt 幂级数解的注记*

宋志尧^{1,2,4}, 李 凌^{2,3}, D·拉肯同³

- (1. 河海大学 海洋学院 水文水资源与水利工程科学国家重点实验室, 南京 210098;
2. 河海大学 水生态模拟中心, 南京 210098;
3. 昆士兰大学 工程学院, Qld 4072, 澳大利亚;
4. 南京师范大学 虚拟地理环境教育部重点实验室, 南京 210097)

(何友声推荐)

摘要: 通过幂级数展开的方法推求得出 Barenblatt 幂级数解的各项系数之间的递推公式(对半无限长多孔介质中地下水流动的 Boussinesq 方程的自相似解, 在边界水头随时间幂函数变化的条件下, Barenblatt (1952) 得到了一个幂级数解, 但他仅仅列出了其前 3 项的系数, 既没有给出整个幂级数解所有系数的递推关系式, 也没有证明该幂级数解的收敛性.), 并对该级数的收敛性进行了证明, 同时对解的实际应用作了讨论. 这些研究结论易于理解, 方便工程技术人员应用于流域水文学和基流研究及解决农业排水等实际问题.

关键词: 幂级数展开; 自相似解; 递推公式; 收敛性

中图分类号: O175.2; O175.8; O357.3 文献标识码: A

引 言

在 Dupuit 水平流假说条件下, 模拟非承压含水层中的地下水运动时, 非线性 Boussinesq 方程经常被应用于地下水水位的确定. 流域水文学和基流的研究及解决农业排水问题, 要求得 Boussinesq 方程的解.

这些问题常常涉及到复杂的几何性质和水文地质特征, 其解通常由数值方法求解控制方程得到. 另一方面, 解析解不仅可以用来帮助理解这些问题的基本规律和特征, 而且更多地可作为验证数值解精度的范例.

对于初始条件为干的、非承压含水层中的一维水流而言, 经典的 Boussinesq 方程写为

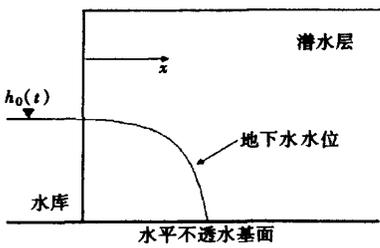
$$\theta_s \frac{\partial h}{\partial t} = K_s \frac{\partial}{\partial x} \left(h \frac{\partial h}{\partial x} \right), \quad \text{当 } x > 0, t > 0, \quad (1)$$

式中 θ_s 为孔隙率, K_s 为饱和土水力传导系数, h 为水平不透水层以上的地下水水位(即水头), t 为时间, x 为距离(见图 1).

* 收稿日期: 2006-10-30; 修订日期: 2007-03-05

基金项目: 国家自然科学基金资助项目(50425926)

作者简介: 宋志尧(1964—), 男, 浙江余姚人, 责任教授, 博士, 从事水动力学理论及工程应用研究(联系人.Tel: + 86-25-83787349; Fax: + 86-25-83701905; E-mail: zhiyaosong@vip.sohu.com).

图1 物理问题示意图^[1]

对本文讨论的问题,入口 ($x = 0$) 处的边界条件为

$$h(0, t) = h_0(t) = \alpha^\sigma, \quad t > 0, \quad (2)$$

其中 α 是常数, 物理上的取值范围为 $-1/3 < \alpha < \infty$; $\sigma > 0$ 是入口水头随时间幂函数的变化率. 特别地, 当 $\alpha = 0$ 时, σ 表明边界及沿程水头保持常量.

另一边界条件为

$$h(x \rightarrow \infty, t) = 0, \quad t > 0. \quad (3)$$

初始条件为

$$h(x, 0) = 0, \quad x > 0. \quad (4)$$

对于 $\alpha > 0$ (即边界水头变化随时间而增长), 其解有直接的物理意义; 除了当 $\alpha = -1/3$ 时对应因重力作用使水流进入多孔介质后引起的地下水锥的下降速率(也就是在 $x = 0$ 处渗入的有限水量被重新分配)外, $\alpha < 0$ 的物理涵义尚不清楚. 当 α 的值小于 $-1/3$ 时, 其解不是单调的, 所以限于目前的知识水平, 这些解在物理上是不可接受的^[1].

为了得到 Boussinesq 方程 (1) 在给定条件 (2) 下的精确解, 基于无因次函数 (H 称为尺度函数) 和变量 (ξ) 可进行一个相似变换:

$$h = \alpha^\sigma H(\xi) \text{ 和 } \xi = x \sqrt{\frac{2\theta_s(\alpha+1)}{\alpha K_s t^{\alpha+1}}}. \quad (5)$$

变换后方程 (1) 简化为一个关于未知函数 $H(\xi)$ 的常微分方程

$$\frac{d^2 H^2}{d\xi^2} + \frac{\xi}{2} \frac{dH}{d\xi} - \lambda H = 0, \quad (6)$$

式中 $\lambda = \alpha/(1+\alpha)$, 其变化范围是 $-1/2$ 和 1 . 相应的边界条件为

$$H(0) = 1, \quad (7)$$

$$H(\xi \rightarrow \infty) = 0. \quad (8)$$

从 Boussinesq 方程的非线性特性知水位是以有限速度传播的, 所以存在明确的浸润锋面, 其前锋位置通过 ξ_0 来表示, 这样条件 (8) 式就可以被变换为

$$H(\xi_0) = 0. \quad (9)$$

对于边界条件 (7) 和 (9) 下 Boussinesq 方程 (6) 的自相似解析解的问题, 1952 年 Barenblatt^[2-3] 得到了一个幂级数解, 但他并没有给出其系数间的递推关系式, 他的研究工作也没有给出该级数解收敛性的证明. 因此学者们^[1,4-6] 仍努力寻求近似的解析解以便实际应用. 本文通过幂级数展开的方法来推求该幂级数解各系数间的递推公式, 并证明了该级数解的收敛性. 这些结果易于理解并便于被工程技术人员实际应用.

1 递推公式

既然边界条件 (7) 和 (9) 下的方程 (6) 是一个二阶非线性常微分方程, 那么依 Barenblatt^[2-3] 的思路, 就可以通过幂级数展开的方法去求解这个方程. 为此, 我们以无限幂级数的形式构造了一个关于 $(1 - \xi/\xi_0)$ 的一般级数解, 即

$$H(\xi) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \left(1 - \frac{\xi}{\xi_0}\right)^n. \quad (10)$$

依边界条件 (7) 和 (9) 有

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n = 1, \quad (11)$$

$$a_0 = 0. \quad (12)$$

将(10)式代入(6)式后,对每一个 a_n ($n = 0, 1, 2, \dots$),可以得到下列关系:

$$\frac{(n+1)(n+2)}{\xi_0^2} \sum_{k=0}^{n+2} a_k a_{n+2-k} - \left[\frac{n+1}{2} \right] a_{n+1} + \left[\frac{n}{2} - \lambda \right] a_n = 0. \quad (13)$$

当 $n = 0$ 时,由(12)式可知

$$4a_1^2/\xi_0^2 - a_1 = 0. \quad (14)$$

(14)式有两个根,其中 $a_1 = 0$ 没有物理意义,因而只有

$$a_1 = \xi_0^2/4. \quad (15)$$

由此,我们可以把(13)式改写为一个显式递推公式来计算 a_n ($n > 1$),

$$a_n = -\frac{2(n+1)}{n\xi_0^2} \sum_{k=2}^{n-1} a_k a_{n+1-k} + \frac{(2\lambda+1-n)}{n^2} a_{n-1}. \quad (16)$$

为便于应用,我们将 a_2 至 a_9 分列如下:

$$a_2 = (2\lambda-1)\xi_0^2/16, \quad (17)$$

$$a_3 = -(4\lambda^2-1)\xi_0^2/288, \quad (18)$$

$$a_4 = (4\lambda-1)(4\lambda^2-1)\xi_0^2/2304, \quad (19)$$

$$a_5 = -(352\lambda^2-162\lambda+11)(4\lambda^2-1)\xi_0^2/345600, \quad (20)$$

$$a_6 = (2696\lambda^3-1788\lambda^2+250\lambda+9)(4\lambda^2-1)\xi_0^2/4147200, \quad (21)$$

$$a_7 = -(533024\lambda^4-461424\lambda^3+101276\lambda^2+2676\lambda-1573)(4\lambda^2-1)\xi_0^2/1219276800, \quad (22)$$

$$a_8 = (41609792\lambda^5-44482144\lambda^4+101276\lambda^3-114100\lambda^2-432712\lambda+34139)(4\lambda^2-1)\xi_0^2/136559001600, \quad (23)$$

$$a_9 = -(24116469888\lambda^6-30710277696\lambda^5+12156118464\lambda^4-6890904264\lambda^3-534362892\lambda^2+92021622\lambda-2533923)(4\lambda^2-1)\xi_0^2/110612791296000. \quad (24)$$

最后,浸润锋面线的位置 ξ_0 可由下式确定:

$$\xi_0 = \left[\sum_{n=0}^{\infty} a_n^* \right]^{-1/2}, \quad (25)$$

式中

$$a_n^* = a_n/\xi_0^2. \quad (26)$$

2 收敛性证明

本节我们通过证明系数 a_n^* ($n > 2$) 在 $-1/2 \leq \lambda \leq 1$ 内,满足不等式(27)来证明此级数解(10)的收敛性.

$$|a_n^*| \leq \frac{1}{10n^2}. \quad (27)$$

首先,当 $n = 3$ 时,由(18)和(26)式,下述不等式成立:

$$|a_3^*| = |4\lambda^2-1|/288 < 1/96 < 1/90.$$

其次,假设(27)式当 $n = m-1$ 时成立,我们只要证明(27)式当 $n = m$ 也成立即可.

为此, (16) 式可改写为

$$a_n^* = - \frac{2(n+1)}{n} \sum_{k=3}^{n-2} a_k^* a_{n+1-k}^* + \frac{(1-2\lambda)(n^2+n-4) - 4(n-2)}{4n^2} a_{n-1}^*. \quad (28)$$

这样

$$\begin{aligned} |a_m^*| &\leq \frac{2(m+1)}{m} \sum_{k=3}^{m-2} |a_k^*| |a_{m+1-k}^*| + \\ &\quad \left| \frac{1-2\lambda}{4m^2} (m^2+m-4) - \frac{4(m-2)}{4m^2} \right| |a_{m-1}^*| \leq \\ &\quad \frac{m+1}{50m} \sum_{k=3}^{m-2} \frac{1}{k^2(m+1-k)^2} + \frac{m^2+3m-8}{2m^2} \frac{1}{10(m-1)^2} \leq \\ &\quad \frac{m+1}{50m} \sum_{k=3}^{m-2} \left[\frac{1}{k^2} + \frac{1}{(m+1-k)^2} \right] \frac{1}{(m+1-k)^2 + k^2} + \\ &\quad \frac{m^2+3m-8}{2(m-1)^2} \left[\frac{1}{10m^2} \right] \leq \\ &\quad \left[\frac{16m(m-4)}{25(2m-3)(m+1)} + \frac{m^2+3m-8}{2(m-1)^2} \right] \left[\frac{1}{10m^2} \right]. \end{aligned} \quad (29)$$

在不等式(29)中, 我们应用了以下2个不等式:

$$(m+1-k)^2 + k^2 \geq 0.5(m+1)^2, \quad (30)$$

$$\begin{aligned} \sum_{k=3}^{m-2} \frac{1}{k^2} &\leq \sum_{k=3}^{m-2} \frac{1}{(k+0.5)(k-0.5)} = \sum_{k=3}^{m-2} \left(\frac{1}{k-0.5} - \frac{1}{k+0.5} \right) = \\ &\quad \frac{2}{5} - \frac{2}{2m-3} \end{aligned} \quad (31)$$

其中不等式(31)同样适用于 $\sum_{k=3}^{m-2} \frac{1}{(m+1-k)^2}$.

由(29)式, 我们可以看到, 当 $m \geq 8$ 时, 显然有

$$|a_m^*| \leq \frac{1}{10m^2}. \quad (32)$$

当 $3 < m < 8$ 时, 我们可以通过计算每一个 a_m^* 来证明(32)式仍成立. 因此, 当 $n > 2$ 时, 不等式(27)成立, 由此幂级数解(10)在 $-1/2 \leq \lambda \leq 1$ 内的收敛性得到证明.

3 应用

3.1 特例

作为特例, 已有几个解析解存在. 当 $\lambda = \pm 1/2$ 时, Barenblatt 等人^[2-3]得到了如下两个精确解

$$H(\xi) = 1 - \xi/2, \quad 0 \leq \xi \leq 2, \lambda = 1/2, \quad (33)$$

$$H(\xi) = 1 - \xi^2/8, \quad 0 \leq \xi \leq 2\sqrt{2}, \lambda = -1/2. \quad (34)$$

显然, $\lambda = \pm 1/2$ 时由通解(10)可分别推得上述两个解(33)和(34).

3.2 平方近似

在通解(10)中取前两项, 结合(15)、(17)和(25)式得到 ξ_0 , 即

$$\xi_0 \approx 4\sqrt{2\lambda+3}. \quad (35)$$

这样得到的平方近似解为

$$H_q(\xi) = \frac{\xi_0^2}{4} \left(1 - \frac{\xi}{\xi_0} \right) + \frac{\xi_0^2(2\lambda - 1)}{16} \left(1 - \frac{\xi}{\xi_0} \right)^2. \quad (36)$$

由(35)式将 $\lambda = 8/\xi_0^2 - 1.5$ 代入(36)式,可以得到 Lockington 等人^[1]的解.

3.3 立方近似

同样在通解(10)中取前3项,我们可以得到关于 ξ_0 和 $H_c(\xi)$ 的表达式

$$\xi_0 \approx 12\sqrt{2}/\sqrt{55 + 36\lambda - 4\lambda^2}, \quad (37)$$

$$H_c(\xi) = \frac{\xi_0^2}{4} \left(1 - \frac{\xi}{\xi_0} \right) + \frac{\xi_0^2(2\lambda - 1)}{16} \left(1 - \frac{\xi}{\xi_0} \right)^2 - \frac{\xi_0^2(4\lambda^2 - 1)}{288} \left(1 - \frac{\xi}{\xi_0} \right)^3. \quad (38)$$

这个立方近似解比文献[6]得到的要简单些,因为他们的解需要求解一元四次方程去确定锋面线的位置 ξ_0 .

3.4 高阶近似

依次可以方便地得到四阶、五阶以上的近似解. 以六阶近似解为例,对 ξ_0 有

$$\xi_0 \approx \frac{1440\sqrt{2}}{\sqrt{1036800 + 259200(2\lambda - 1) + (2696\lambda^3 - 6012\lambda^2 + 9394\lambda - 16323)(4\lambda^2 - 1)}}. \quad (39)$$

一般地,在实际应用时,根据近似阶数及精度需要,我们可以应用(16)式计算各项的系数,然后再通过(25)式确定 ξ_0 .

通过本文各阶近似解和已有近似解、数值解的比较,我们发现应用前9项近似,其结果与数值解(精确解)一致,而数值解需通过标准的四阶到五阶 Runge-Kutta-Fehlberg 方法和自适应步长控制技术得到^[6].

比较研究表明,当表示为无穷级数时,本文解(10)就是方程(6)的精确解,而有限近似时,本文解的精度比以前同阶近似解要高.

4 结 论

基于幂级数展开的方法,为描述在水头边界条件随时间幂函数变化,初始条件为干的、非承压含水层中的地下水流动,我们给出了 Boussinesq 方程 Barenblatt 幂级数解的系数递推公式,并且证明了级数解的收敛性.

获得了显式不同的有限近似解,根据精度要求方便实际应用. 本文解析解有助于我们理解地下水运动的特性,如锋面线的运动等;另一方面,研究成果也容易理解而且便于工程技术人员应用到流域水文学和基流的研究及农业排水问题的解决.

致谢 作者真诚感谢 A. R. Kacimov 教授对本文提出的宝贵意见和建议. 第一作者感谢澳大利亚昆士兰大学工程学院对他本人自2004年4月长达一年的合作研究提供资助和帮助. 本研究得到国家自然科学基金(50425926)的资助.

[参 考 文 献]

- [1] Lockington D A, Parlange J Y, Parlange M B, et al. Similarity solution of the Boussinesq equation [J]. *Advances in Water Resource*, 2000, 23(7): 725-729.
- [2] Barenblatt G I. On some unsteady fluid and gas motions in a porous medium[J]. *J Appl Math Mech*, 1952, 16(1): 67-78.
- [3] Barenblatt G I, Entov V M, Ryzhik V M. *Theory of Fluid Flows Through Natural Rocks* [M]. Dor-

- drecht: Kluwer Academic Publishers, 1990.
- [4] Chen Z H, Bodvarsson G S, Witherspoon P A, et al. An integral equation formulation for the unconfined flow of groundwater with variable inlet conditions[J]. *Trans Porous Media*, 1995, **18**(1): 15-36.
- [5] Tolikas P K, Sidiropoulos E G, Tzimopoulos C D. A simple analytical solution for the Boussinesq one-dimensional groundwater flow equation[J]. *Water Resources Res*, 1984, **20**(1): 24-28.
- [6] Telyakovskiy A S, Braga G A, Furtado F. Approximate similarity solution to the Boussinesq equation [J]. *Advances in Water Resource*, 2002, **25**(2): 191-194.

Note on the Barenblatt Power Series Solution to the Boussinesq Equation

SONG Zhi-yao^{1,2,4}, LI Ling^{2,3}, David Lockington³

(1. State Key Laboratory of Hydrology-Water Resources and Hydraulic Engineering, Ocean College, Hohai University, Nanjing 210098, P. R. China;

2. Center for Eco-Environmental Modelling, Hohai University, Nanjing 210098, P. R. China;

3. School of Engineering, The University of Queensland, Qld 4072, Australia;

4. Key Laboratory of Virtual Geographic Environment (Ministry of Education), Nanjing Normal University, Nanjing 210097, P. R. China)

Abstract: A self-similar analytical solution of the Boussinesq equation of groundwater flow in a semi-infinite porous medium when the hydraulic head at the boundary behaves like a power of time was presented (Barenblatt (1952) obtained a power series solution, but he listed only the first three coefficients and did not give the recurrent formula among the coefficients. A formal proof of convergence of the series did not appear). The recurrent formula for the coefficients was obtained using the method of power series expansion, and the convergence of the series was proven. The results can be easily understood and used by engineers in catchment hydrology and baseflow studies as well as agricultural drainage problems.

Key words: power series expansion; similarity solution; recurrent formula; convergence