

线性分布载荷作用下功能梯度各向异性悬臂梁的解析解*

黄德进^{1,2}, 皓江¹, 陈伟球¹

(1. 浙江大学 土木系, 杭州 310027;
2. 宁波大学 工学院, 浙江 宁波 315211)

(本刊编委—皓江来稿)

摘要: 对功能梯度各向异性弹性悬臂梁在线性分布载荷作用下的弯曲问题进行了研究. 从平面应力问题的基本方程出发, 假定应力函数为梁长度方向的多项式形式, 由应力函数求导给出应力, 利用协调方程和边界条件可完全确定应力函数. 将解析解与有限元数值方法的结果进行了对比, 两者吻合良好.

关键词: 功能梯度; 平面应力问题; 应力函数; 线性分布载荷; 解析解
中图分类号: O343.1 文献标识码: A

引 言

功能梯度材料是材料组分在空间某个方向上呈连续可控制变化的一种材料, 因此可通过调节这些复合材料中材料参数随空间的变化规律来优化材料中的应力场. 目前, 功能梯度材料被越来越广泛地应用, 受到了学术界的关注, 涌现了大量的研究论文. 下面对于功能梯度梁的研究情况简述一下.

Sankar^[1]研究了功能梯度正交各向异性简支梁在任意法向载荷作用下的问题, 他假设所有的弹性系数都与 $e^{\lambda z}$ 成正比, 其中 λ 是常数, z 是梁高度方向的坐标; Sankar 和 Tzeng^[2] 研究了正交各向异性简支梁的热应力问题, 假设所有弹性系数与 $e^{\lambda z}$ 成正比, 热模量与 $e^{\lambda z}$ 成正比, 而温度增量被假定与 $e^{\lambda z} \sin \xi z$ 成正比, 在这些条件下, 这两个问题都有精确解. 同样对于正交各向异性简支梁在任意法向载荷作用下的问题, Zhu 和 Sankar^[3] 放弃了弹性常数与 $e^{\lambda z}$ 成正比的假定, 而改为与 z 的一个多项式成正比, 便不再能用 Fourier 级数展开方法来求得精确解, 而改用 Galerkin 方法求近似解. 如果简支梁是各向异性情形, 上述求精确解的方法, 即使对于均匀梁也失效. Lekhnitskii^[4] 采用试凑的方法, 对于功能梯度正交各向异性悬臂梁在端部作用横向力和力偶的问题进行了研究, 他只假设弹性常数是梁高方向坐标的函数, 在函数形式上没有任何限制, 所给出的应力表达式仍然十分简洁有用. 本文研究了功能梯度各向异性悬臂梁在线性分布载荷作用下的解析解, 其材料的弹性柔度系数是梁高度坐标的函数, 其变化没有任何

* 收稿日期: 2006-10-26; 修订日期: 2007-04-24

基金项目: 国家自然科学基金资助项目(10472102, 10432030)

作者简介: 黄德进(1968—), 男, 浙江宁波人, 博士(联系人, E-mail: huangdejin@nbu.edu.cn);

丁皓江(1934—), 男, 江苏常州人, 教授, 博导(Tel: + 86-571-87993057; Fax: + 86-571-87952165; E-mail: dinghj@zju.edu.cn).

限制, 该解析解可退化到均匀梁的解.

1 基本方程

平面应力问题的基本方程包括平衡方程, 应变和位移关系以及应力应变关系, 即

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} = 0, \quad (1)$$

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x}, \quad \varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \gamma_{xy} = \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}, \quad (2)$$

$$\begin{cases} \varepsilon_x = s_{11}\sigma_x + s_{12}\sigma_y + s_{16}\tau_{xy}, & \varepsilon_y = s_{12}\sigma_x + s_{22}\sigma_y + s_{26}\tau_{xy}, \\ \gamma_{xy} = s_{16}\sigma_x + s_{26}\sigma_y + s_{66}\tau_{xy}, \end{cases} \quad (3)$$

式中 σ_x 、 σ_y 和 τ_{xy} 是应力分量, ε_x 、 ε_y 和 γ_{xy} 是应变分量, u 和 v 是位移分量, 对于功能梯度材料, 弹性柔度系数是坐标 y 的函数, 即 $s_{ij} = s_{ij}(y)$, $i, j = 1, 2, 6$.

由式(2)可以导出应变协调方程

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 \gamma_{xy}}{\partial x \partial y} = 0. \quad (4)$$

2 解析解

图1所示的悬臂梁, 跨度为 l , 高为 h , 单位宽度, 受到线性分布载荷 q 作用, 取坐标系如图, 边界条件为:

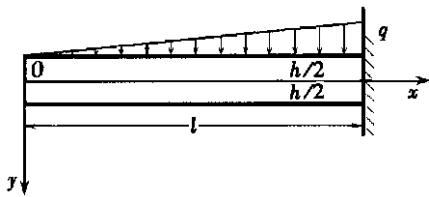


图1 悬臂梁, 坐标系和载荷

$$\sigma_y = -q_0 x/l, \quad \tau_{xy} = 0 \quad (\text{在 } y = -h/2), \quad (5)$$

$$\sigma_y = 0, \quad \tau_{xy} = 0 \quad (\text{在 } y = h/2), \quad (6)$$

$$\begin{aligned} N_0 = 0, \quad M_0 = 0, \quad Q_0 = 0 \\ (\text{在 } x = 0), \end{aligned} \quad (7a, b, c)$$

$$\begin{aligned} u = v = 0, \quad \partial v / \partial x = 0 \text{ 或 } \partial u / \partial y = 0 \\ (\text{在 } y = 0, x = l \text{ 点}), \end{aligned} \quad (8)$$

式中 q_0 为线性分布载荷的最大载荷集度. N_0 、 M_0 和 Q_0

分别为 $x = 0$ 处的轴力, 弯矩和剪力.

应力分量可用应力函数 ϕ 表示为:

$$\sigma_x = \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2}, \quad \sigma_y = \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2}, \quad \tau_{xy} = -\frac{\partial^2 \phi}{\partial x \partial y}. \quad (9)$$

这样方程组(1)都得到满足. 进一步可设应力函数 ϕ 具有如下形式

$$\phi = \phi_0(y) + x\phi_1(y) + x^2\phi_2(y) + x^3\phi_3(y), \quad (10)$$

式中 ϕ_0 、 ϕ_1 、 ϕ_2 和 ϕ_3 为待定函数. 将式(10)代入式(9)得

$$\begin{cases} \sigma_x = \phi_0'' + x\phi_1'' + x^2\phi_2'' + x^3\phi_3'', & \sigma_y = 2\phi_2 + 6x\phi_3, \\ \tau_{xy} = -(\phi_1' + 2x\phi_2' + 3x^2\phi_3'), \end{cases} \quad (11)$$

式中撇号为对 y 求导. 从式(11)可以看到, ϕ_0 中的线性项和 ϕ_1 中的常数项对应应力没有影响, 可以忽略.

将式(11)代入式(5)和式(6)可得

$$\phi_1(-h/2) = 0, \quad \phi_1(h/2) = 0, \quad (12a)$$

$$\phi_2(-h/2) = 0, \quad \phi_2'(h/2) = 0, \quad (12b)$$

$$\phi_2(h/2) = 0, \quad \phi_2'(h/2) = 0, \quad (12c)$$

$$\phi_3(-h/2) = -q_0/(6l), \quad \phi_3'(h/2) = 0, \quad (12d)$$

$$\phi_3(h/2) = 0, \quad \phi_3'(h/2) = 0. \tag{12e}$$

按式(11)可得梁 $x = 0$ 处的轴力, 弯矩和剪力公式

$$N_0 = \int_{-h/2}^{h/2} \alpha_x(0, y) dy = \phi_0'\left(\frac{h}{2}\right) - \phi_0'\left(-\frac{h}{2}\right), \tag{13a}$$

$$M_0 = \int_{-h/2}^{h/2} \alpha_x(0, y) y dy = (h/2)[\phi_0'(h/2) + \phi_0'(-h/2)] - \phi_0(h/2) + \phi_0(-h/2), \tag{13b}$$

$$Q_0 = \int_{-h/2}^{h/2} \tau_{xy}(0, y) dy = \phi_1\left(-\frac{h}{2}\right) - \phi_1\left(\frac{h}{2}\right). \tag{13c}$$

将式(11)代入式(3)后再代入式(4)可得如下方程组

$$(s_{11}\phi_3)'' = 0, \quad (s_{11}\phi_2 - 3s_{16}\phi_3)'' - 3(s_{16}\phi_3)' = 0, \tag{14a, b}$$

$$(s_{11}\phi_1 - 2s_{16}\phi_2 + 6s_{12}\phi_3)'' - (2s_{16}\phi_2 - 6s_{66}\phi_3)' + 6s_{12}\phi_3 = 0, \tag{14c}$$

$$(s_{11}\phi_0 - s_{16}\phi_1 + 2s_{12}\phi_2)'' - (s_{16}\phi_1 - 2s_{66}\phi_2 + 6s_{26}\phi_3)' + 2s_{12}\phi_2 - 6s_{26}\phi_3 = 0. \tag{14d}$$

由式(14a)和式(12d), 可得

$$\phi_3 = a_1 A_1 + a_2 A_2, \tag{15}$$

$$\phi_3' = a_1 A_1^0 + a_2 A_2^0, \tag{16}$$

$$\phi_3 = a_1 A_1^1 + a_2 A_2^1 - q_0/(6l), \tag{17}$$

式中和下文中 $a_i (i = 1, 2, \dots, 8)$ 为积分常数, a_1 和 a_2 可由式(16)和式(17)代入式(12e)得到, 以及

$$A_1 = \frac{y}{s_{11}}, \quad A_2 = \frac{1}{s_{11}}, \quad X_i^0 = \int_{-h/2}^y X_i(\xi) d\xi, \quad X_i^1 = \int_{-h/2}^y X_i^0(\xi) d\xi \quad (X = A, B, C, D),$$

将式(15)和式(16)代入式(14b), 再积分整理后并利用式(12b), 可得

$$\phi_2'' = \sum_{i=1}^4 a_i B_i, \tag{18}$$

$$\phi_2' = \sum_{i=1}^4 a_i B_i^0, \tag{19}$$

$$\phi_2 = \sum_{i=1}^4 a_i B_i^1, \tag{20}$$

式中 a_3 和 a_4 可以利用式(19)和式(20)代入式(12c)得到, 以及

$$B_1 = \frac{3s_{16}}{s_{11}} A_1^0 + \frac{3}{s_{11}} \int_{-h/2}^y s_{16} A_1 d\xi$$

$$B_2 = \frac{3s_{16}}{s_{11}} A_2^0 + \frac{3}{s_{11}} \int_{-h/2}^y s_{16} A_2 d\xi, \quad B_3 = A_1, \quad B_4 = A_2.$$

将式(15)式至(19)代入式(14c), 再积分整理后并利用式(12a)的第1式可得

$$\phi_1'' = \sum_{i=1}^6 a_i C_i + \frac{s_{12}}{s_{11}} \frac{q}{l}, \tag{21}$$

$$\phi_1' = \sum_{i=1}^6 a_i C_i^0 + \int_{-h/2}^y \frac{s_{12}}{s_{11}} \frac{q}{l} d\xi \tag{22}$$

$$\phi_1 = \sum_{i=1}^6 a_i C_i^1 + \int_{-h/2}^y \frac{s_{12}q}{s_{11}l} (y - \xi) d\xi \tag{23}$$

式中忽略了 ϕ_1 中的常数项, 以及

$$C_1 = \frac{2s_{16}}{s_{11}} B_1^0 - \frac{6s_{12}}{s_{11}} A_1^1 + \frac{1}{s_{11}} \int_{-h/2}^y [2s_{16}B_1 - 6s_{66}A_1^0 - 6s_{12}A_1(y - \xi)] d\xi,$$

$$C_2 = \frac{2s_{16}}{s_{11}}B_2^0 - \frac{6s_{12}}{s_{11}}A_2^1 + \frac{1}{s_{11}}\int_{-h/2}^y [2s_{16}B_2 - 6s_{66}A_2^0 - 6s_{12}A_2(y - \xi)] d\xi,$$

$$C_3 = \frac{2s_{16}}{s_{11}}B_3^0 + \frac{2}{s_{11}}\int_{-h/2}^y s_{16}B_3 d\xi \quad C_4 = \frac{2s_{16}}{s_{11}}B_4^0 + \frac{2}{s_{11}}\int_{-h/2}^y s_{16}B_4 d\xi \quad C_5 = A_1, \quad C_6 = A_2.$$

由式(22)和式(12a)的第2式, 以及式(13c)和式(23)并利用 $\phi_1(-h/2) = 0$ 可得

$$\sum_{i=1}^6 a_i C_i^0 \left[\frac{h}{2} \right] + \int_{-h/2}^{h/2} \frac{s_{12}}{s_{11}} \frac{q}{l} d\xi = 0, \quad (24)$$

$$\sum_{i=1}^6 a_i C_i^1 \left[\frac{h}{2} \right] + \int_{-h/2}^{h/2} \frac{s_{12}}{s_{11}} \frac{q}{l} \left[\frac{h}{2} - \xi \right] d\xi = 0, \quad (25)$$

由式(24)和式(25)可解得 a_5 和 a_6 . 将式(16)至式(22)代入式(14d), 再积分整理后, 可得

$$\phi_0'' = \sum_{i=1}^8 a_i D_i + D_9, \quad (26)$$

$$\phi_0' = \sum_{i=1}^8 a_i D_i^0 + D_9^0, \quad (27)$$

$$\phi_0 = \sum_{i=1}^8 a_i D_i^1 + D_9^1. \quad (28)$$

式中忽略了 ϕ_0 中的线性项和常数项, 以及

$$D_1 = -\frac{2s_{12}}{s_{11}}B_1^1 + \frac{s_{16}}{s_{11}}C_1^0 + \frac{1}{s_{11}}\int_{-h/2}^y [6s_{26}A_1^1 - 2s_{66}B_1^0 + s_{16}C_1 + (6s_{26}A_1^0 - 2s_{12}B_1)(y - \xi)] d\xi$$

$$D_2 = -\frac{2s_{12}}{s_{11}}B_2^1 + \frac{s_{16}}{s_{11}}C_2^0 + \frac{1}{s_{11}}\int_{-h/2}^y [6s_{26}A_2^1 - 2s_{66}B_2^0 + s_{16}C_2 + (6s_{26}A_2^0 - 2s_{12}B_2)(y - \xi)] d\xi$$

$$D_3 = -\frac{2s_{12}}{s_{11}}B_3^1 + \frac{s_{16}}{s_{11}}C_3^0 + \frac{1}{s_{11}}\int_{-h/2}^y [s_{16}C_3 - 2s_{66}B_3^0 - 2s_{12}B_3(y - \xi)] d\xi$$

$$D_4 = -\frac{2s_{12}}{s_{11}}B_4^1 + \frac{s_{16}}{s_{11}}C_4^0 + \frac{1}{s_{11}}\int_{-h/2}^y [s_{16}C_4 - 2s_{66}B_4^0 - 2s_{12}B_4(y - \xi)] d\xi$$

$$D_5 = \frac{s_{16}}{s_{11}}C_5^0 + \frac{1}{s_{11}}\int_{-h/2}^y s_{16}C_5 d\xi, \quad D_6 = \frac{s_{16}}{s_{11}}C_6^0 + \frac{1}{s_{11}}\int_{-h/2}^y s_{16}C_6 d\xi$$

$$D_7 = A_1, \quad D_8 = A_2, \quad D_9 = \frac{s_{16}}{s_{11}}\int_{-h/2}^y \frac{s_{12}}{s_{11}} \frac{q}{l} d\xi + \frac{1}{s_{11}}\int_{-h/2}^y \left[\frac{s_{12}s_{16}}{s_{11}} - s_{26} \right] \frac{q}{l} d\xi.$$

将式(13a)和式(13b)分别代入式(7a)和式(7b), 并利用 $\phi_0'(-h/2) = 0$ 和 $\phi_0(-h/2) = 0$ 可得

$$\sum_{i=1}^8 a_i D_i^0 \left[\frac{h}{2} \right] + D_9^0 \left[\frac{h}{2} \right] = 0, \quad (29)$$

$$\sum_{i=1}^8 a_i D_i^1 \left[\frac{h}{2} \right] + D_9^1 \left[\frac{h}{2} \right] = 0. \quad (30)$$

由式(29)和式(30)可得 a_7 和 a_8 , 这样应力函数中的所有系数 $a_1 \sim a_8$ 都已确定, 即式(11)中的应力都完全确定. 由式(3)积分可得

$$u = x(s_{11}\phi_0'' - s_{16}\phi_1' + 2s_{12}\phi_2) + \frac{1}{2}x^2(s_{11}\phi_1'' - 2s_{16}\phi_2' + 6s_{12}\phi_3) + \frac{1}{3}x^3(s_{11}\phi_2'' - 3s_{16}\phi_3') + \frac{1}{4}x^4 s_{11}\phi_3'' - \int_{-h/2}^y F(\xi) d\xi + \omega y + u_0, \quad (31)$$

$$v = \sum_{k=0}^3 x^k \int_{-h/2}^y s_{12}\phi_k'' d\xi - \frac{a_7}{2}x^2 - \frac{a_5}{6}x^3 - \frac{a_3}{12}x^4 - \frac{a_1}{20}x^5 +$$

$$\int_{-h/2}^y s_{22}(2\phi_2 + 6x\phi_3) - s_{26}(\phi_1 + 2x\phi_2 + 3x^2\phi_3) d\xi - \omega x + v_0, \quad (32)$$

式中 $F(y) = -s_{16}\phi_0'' + s_{66}\phi_0' - 2s_{26}\phi_2 + \int_{-h/2}^y (s_{12}\phi_1'' - 2s_{26}\phi_2' + 6s_{22}\phi_3) d\xi$
 常数 u_0, v_0 和 ω 可由固支端边界条件式(8) 来确定, 这样将 $\phi_0 \sim \phi_3$ 代入式(31) 和式(32) 即可得位移.

3 数值算例

在以上推导中, 对弹性柔度系数的变化形式没有加以限制, 因此解析解可以用来解决弹性柔度系数中的任意一个或几个是特定变化的梁问题. 下面举一个功能梯度正交各向异性悬臂梁受线性分布载荷作用的例子. 材料系数中 s_{11} 是 y 的指数函数, 即 $s_{11}(y) = s_{11}^0 e^{\lambda(y/h + 1/2)}$ (s_{11}^0 为 $y = -h/2$ 处的弹性柔度系数), 其它 $s_{ij} = s_{ij}^0$, 为恒定的材料参数. 梁的几何参数为: $l = 1\text{ m}$, $h = 0.1\text{ m}$, 单位宽度. 线性分布载荷的最大载荷集度 $q_0 = 1 \times 10^6\text{ N/m}$. 固支边界条件为, 在 $(x, y) = (0, l)$ 点, $u = v = 0, \partial v / \partial x = 0$.

表 1 材料常数

$s_{11}^0 / (\text{m}^2/\text{N})$	$s_{12}^0 / (\text{m}^2/\text{N})$	$s_{16}^0 / (\text{m}^2/\text{N})$	$s_{22}^0 / (\text{m}^2/\text{N})$	$s_{26}^0 / (\text{m}^2/\text{N})$	$s_{66}^0 / (\text{m}^2/\text{N})$
0.150 0E- 10	- 0.025 9E- 10	0	0.103 2E- 10	0	0.146 4E- 10

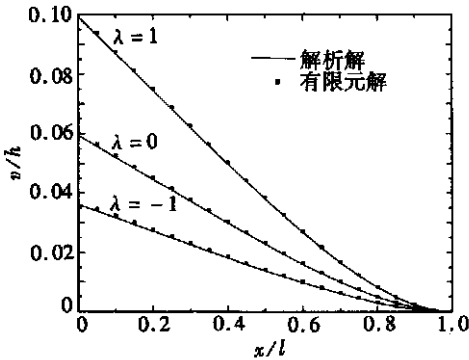


图 2 不同 λ 时, 梁的中心线挠度

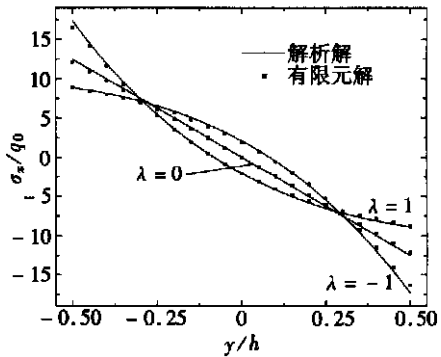


图 3 $x = 0.5l$ 截面上的无量纲应力 σ_x/q_0

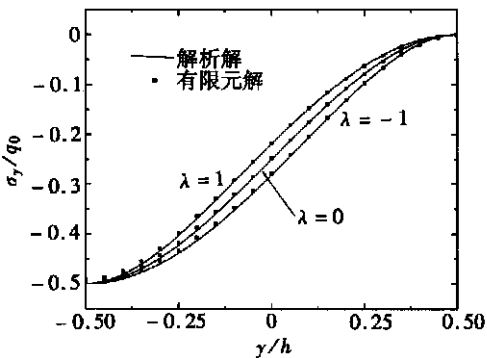


图 4 $x = 0.5l$ 截面上的无量纲应力 σ_y/q_0

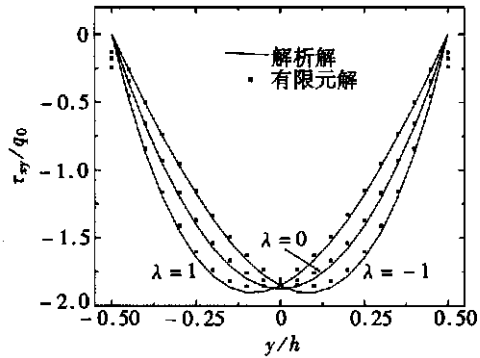


图 5 $x = 0.5l$ 截面上的无量纲应力 τ_{xy}/q_0

图 2 为 $y = 0$ 处各点位移 v 的情况(即梁的中心线挠度). 随着 λ 的增加, 各点位移也增加, 在 $x = 0, y = 0$ 处, $\lambda = 1$ 的梁的位移为 $v = 0.099 2h$, 而当 $\lambda = -1$ 时, $v = 0.036 17h$, 两者相差约 2.743 倍. 因此如果需要大刚度的梁则应取小的 λ 值, 反之则取大的 λ 值.

图 3、图 4 和图 5 分别为 $x = 0.5l$ 截面上不同值时无量纲应力 σ_x/q_0 、 σ_y/q_0 和 τ_{xy}/q_0 的分布。可以看出不同 λ 值对应力分布的影响。

我们也把所得的结果与有限元的计算结果进行了对比。应用 MSC. Nastran 有限元程序进行了数值计算, 采用的有限单元是 Quad4 四边形单元, 单元每个边长都是 0.005 m, 整个梁共计 4 000 个单元; 以单元的中心位置的材料参数作为整个单元的材料参数; 边界条件为: $x = l$, $-h/2 \leq y \leq h/2$ 处, $u = v = 0$; 在 $y = -h/2$ 边上施加一线性分布载荷 $q = q_0x/l$ 。并把结果一并画入图 2 至图 5 中。可以发现, 我们的计算结果与有限元的计算结果相当吻合。

4 结 论

利用式(10)形式的应力函数, 其中 ϕ_3 、 ϕ_2 、 ϕ_1 和 ϕ_0 分别如式(17)、式(20)、式(23) 和式(28) 所示, 它不仅解决了本文的悬臂梁弯曲问题, 还可以解决两端固支梁, 两端简支梁和一端固支另一端简支梁等在同样载荷下的弯曲问题。当应力函数含 x 的更高幂次时, 将可以用来求解更高幂次分布载荷的梁的弯曲问题。对一种特定的载荷, 本文所提供的方法将更为简单便利, 是对文献[5]的一点补充。

致谢 本文得到了宁波大学科研基金资助(200514), 特此感谢

[参 考 文 献]

- [1] Sankar B V. An elasticity solution for functionally graded beams[J]. Composites Science and Technology, 2001, **61**(5): 689-696.
- [2] Sankar B V, Tzeng J T. Thermal stresses in functionally graded beams[J]. AIAA J, 2002, **40**(6): 1228-1232.
- [3] Zhu H, Sankar B V. A combined Fourier-Galerkin method for the analysis of functionally graded beams[J]. Journal of Applied Mechanics, 2004, **71**(3): 421-424.
- [4] Lekhnitskii S G. Anisotropic Plate[M]. New York: Gordon and Breach, 1968.
- [5] Ding H J, Huang D J, Chen W Q. Elasticity solutions for plane anisotropic functionally graded beams [J]. International Journal of Solids and Structures, 2007, **44**(1): 176-196.

Analytical Solution for Functionally Graded Anisotropic Cantilever Beam Subjected to Linearly Distributed Load

HUANG De-jin^{1,2}, DING Hao-jiang¹, CHEN Wei-qiu¹

(1. Department of Civil Engineering, Zhejiang University,
Hangzhou 310027, P. R. China;

2. Faculty of Engineering, Ningbo University, Ningbo, Zhejiang 315211, P. R. China)

Abstract: The bending problem of a functionally graded anisotropic cantilever beam subjected to a linearly distributed load is investigated. The analysis was based on the exact elasticity equations for the plane stress problem. The stress function was introduced and assumed in form of a polynomial of the longitudinal coordinate. The expressions for stress components were then deduced from the stress function by simple differentiation. The stress function was determined from the compatibility equation as well as the boundary conditions by a skilful deduction. The analytical solution was compared with FEM calculation, indicating a good agreement.

Key words: functionally graded; plane stress problem; stress function; linearly distributed load; analytical solution