

# 激波管中动态相变的数值研究<sup>\*</sup>

王 平<sup>1</sup>, 唐少强<sup>2</sup>

(1. 大连理工大学 工程力学系 工业装备结构分析国家重点实验室, 大连 116024;

2. 北京大学 力学与工程科学系 湍流国家重点实验室, 北京 100871)

(黄永念推荐)

摘要: 用松弛模型研究了范德瓦流体中的激波管问题. 当松弛参数趋于 0 时模型存在一个确定的黎曼解. 在数值方面推导了松弛格式(relaxing)和完全松弛格式(relaxed). 在一维问题中, 对于不同的剖面, 数值模拟显示结果趋向于黎曼解. 在理论上和数值上研究了参数的影响. 对于特定的初始激波剖面, 观察到了非经典的反射波. 在二维问题中, 研究了曲面波前的数值演化, 得到一些有趣的波斑图.

关键词: 相变; 激波; 松弛

中图分类号: O414.13 文献标识码: A

## 引 言

上个世纪, 人们花了很大精力研究临界现象<sup>[1]</sup>. 然而, 大多数工作是研究静态相变, 比如重整化群理论. 相变系统的演化, 则存在不稳定性问题<sup>[2]</sup>. 在我们对动态相变的物理机制有更好的了解之前, 我们只能对这一问题进行唯象的研究, 以证实我们对非线性系统中非线性与耗散相互作用的理解. 这些工作对动态相变理论和相关物理系统的进一步研究也会起到一定的作用.

动态相变的控制方程为:

$$\rho_t + \operatorname{div}(\rho \mathbf{u}) = 0, (\rho \mathbf{u})_t + \operatorname{div}(\rho \mathbf{u} \otimes \mathbf{u}) + \operatorname{div} p = 0, \quad (1)$$

$\rho$  是密度,  $\mathbf{u}$  是速度,  $p$  是压力. 对于范德瓦流体, 压力方程为  $p(\rho) = 8\rho^2/(3-\rho) - 3\rho^2$ .

压力方程  $p(\rho)$  在亚临界温度下 ( $T < 1$ ) 是非单调的. 确切地说, 压力在区间  $\rho \in (0, \rho_1) \cup (\rho_2, 3)$  内随着密度的增大而增大, 在区间  $\rho \in (\rho_1, \rho_2)$  内随着密度的增大而减小. 在本文的数值模拟中, 我们取  $T = 0.9$ . 相应地我们有  $\rho_1 = 0.654234$  和  $\rho_2 = 1.391600$ . 线性稳定性分析表明系统(1)在区间  $\rho \in (\rho_1, \rho_2)$  是椭圆性的. 不稳定性使系统(1)的初值问题在理论上是不适定的, 在数值模拟中很快就会溢出<sup>[3]</sup>.

为了解决这一问题, 一个办法是把解限制在单调上升的区域, 也就是  $\rho \in (0, \rho_1) \cup (\rho_2,$

\* 收稿日期: 2006-11-20; 修订日期: 2007-04-23

基金项目: 国家重点基础研究专项基金项目“非线性科学”(G2000077305); 国家自然科学基金资助项目(10002002; 90407021)

作者简介: 王平(1976—), 男, 吉林辉南人, 讲师, 博士(联系人. Tel: + 86-414-84708408; E-mail: wangp@dlut.edu.cn).

3), 然后对间断用熵条件加以约束; 或者在系统中加上耗散机制, 比如质量粘性项和动量粘性项<sup>[4]</sup>、粘性和张力项<sup>[5]</sup>. 本文中我们应用从双曲守恒律中推导出的松弛模型<sup>[6]</sup>来解决混合类型问题(1). 实际上, 有很多使用低阶耗散解决相变问题的模型, 称为离散 BGK 模型<sup>[7-8]</sup>. 这些模型的线性和非线性稳定性分析表明, 低阶耗散确实可以使非线性系统稳定下来<sup>[9-10]</sup>.

本文的第 1 节和第 2 节描述松弛模型和数值方法, 第 3 节给出松弛模型的渐近解, 第 4 节和第 5 节是一维问题和二维问题的数值模拟, 最后是一些讨论.

## 1 松弛模型

对于一维守恒律方程  $u_t + g(u)_x = 0$ , 松弛模型如下:

$$f_t^+ + \chi_x^+ = \frac{1}{\varepsilon}(M^+ - f^+), \quad f_t^- - \chi_x^- = \frac{1}{\varepsilon}(M^- - f^-), \quad (2)$$

这里  $0 < \varepsilon \ll 1$  是松弛参数,  $\lambda$  是常数表示波速,  $M^\pm = u^\varepsilon/2 \pm g(u^\varepsilon)/(2\lambda)$  是局部麦克斯韦态. 我们用  $u^\varepsilon = f^+ + f^-$  来近似  $u$ . 可以看到, 当  $\varepsilon \rightarrow 0$  时,  $f^\pm$  趋向于局部麦克斯韦态  $M^\pm$ . 反过来, 用兼容性条件  $M^+ + M^- = u^\varepsilon$ ,  $\lambda(M^+ - M^-) = g(u^\varepsilon)$ , 我们可以把(2)式的两个方程进行求和, 得到  $u_t^\varepsilon + g(u^\varepsilon)_x \approx 0$ . 用 Chapman-Enskog 展式, 可以证明在零阶近似下, 系统(2)退化到初始系统  $u_t + g(u)_x = 0$ . 在一阶近似下, 当亚特征条件  $\lambda > \max |g'(u)|$  满足时, 我们可以得到正的粘性项.

对于系统(1), 一维松弛模型可以写成:

$$\begin{bmatrix} g_1^+ \\ g_1^- \\ g_2^+ \\ g_2^- \end{bmatrix}_t + \begin{bmatrix} \lambda & & & \\ & -\lambda & & \\ & & \lambda & \\ & & & -\lambda \end{bmatrix} \begin{bmatrix} g_1^+ \\ g_1^- \\ g_2^+ \\ g_2^- \end{bmatrix}_x = \frac{1}{\varepsilon} \left\{ \begin{bmatrix} N_1^+ \\ N_1^- \\ N_2^+ \\ N_2^- \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} g_1^+ \\ g_1^- \\ g_2^+ \\ g_2^- \end{bmatrix} \right\}, \quad (3)$$

这里  $\lambda$  是波速, 并且满足亚特征条件  $\lambda > \max |g'(u)|$ ,  $0 < \varepsilon \ll 1$  是松弛参数, 局部麦克斯韦态

$$N_1^\pm = \frac{\rho^\varepsilon}{2} \pm \frac{\rho^\varepsilon u^\varepsilon}{2\lambda}, \quad N_2^\pm = \frac{\rho^\varepsilon u^\varepsilon}{2} \pm \frac{\rho^\varepsilon (u^\varepsilon)^2 + p(\rho^\varepsilon)}{2\lambda}.$$

对  $g_1^\pm$  和  $g_2^\pm$  进行求和运算, 可以分别得到主要变量  $\rho^\varepsilon$  和  $\rho^\varepsilon u^\varepsilon$ .

对于向量形式的系统(1), 我们定义  $U = (\rho^\varepsilon, \rho^\varepsilon u^\varepsilon)^T$ ,  $F = (\rho^\varepsilon u^\varepsilon, p(\rho^\varepsilon) + \rho^\varepsilon (u^\varepsilon)^2)^T$ . 系统(3)等价于一个带有刚性源项的线性系统:

$$U_t + V_x = 0, \quad V_t + \lambda^2 U_x = -\frac{1}{\varepsilon}(V - F), \quad (4)$$

这里  $V$  是一个中间向量变量, 上述工作是由 Jin 和 Xin 首先做出的<sup>[6]</sup>.

我们把系统(3)写成:

$$\begin{bmatrix} a^+ \\ a^- \end{bmatrix}_t + \begin{bmatrix} M & \\ & -M \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a^+ \\ a^- \end{bmatrix}_x = \frac{1}{\varepsilon} \left\{ \begin{bmatrix} P^+ \\ P^- \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} a^+ \\ a^- \end{bmatrix} \right\}, \quad (3')$$

这里  $a^\pm$  是有两个分量的向量变量,  $I$  是二阶单位矩阵, 局部麦克斯韦态是

$$P^\pm = U/2 \pm F/(2\lambda).$$

上面的公式很容易扩展到高阶形式, 例如, 我们把二维情况的系统(1)写成向量形式  $U_t + A(U)_x + B(U)_y = 0$ , 这里  $U = [\rho, \rho u, \rho]^T$ . 则对应的松弛模型为:

$$\begin{cases} \mathbf{b}_{1t}^+ + \mathcal{M}_{1x}^+ = \frac{1}{\varepsilon}(\mathbf{Q}_1^+ - \mathbf{b}_1^+), & \mathbf{b}_{1t}^- + \mathcal{M}_{1x}^- = \frac{1}{\varepsilon}(\mathbf{Q}_1^- - \mathbf{b}_1^-), \\ \mathbf{b}_{2t}^+ + \omega \mathbf{b}_{2y}^+ = \frac{1}{\varepsilon}(\mathbf{Q}_2^+ - \mathbf{b}_2^+), & \mathbf{b}_{2t}^- + \omega \mathbf{b}_{2y}^- = \frac{1}{\varepsilon}(\mathbf{Q}_2^- - \mathbf{b}_2^-). \end{cases} \quad (5)$$

每个  $\mathbf{b}_i^\pm$  是有 3 个分量的向量,  $\lambda, \omega > 0$  是参数, 局部麦克斯韦态是

$$\mathbf{Q}_1^\pm = U^\varepsilon/4 \pm A(U^\varepsilon)/(2\lambda), \quad \mathbf{Q}_2^\pm = U^\varepsilon/4 \pm B(U^\varepsilon)/(2\omega).$$

现在初始变量近似为

$$U \approx U^\varepsilon = \mathbf{b}_1^+ + \mathbf{b}_1^- + \mathbf{b}_2^+ + \mathbf{b}_2^-.$$

我们可以看到公式(5)中的每一个方程都只和一个空间维度相关, 因此这个数值格式很易于程序编制.

## 2 数值格式

模型(3)是一个适定的半线性双曲系统, 我们把这个方程分解成一个波动方程加上一个松弛方程, 结果就称为松弛格式(relaxing scheme). 波动过程用带有 minmod 极限的标准二阶 MUSCL 方法求解. 此外, 为了在时间尺度上达到二阶精度, 我们让时间步长  $k \rightarrow 0$ . 空间步长取为等步长  $h$ , 对于一维问题(3)', 我们有

$$\begin{aligned} \frac{d a_i^+}{dt} &= \frac{1}{\varepsilon}(P_i^+ - a_i^+) + \frac{\lambda}{h}(a_{i-1}^+ - a_i^+) - \\ &(\mathcal{N}(2h))[\min \text{mod}(a_{i+1}^+ - a_i^+, a_i^+ - a_{i-1}^+) - \\ &\min \text{mod}(a_i^+ - a_{i-1}^+, a_{i-1}^+ - a_{i-2}^+)], \end{aligned} \quad (6a)$$

$$\begin{aligned} \frac{d a_i^-}{dt} &= \frac{1}{\varepsilon}(P_i^- - a_i^-) + \frac{\lambda}{h}(a_{i+1}^- - a_i^-) - \\ &(\mathcal{N}(2h))[\min \text{mod}(a_{i+2}^- - a_{i+1}^-, a_{i+1}^- - a_i^-) - \\ &\min \text{mod}(a_{i+1}^- - a_i^-, a_i^- - a_{i-1}^-)], \end{aligned} \quad (6b)$$

这里下标  $i$  指空间坐标. 二元函数 minmod 形式为:

$$\min \text{mod}(x, y) = \begin{cases} 0, & xy < 0, \\ \text{sign}(x) \min(|x|, |y|), & xy \geq 0. \end{cases}$$

常微分方程则用二阶 Runge-Kutta 方法进行求解.

在松弛过程中, 如果我们取极限  $\varepsilon \rightarrow 0$ , 松弛步骤就退化成一个映射, 这时的数值格式我们称为完全松弛格式(relaxed scheme). 这时直接用  $U$  作为变量, 计算时间和内存要求都会大大减少. 完全松弛格式为:

$$\begin{aligned} \frac{d U_i}{dt} &= \frac{\lambda}{h}(P_{i-1}^+ - P_i^+ + P_{i+1}^- - P_i^-) - \\ &(\mathcal{N}(2h))[\min \text{mod}(P_{i+1}^+ - P_i^+, P_i^+ - P_{i-1}^+) - \\ &\min \text{mod}(P_i^+ - P_{i-1}^+, P_{i-1}^+ - P_{i-2}^+) + \\ &\min \text{mod}(P_{i+2}^- - P_{i+1}^-, P_{i+1}^- - P_i^-) - \\ &\min \text{mod}(P_{i+1}^- - P_i^-, P_i^- - P_{i-1}^-)]. \end{aligned} \quad (7)$$

在完全松弛格式中, 只有一个参数  $\lambda$ . 它给出了(3)式的稳定解, 对于所有的算例, 我们都得到了和松弛格式(6)相同的结果, 但是间断处的间距则更小.

考虑(7)式的一个简化形式:

$$\frac{dU_i}{dt} = \frac{\lambda}{h} (P_{i-1}^+ - P_i^+ + P_{i+1}^- - P_i^-).$$

泰勒展式给出了一个修正方程

$$U_t + F_x = (1/2) \lambda U_{xx} + O(h^2). \quad (8)$$

数值粘性与参数  $\lambda$  和  $h$  相关. 准确地说, 粘性随着  $\lambda$  和  $h$  的增大而增大.

在二维问题当中, 时间步长取为  $k$ , 空间步长取为  $h_x$  和  $h_y$ . 令  $J = \lambda/h_x$ ,  $K = \lambda/h_y$ , 我们可以推导出一个相似的完全松弛格式

$$\begin{aligned} \frac{dU_{i,j}}{dt} = & \frac{\lambda}{h_x} (Q_{i-1,j}^+ - Q_{i,j}^+ + Q_{i+1,j}^- - Q_{i,j}^-) + \\ & \frac{\omega}{h_y} (Q_{i,j-1}^+ - Q_{i,j}^+ + Q_{i,j+1}^- - Q_{i,j}^-) - \\ & (N(2h_x)) [\min \text{mod}(Q_{i+1,j}^+ - Q_{i,j}^+, Q_{i,j}^+ - Q_{i-1,j}^+) - \\ & \min \text{mod}(Q_{i,j}^+ - Q_{i-1,j}^+, Q_{i-1,j}^+ - Q_{i-2,j}^+) + \\ & \min \text{mod}(Q_{i+2,j}^- - Q_{i+1,j}^-, Q_{i+1,j}^- - Q_{i,j}^-) - \\ & \min \text{mod}(Q_{i+1,j}^- - Q_{i,j}^-, Q_{i,j}^- - Q_{i-1,j}^-)] - \\ & (\omega/(2h_y)) [\min \text{mod}(Q_{i,j+1}^+ - Q_{i,j}^+, Q_{i,j}^+ - Q_{i,j-1}^+) - \\ & \min \text{mod}(Q_{i,j}^+ - Q_{i,j-1}^+, Q_{i,j-1}^+ - Q_{i,j-2}^+) + \\ & \min \text{mod}(Q_{i,j+2}^- - Q_{i,j+1}^-, Q_{i,j+1}^- - Q_{i,j}^-) - \\ & \min \text{mod}(Q_{i,j+1}^- - Q_{i,j}^-, Q_{i,j}^- - Q_{i,j-1}^-)], \end{aligned} \quad (9)$$

这里下标  $i$  和  $j$  分别表示空间坐标  $x$  和  $y$ .

### 3 一维问题中的黎曼解

当  $\varepsilon \rightarrow 0$  时, 松弛模型的渐近解实际上是基本波的黎曼解, 而基本波允许一个粘性剖面作为耗散系统的行波<sup>[3]</sup>, 行波相当于对应行波方程的异宿轨. 耗散系统只容许特定种类的异宿轨, 产生异宿轨的条件有很多种, 比如 Rankine-Hugoniot 条件, 熵条件, kinetic 条件等<sup>[7]</sup>.

本文考虑半无限长管道中激波与管壁的相互作用. 激波的两侧都处于气态(稳定区域)密度和速度都是常数, 用  $(\rho_l, u_l)$  和  $(\rho_r, u_r)$  表示. 当激波前进撞到墙壁以后, 有可能返回一个新的激波, 返回新的激波的情况是我们感兴趣的. 既然墙是固定面, 我们有  $u_r = 0$ . 假设新的激波连接这样 2 个状态  $(\rho_l, u_l)$  和  $(\rho^*, u^*)$ , 当然, 也有  $u^* = 0$ .

对于系统 (1), 一个激波要满足两个条件, Rankine-Hugoniot 条件和熵条件. Rankine-Hugoniot 条件的表达式是  $s[U] = [F]$ , 而熵条件的表达式是  $u_l + \sqrt{p'(\rho_l)} > s > u_r + \sqrt{p'(\rho_r)}$ , 这里  $s$  是激波速度,  $[ ]$  表示穿过激波的跳跃量. 由这两个激波的 Rankine-Hugoniot 条件我们可以得到

$$u_l = \sqrt{(\rho_r - \rho_l)[p(\rho_r) - p(\rho_l)]/(\rho_l \rho_r)} \quad (10)$$

和

$$\begin{aligned} \sqrt{(\rho^* - \rho_l)[p(\rho_r) - p(\rho_l)]/(\rho^* \rho_l)} = \\ \sqrt{(\rho_r - \rho_l)[p(\rho_r) - p(\rho_l)]/(\rho_r \rho_l)}. \end{aligned} \quad (11)$$

例如, 令  $\rho_l = 0.37$ ,  $\rho_r$  要小于  $\rho_l$  以保证  $s > 0$ . 由 Rankine-Hugoniot 条件, 可以知道当  $\rho_r \in (0.0, 0.25)$  时, 中间状态  $\rho^* \in (1.67, 3.0)$  是液态; 当  $\rho_r \in (0.26, 0.37)$ ,  $\rho^* \in (0.37, 0.65)$

保持在气态中. 在上面的情况中, 相变有可能会发生. 然而当  $\rho_r \in (0.19, 0.32)$  时, 熵条件阻止返回激波的形成. 所以, 只有当  $\rho_r \in (0.0, 0.19) \cup (0.32, 0.37)$  时, 我们才能得到返回激波.

此外, 在二维情况中, 我们计算了中间状态在亚稳态, 非均匀初始激波面的演化过程. 我们期望当扰动足够大时, 相变将会发生; 相反, 如果扰动不是足够大, 系统会保持在亚稳状态<sup>[4]</sup>.

## 4 一维数值模拟

我们固定一套参数来进行数值模拟, 研究不同的数值格式和方法之间的差别, 比如  $(\rho_l, \rho_r) = (0.37, 0.10)$ ,  $\lambda = 3$ ,  $h = 0.001$ ,  $k = 0.0001$ ,  $\varepsilon = 0.001$ . 图1显示了用松弛格式进行计算得到的密度演化过程, 间断表现为一个陡坡, 间断的宽度与数值粘性有关, 而数值粘性依赖于参数  $\lambda$ ,  $h$  和  $\varepsilon$ . 图2比较了松弛格式和完全松弛格式, 我们可以看到完全松弛格式有更小的间断宽度, 所以说完全松弛格式的数值结果更加近似于无粘黎曼解.

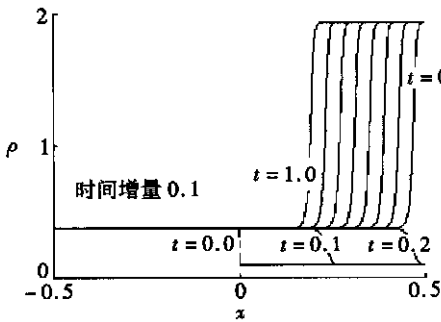


图1 松弛格式的密度演化

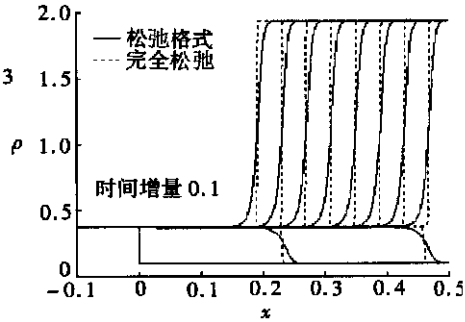


图2 松弛、完全松弛格式的密度演化比较

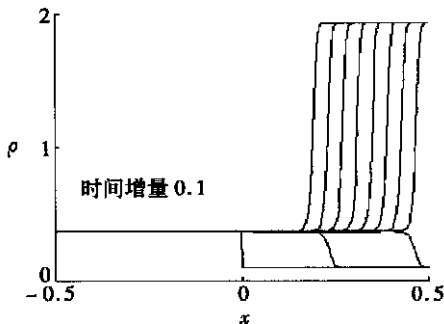


图3 拟谱方法的密度演化

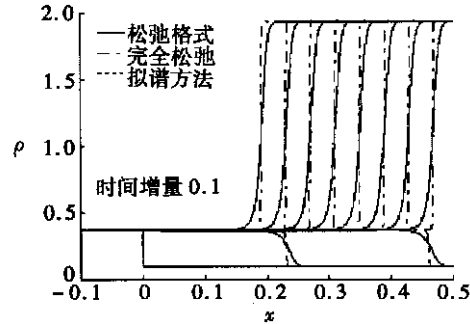


图4 3种方法密度演化的比较

为了进行比较, 我们用拟谱方法对这一问题重新进行了精确的计算<sup>[11]</sup>, 图3是密度演化的过程. 在图4里, 我们对3种方法进行了比较, 松弛格式的计算结果和拟谱方法的计算结果几乎完全一样, 这也说明了松弛格式和完全松弛格式算法的可信性.

既然完全松弛格式的计算结果粘性要小一些, 后面的算例我们都用完全松弛方法进行计算.

现在我们考虑一下参数  $\lambda$  和  $h$  对计算结果的影响. 我们选择连接状态  $(0.37, 0.02)$  和  $(0.35, 0.0)$  的激波来进行计算, 也就是说, 我们计算下面的初值问题

$$(\rho_r, \rho_l) = \begin{cases} (0.37, 0.02), & 0 < x < 0.5, \\ (0.35, 0.0), & -0.5 < x < 0. \end{cases} \quad (12)$$

参数  $\lambda = 1, h = 0.001, k = 0.0001$ , 图 5 中给出了密度的演化过程. 如果我们取  $\lambda = 5$ , 激波剖面更加平滑一些, 也就是说间断宽度增大, 见图 6. 如果改变空间步长  $h$  的大小, 也会得到相似的结果, 见图 7. 这些数值结果可以用修正方程(8)进行解释.

用松弛模型(4), 我们计算了  $\rho_r$  从 0.01 到 0.36 的所有情况, 每次的增量为 0.01, 计算区域取为  $x \in [-0.5, 0.5]$ . 数值结果和式(10)和式(11)给出的黎曼解相吻合. 当  $\rho_r \geq 0.32$  时, 我们得到一个右状态为气态的激波, 演化过程和前面  $\rho_r = 0.35$  的算例类似. 当  $\rho_r \leq 0.19$  时, 我们得到一个右状态为液态的激波.  $\rho_r = 0.10$  时的激波演化过程见图 8. 既然初始时刻激波两边都处于气态, 实际上这个时候一个新的相形成了.

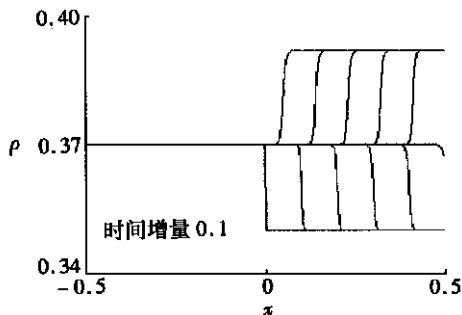


图 5  $\rho_r = 0.35$  时的密度演化

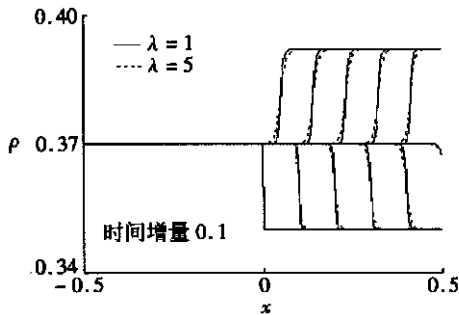


图 6  $\lambda = 1$  和  $\lambda = 5$  时的密度演化比较

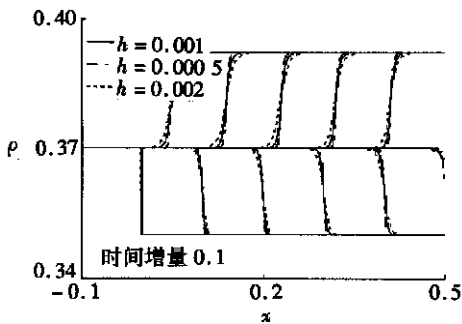


图 7 不同空间步长的密度演化比较

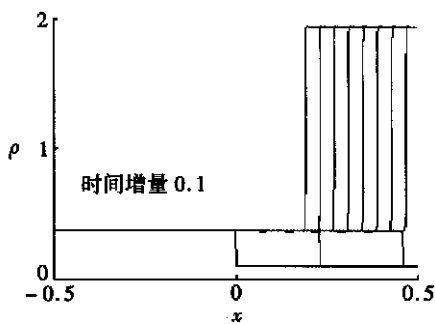


图 8  $\rho_r = 0.10$  时的密度演化

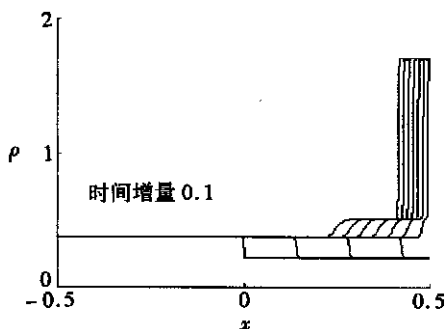


图 9  $\rho_r = 0.22$  时的密度演化

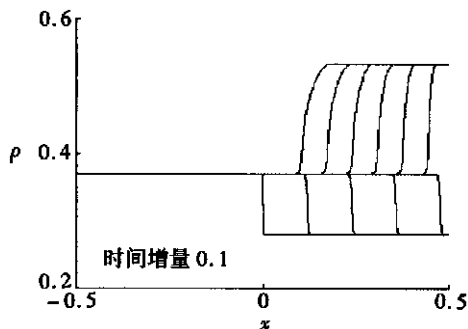


图 10  $\rho_r = 0.28$  时的密度演化

当  $\rho_r = (0.20, 0.31)$  时, 激波撞击墙壁后不会形成新的激波.  $\rho_r = 0.22$  和  $\rho_r = 0.28$  时

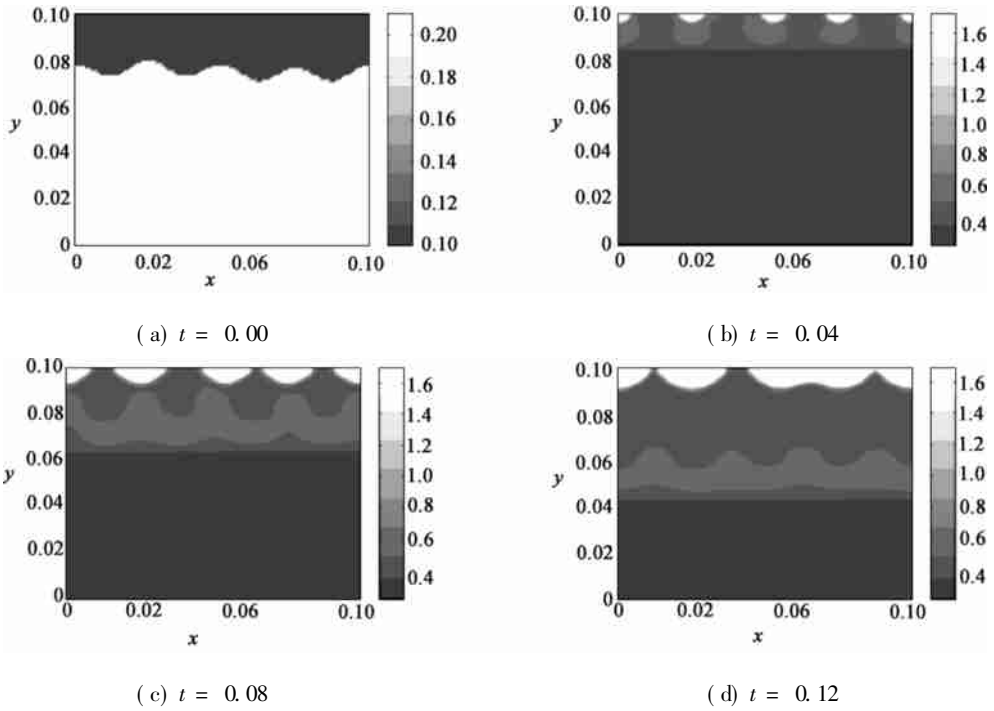
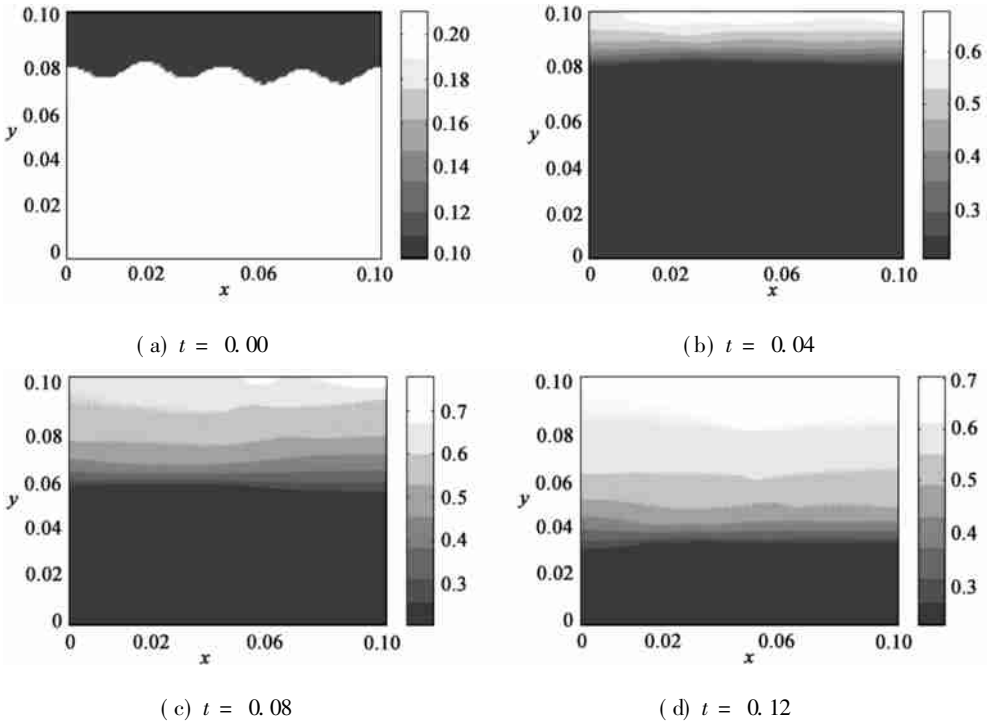


图 11 二维情况下扰动激波面-管壁的相互作用

图 12 扰动激波面-管壁的相互作用 ( $\lambda = 10$ )

的密度演化过程分别见图 9 和图 10。从图 9 我们可以看出返回波包括两部分,而不是一个单独的激波;图 10 中显示的返回波也不是一个经典的激波,因为波的斜率随着时间的增大而减小,也就是说波的宽度逐渐变大,这些波结构的内在机制还有待于进一步研究。

## 5 二维数值模拟

如果初始剖面在  $y$  方向是均匀的, 那么演化过程也是均匀的. 在  $x$  方向, 结果和前面的一维情况的结果相类似.

如果我们使用扰动过的初始剖面, 则会得到一些有趣的结果. 比如, 在区域  $[0.0, 0.1] \times [0.0, 0.1]$  中, 我们计算下面初值的激波管问题

$$\begin{cases} \rho \\ \rho u_x \\ \rho u_y \end{cases} = \begin{cases} 0.21 \\ 0.2102 \\ 0.0 \end{cases}, & \begin{cases} 0 < x < 0.075 + 0.003(\sin(20\pi y) + 2\cos(80\pi y)), \\ 0.0 < y < 0.1, \end{cases} \quad (13a)$$

$$\begin{cases} \rho \\ \rho u_x \\ \rho u_y \end{cases} = \begin{cases} 0.1 \\ 0.0 \\ 0.0 \end{cases}, & \begin{cases} 0.075 + 0.003(\sin(20\pi y) + 2\cos(80\pi y)) < x < 0.1, \\ 0.0 < y < 0.1. \end{cases} \quad (13b)$$

这里设置参数  $\lambda = \omega = 3$ ,  $h_x = h_y = 0.001$ ,  $k = 0.0001$ . 初始剖面可以认为是一个弯曲的激波面(图 11a). 在图 11 里给出了密度的演化过程. 激波撞到墙壁以后, 有液滴凝结出来, 在  $t = 0.04$  (图 11d) 时, 有 5 个液滴出现. 然后液滴慢慢增大并覆盖整个墙面. 随着时间的增长液面会逐渐变得平直.

要注意的是, 理论结果给出的中间态的密度值  $\rho^* = 0.637$  (Rankine-Hugoniot 条件) 是在亚稳态区间, 在计算中我们得到的中间状态  $\rho^* = 0.649$ . 相变发生与否取决于粘性的大小, 粘性小, 相变发生的可能性就大, 粘性大, 相变发生的可能性就小. 比如, 如果我们取  $\lambda = 10$ , 也就是说增大粘性, 相变现象就会被抑制住, 见图 12.

## 6 结 论

本文用松弛模型研究了激波管中的动态相变问题. 研究表明了松弛机制稳定范德瓦流体中动态相变的能力. 我们用松弛模型进行了可靠而高效的数值模拟. 对于不同的激波剖面, 给出了它们的理论结果, 并用数值算例进行了验证. 同时, 我们还研究了松弛参数和数值参数的影响, 在数值算例中我们观察到非经典的波结构, 最后, 我们的二维算例给出了一些复杂的斑图演化.

致谢 感谢黄永念教授, 武际可教授, 黄克服副教授对本文作者的帮助.

### [参 考 文 献]

- [1] Baker G A. Quantitative Theory of Critical Phenomena [M]. San Diego: Academic Press, 1990.
- [2] Hsieh Dinyu, TANG Shaø-qiang, WANG Xiaø-ping. On hydrodynamic instabilities, chaos and phase transition[J]. Acta Mech Sinica, 1996, 12(1): 1-14.
- [3] Shu C W. A numerical method for systems of conservation laws of mixed type admitting hyperbolic flux splitting[J]. J Comp Phys, 1992, 2(100): 424-429.
- [4] Hsieh Dinyu, WANG Xiaø-ping. Phase transition in van der waals fluid[J]. SIAM J Appl Math, 1997, 57(4): 871-892.
- [5] Slemrod M. Admissibility criteria for propagating phase boundaries in a van der Waals fluid[J]. Arch Rat Mech Anal, 1983, 4(81): 301-315.
- [6] JIN Sin, XIN Zhou-ping. The relaxation schemes for systems of conservation laws in arbitrary space



- dimensions[J]. *Comm Pure Appl Math*, 1995, **48**(3): 235-278.
- [7] Natalini R, TANG Shao-qiang. Discrete kinetic models for dynamic phase transitions[J]. *Comm Appl Nonlinear Anal*, 2000, **7**(2): 1-32.
- [8] TANG Shao-qiang, WANG Ping. Pattern formation in dynamic phase transitions[J]. *Chin Phy Lett*, 2004, **21**(8): 1566-1568.
- [9] TANG Shao-qiang, ZHAO Hui-jiang. Stability of Suliciu model for phase transitions[J]. *Comm Pure Appl Anal*, 2004, **3**(4): 545-556.
- [10] 王平, 唐少强. 松弛模型中液气共存平衡态[J]. *应用数学和力学*, 2005, **26**(6): 707-713.
- [11] Fomberg B, Witham G B. A numerical and theoretical study of certain nonlinear wave phenomena [J]. *Philos trans Roy Soc London Ser A*, 1978, **289**: 373-404.

## Numerical Study of Dynamic Phase Transitions in Shock Tube

WANG Ping<sup>1</sup>, TANG Shao-qiang<sup>2</sup>

(1. State Key Laboratory of Structural Analysis for Industrial Equipment;  
Department of Engineering Mechanics, Dalian University of Technology,  
Dalian 116024, P. R. China;

2. LTCS; Department of Mechanics and Engineering Science, Peking University,  
Beijing 100871, P. R. China)

**Abstract:** Shock tube problem of a Van der Waals fluid with a relaxation model was investigated. In the limit of relaxation parameter tending towards zero, this model yields a specific Riemann solver. Relaxing and relaxed schemes were derived. For an incident shock in a fixed tube, numerical simulations show convergence toward the Riemann solution in one space dimension. Impact of parameters was studied theoretically and numerically. For certain initial shock profiles, nondissipative reflecting wave was observed. In two space dimensions, the effect of curved wave fronts was studied, and some interesting wave patterns were exposed.

**Key words:** phase transition; shock; relaxation