

矩形剖分上一类二元样条空间与薄板纯弯曲*

王仁宏¹, 常锦才^{1,2}

(1. 大连理工大学 数学科学研究所, 辽宁 大连 116024;

2. 河北理工大学 理学院, 河北 唐山 063009)

(张鸿庆推荐)

摘要: 构造性地给出了矩形剖分上分片 2 次一阶光滑的二元样条空间的力学背景. 采用力学分析方法, 通过在网线上施加外力偶并适当取值使挠曲面成为分片形式, 建立了矩形剖分上一类二元样条与薄板纯弯曲之间的对应关系, 并对“光滑余因子”及“协调条件”给出了相应的力学解释. 更进一步, 通过引入扭矩, 对上述空间中任一样条函数建立了相应的力学背景.

关键词: 光滑余因子; 协调条件; 薄板纯弯曲

中图分类号: O241; O343 文献标识码: A

引 言

样条函数无论在理论上还是在应用中都具有十分重要的意义. 样条函数的特殊重要性在于一元样条明显的力学背景, 即一元三次样条 $s(x)$ 对应于适当集中载荷作用下弹性细梁的挠度曲线^[1]. 多元样条是一元样条到高维的推广, 已有丰富的结果并广泛应用于函数逼近、有限元法、CAGD 和计算机图形学等^[2]. 然而, 多元样条函数的力学背景至今尚未见讨论, 限制了多元样条理论与应用的进一步发展. 本文采用力学分析方法研究矩形剖分上一类二元样条与薄板弯曲之间的关系, 并且对“光滑余因子”及“协调条件”给出力学解释.

本文分为如下 4 个部分. 第 1 节给出多元样条的相关结论与记号; 第 2 节介绍小挠度薄板理论的基本假设及薄板纯弯曲的相关结论; 第 3 节是我们的主要工作, 给出了矩形剖分 Δ_{mn} 上二元样条空间 $S_2^1(\Delta_{mn})$ 的力学背景; 第 4 节指出一些值得进一步研究的问题.

1 多元样条的相关结论与记号

1975 年, 王仁宏^[3]采用函数论与代数几何方法, 引入光滑余因子和协调条件刻划任意剖分下多元样条的本质属性, 建立了所谓的“光滑余因子协调法”. 采用这种方法, 多元样条的任何问题都可以转化为与之等价的代数问题. 在这一方法的理论框架下, 我们有如下基本符号和结论.

设 D 为 R^2 中的给定区域, 以 P_k 记二元 k 次实系数代数多项式集合:

* 收稿日期: 2006-09-04; 修订日期: 2007-05-23

基金项目: 国家自然科学基金资助项目(60533060; 69973010; 10271022)

作者简介: 王仁宏(1937—), 男, 江西南昌人, 教授, 博士生导师(Tel: + 86-411-84708360);

常锦才(1973—), 男, 河北唐山人, 讲师, 博士(联系人, E-mail: jincai@heut.edu.cn).

$$P_k := \left\{ p(x, y) = \sum_{i=0}^k \sum_{j=0}^{k-i} c_{ij} x^i y^j \mid c_{ij} \in \mathbf{R} \right\}. \quad (1)$$

用有限条不可约代数曲线对区域 D 进行剖分 Δ , 于是 D 被剖分为有限个子区域 D_1, D_2, \dots, D_N , 它们被称为 D 的胞腔. 形成每个胞腔边界的线段称为网线, 网线的交点称为网点或顶点. 多元样条空间定义为:

$$S_k^\mu(\Delta) := \left\{ s \in C^\mu(D) \mid s|_{D_i} \in P_k, i = 1, \dots, N \right\}, \quad (2)$$

其中 s 为一个在 D 上具有 μ 阶连续偏导数的片多项式函数.

引理 1. 1^[3] 设 $z = s(x, y)$ 在两相邻胞腔 D_i 和 D_j 上的表达式分别为 $z = p_i(x, y)$ 和 $z = p_j(x, y)$, 其中 $p_i(x, y)$ 和 $p_j(x, y) \in P_k$. 为使 $s(x, y) \in C^\mu(\overline{D_i \cup D_j})$, 必须且只须存在多项式 $q_{ij}(x, y) \in P_{k-(\mu+1)d}$, 使得

$$p_i(x, y) - p_j(x, y) = [l_{ij}(x, y)]^{\mu+1} \cdot q_{ij}(x, y), \quad (3)$$

其中 D_i 与 D_j 的公共内网线为 $\Gamma_{ij}: l_{ij}(x, y) = 0$, 且不可约代数多项式 $l_{ij}(x, y) \in P_d$.

定理中的多项式因子 $q_{ij}(x, y)$ 称为内网线 $\Gamma_{ij}: l_{ij}(x, y) = 0$ 上的光滑余因子.

设 A 为一内网点, 定义 A 点处的协调条件为 $\sum_v [l_{ij}(x, y)]^{\mu+1} \cdot q_{ij}(x, y) \equiv 0$, 其中 \sum_v 表示对一切以内网点 A 为一端内网线所求的和, 而 $q_{ij}(x, y)$ 为 Γ_{ij} 上的光滑余因子. 若剖分 Δ 的所有内网点为 A_1, \dots, A_M , 则整体协调条件为:

$$\sum_{A_v} [l_{ij}(x, y)]^{\mu+1} \cdot q_{ij}(x, y) \equiv 0, \quad v = 1, \dots, M, \quad (4)$$

其中 $q_{ij}(x, y)$ 满足 A_v 点处的协调条件.

定理 1. 1^[3] 对给定的剖分 Δ , 多元样条函数 $s(x, y) \in S_k^\mu(\Delta)$ 存在的充要条件是 $s(x, y)$ 在每条内网线上均有一光滑余因子存在, 并且满足整体协调条件.

剖分 Δ_c 称为贯穿剖分, 如果该剖分的所有网线由一些贯穿区域 D 的直线切割而成. 一个贯穿剖分 Δ_{nc} 称为简单贯穿剖分, 如果在每个内网点处只有两条贯穿线相交. Δ_{mn} 表示矩形剖分, 可以在一个开矩形域 $D = \{(x, y) \mid a < x < b, c < y < d; a, b, c, d \in \mathbf{R}\}$ 上由如下直线族 $x - x_i = 0$ ($i = 1, \dots, m$) 和 $y - y_j = 0$ ($j = 1, \dots, n$) 生成, 其中 $a = x_0 < x_1 < \dots < x_m < x_{m+1} = b, c = y_0 < y_1 < \dots < y_n < y_{n+1} = d$. 函数 $s(x, y) \in S_k^\mu(\Delta)$ 称为非退化的二元样条, 如果 $s(x, y)$ 至少有一个非 0 的光滑余因子. 基于上述定义, 我们有如下结论.

推论 1. 1^[2,3] 若剖分 Δ_c 为贯穿剖分, 则非退化的多元样条函数 $s(x, y) \in S_k^\mu(\Delta_c), k \geq \mu + 1$ 恒存在. 对任一矩形剖分 Δ_{mn} , 非退化的多元样条函数 $s(x, y) \in S_k^\mu(\Delta_{mn}), k \geq \mu + 1$ 恒存在.

在矩形剖分上, 二元样条的如下表达式成立.

定理 1. 2^[2,3] 任一 $s(x, y) \in S_k^\mu(\Delta_{mn})$ 均有如下唯一的表达式 ($0 \leq \mu < k$)

$$s(x, y) = p(x, y) + \sum_{i=1}^m b_i(x, y)(x - x_i)_+^{\mu+1} + \sum_{j=1}^n c_j(x, y)(y - y_j)_+^{\mu+1} + \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n d_{ij}(x, y)(x - x_i)_+^{\mu+1} \cdot (y - y_j)_+^{\mu+1}, \quad (5)$$

其中 $p(x, y) \in P_k, b_i(x, y)$ 和 $c_j(x, y) \in P_{k-\mu-1}, d_{ij}(x, y) \in P_{k-2\mu-2}$, 右端第 4 项仅当 $k \geq$

$2\mu + 2$ 时才存在.

2 薄板纯弯曲

板的弯曲性质在很大程度上决定于它的厚度, 我们仅讨论小挠度的薄板弯曲. 薄板小挠度弯曲理论有如下基本假设^[4]: 1) 板的中面没有变形, 在弯曲时保持中性; 2) 弯曲变形前垂直于板中面的直线, 在变形后仍作为直线垂直于变形后的中曲面, 且线段的长度也保持不变, 称直法线假设, 此时挠度 w 与 z 无关, 只是板平面内两个坐标 x 和 y 的函数, 即 $w = w(x, y)$; 3) 板的横向正应力远小于其它应力, 可以忽略不计; 4) 板的材料是均匀, 各向同性, 连续和线弹性的. 在上述理想假设下, 平板弯曲问题可归结为寻求一个四阶微分方程, 即平衡方程

$$\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} = \frac{q}{D} \quad (6)$$

的解.

Timoshenko 在文献[4]中给出了薄板纯弯曲的相关讨论. 梁的纯弯曲或均匀弯曲^[5]是指数值相等方向相反的两个力偶作用在梁的两端, 从而梁的各个截面上剪力为 0, 弯矩为常数时的弯曲. 在两个互相垂直的方向都有这样的弯曲时, 总结果就得到板的纯弯曲. 如图 1 所示, 沿板边作用有均匀分布力矩的矩形板的纯弯曲, 取 xy 平面与挠曲前的板的中面重合, 以板的中心为原点, 并令 x 轴和 y 轴与板边平行, 垂直于中面的 z 轴以向下为正. 用 M_x 和 M_y 分别表示作用于平行 y 轴和 x 轴的边缘单位长上的弯矩. 使板的上面产生压缩而下面产生拉伸的弯矩取为正号. 假定板的厚度较之于板的其他变量为小量, 且板的变形为小挠度弹性变形. 此时薄板承受纯弯曲, 在与板边平行的截面上弯矩为常数, 而扭矩为 0. 对两种特殊情形文献给出了如下结果^[4]:

若 $M_x = M_y = M$, 并应用曲率的近似表达式:

$$\frac{1}{r_x} \approx \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}, \quad \frac{1}{r_y} \approx \frac{\partial^2 w}{\partial y^2},$$

可得此时薄板的挠曲面方程为:

$$w(x, y) = -\frac{M(x^2 + y^2)}{2D(1 + \nu)}, \quad (7)$$

它表示一个旋转抛物面.

当 $M_y = -M_x = M$ 时, 薄板的挠曲面方程为:

$$w(x, y) = -\frac{M(x^2 - y^2)}{2D(1 - \nu)}, \quad (8)$$

它表示一个互反曲面. 我们容易将上述两种情形推广如下:

如果 $M_y = kM_x (k > 0)$ 且 $M_x = M$, 则薄板的挠曲面方程为:

$$w(x, y) = -\frac{M(x^2 + ky^2)}{2D(1 + \nu)}. \quad (9)$$

当 $M_y = -kM_x (k > 0)$ 且 $M_x = M$, 我们有

$$w(x, y) = -\frac{M(x^2 - ky^2)}{2D(1 - \nu)}, \quad (10)$$

其中 ν 为材料的泊松比, D 为板的抗弯刚度.

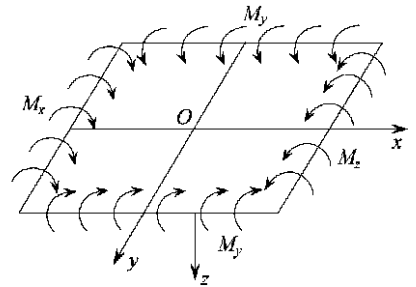


图 1 薄板纯弯曲

3 $S_2^1(\Delta_{mn})$ 与薄板纯弯曲的关系

3.1 均匀矩形剖分

不妨以正方形板(方板)为例,为计算方便可不计量纲,取板的尺寸为 4×4 . 如图 2 所示把方板细分为 4 个对称的小正方形,并以方板的中心为原点建立直角坐标系. M_x 和 M_y 表示沿板边单位长度上均匀分布的力矩,而 M_{cx} 和 M_{cy} 表示在两条对边中点连线上均匀分布的集中力偶,它们的绝对值相等方向如图. 每一小块可以认为是一个胞腔,记为 $\Delta_i, i = 1, 2, 3, 4$, 分别表示

$$\begin{aligned} \Delta_1: [0, 2] \times [0, 2]; \quad \Delta_2: [0, 2] \times [-2, 0]; \\ \Delta_3: [-2, 0] \times [-2, 0]; \quad \Delta_4: [-2, 0] \times [0, 2]. \end{aligned}$$

而中线称为内网线,方程分别为 $x = 0$ 和 $y = 0$.

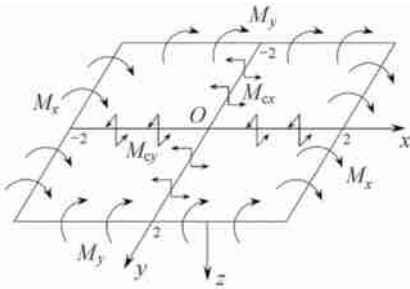


图 2 均匀矩形剖分

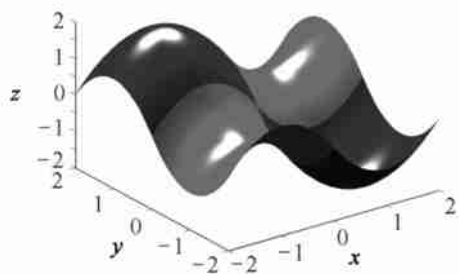


图 3 挠曲面图形

当薄板在上述力系作用下弯曲变形并达到平衡状态时,对每一小块而言也处于平衡状态,采用类似于材料力学中的截面法,沿剖分线截取每一小块正方形板单独进行研究. 易知每一小块正方形板的弯曲分别对应前述两种特殊情形,从而可得每一小块上的挠曲面方程,它们分别是旋转抛物面和互反曲面的平移. 假定板由一种特殊材料制成,其泊松比 $\nu = 0$, 比如软木(它的泊松比 ν 几乎为 0[参见文献[5]24]), 此时由整体挠曲面在剖分线上的连续性,可以分别确定 4 个小正方形上的挠曲面方程:

$$\begin{aligned} w_1(x, y) &= (x-1)^2 - (y-1)^2 = x^2 - y^2 - 2x + 2y, & (x, y) \in \Delta_1, \\ w_2(x, y) &= (x-1)^2 + (y+1)^2 - 2 = x^2 + y^2 - 2x + 2y, & (x, y) \in \Delta_2, \\ w_3(x, y) &= -(x+1)^2 + (y+1)^2 = -x^2 + y^2 - 2x + 2y, & (x, y) \in \Delta_3, \\ w_4(x, y) &= -(x+1)^2 - (y-1)^2 + 2 = -x^2 - y^2 - 2x + 2y, & (x, y) \in \Delta_4, \end{aligned}$$

上式中省略了常数因子 $-M/(2D)$. 由“光滑余因子协调法”容易验证,它们恰好构成一个分片 2 次、在剖分线上一阶光滑的二元样条. 事实上

$$\begin{aligned} w_2(x, y) - w_1(x, y) &= 2y^2 := q_{21}y^2, \\ w_3(x, y) - w_2(x, y) &= -2x^2 := q_{32}x^2, \\ w_4(x, y) - w_3(x, y) &= -2y^2 := q_{43}y^2, \\ w_1(x, y) - w_4(x, y) &= 2x^2 := q_{14}x^2, \end{aligned}$$

其中 $q_{21} = 2, q_{32} = -2, q_{43} = -2, q_{14} = 2$ 分别表示相应内网线上的光滑余因子,而内网点 O 处协调条件自然满足.

上述分片形式的挠曲面方程写成截断多项式形式即为:

$$s(x, y) := w_1(x, y) + 2(0 - y)_+^2 + (-2)(0 - x)_+^2 + (-2)(y - 0)_+^2. \quad (11)$$

图3所示即为此时薄板弯曲的变形曲面,它是一张由4个不同2次曲面光滑地连接在一起的样条曲面.

3.2 非均匀矩形剖分

对非均匀矩形剖分,有类似的结果.仍以方板为例,不计量纲,取板的尺寸为 3×3 .如图4把方板细分为4个小矩形,并以剖分线的交点为原点建立直角坐标系. M_{x1}, M_{x2}, M_{y1} 和 M_{y2} 分别表示平行于 y 轴和 x 轴的板边上均匀分布的力矩, M_{cx} 和 M_{cy} 表示内网线上均匀分布的力偶,它们满足 $M_{cx} = M_{x1} + M_{x2}, M_{cy} = M_{y1} + M_{y2}, M_{x2} = 2M_{x1}, M_{y2} = 2M_{y1}$, 方向如图. 每一个小矩形记为一个胞腔,以 $\Delta_i, i = 1, 2, 3, 4$ 表示,其中

$$\begin{aligned} \Delta_1: [0, 2] \times [0, 1]; \quad \Delta_2: [0, 2] \times [-2, 0]; \\ \Delta_3: [-1, 0] \times [-2, 0]; \quad \Delta_4: [-1, 0] \times [0, 1]. \end{aligned}$$

当薄板弯曲并达到平衡状态时,对每一小块而言也处于平衡状态.由前述方法易得每一小块上的挠曲面方程如下:

$$\begin{aligned} w_1(x, y) &= (x - 1)^2 - 2(y - 0.5)^2 - 0.5 = \\ & \quad x^2 - 2y^2 - 2x + 2y, \quad (x, y) \in \Delta_1, \\ w_2(x, y) &= (x - 1)^2 + (y + 1)^2 - 2 = x^2 + y^2 - 2x + 2y, \quad (x, y) \in \Delta_2, \\ w_3(x, y) &= -2(x + 0.5)^2 + (y + 1)^2 - 0.5 = \\ & \quad -2x^2 + y^2 - 2x + 2y, \quad (x, y) \in \Delta_3, \\ w_4(x, y) &= -2((x + 0.5)^2 + (y - 0.5)^2) + 1 = \\ & \quad -2x^2 - 2y^2 - 2x + 2y, \quad (x, y) \in \Delta_4, \end{aligned}$$

它们仍可认为是旋转抛物面和互反曲面的平移,用相同方法容易验证,它们也是一个分片2次一阶光滑的2元样条,写成截断多项式形式即为:

$$s(x, y) := w_1(x, y) + 3(0 - y)_+^2 + (-3)(0 - x)_+^2 + (-3)(y - 0)_+^2. \quad (12)$$

此时薄板的变形曲面如图5所示.

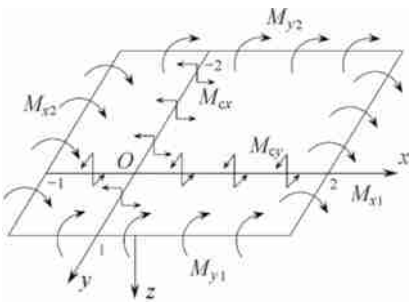


图4 非均匀矩形剖分

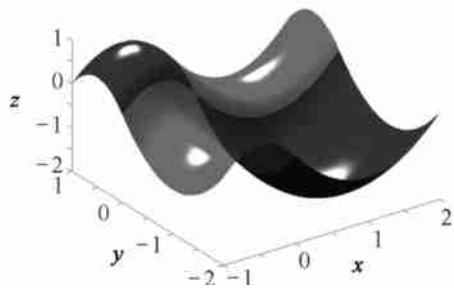


图5 挠曲面图形

3.3 一般情形

基于上述讨论,不计量纲,我们考虑如图6所示任意矩形剖分下任意尺寸的矩形板.其中 $a > 0, b > 0, c > 0, d > 0, M_{x1}, M_{x2}, M_{y1}, M_{y2}, M_{cx}$ 和 M_{cy} 与图4中的量具有相同的含义. 每一个小矩形作为一个胞腔,以 $\Delta_i, i = 1, 2, 3, 4$ 表示,其中

$$\begin{aligned} \Delta_1: [0, a] \times [0, c]; \quad \Delta_2: [0, a] \times [-d, 0]; \\ \Delta_3: [-b, 0] \times [-d, 0]; \quad \Delta_4: [-b, 0] \times [0, c]. \end{aligned}$$

为了使板达到平衡并承受纯弯曲,上述弯矩和力偶须满足下列方程:

$$M_{x2}: M_{x1} = a : b, \quad M_{y2}: M_{y1} = c : d,$$

$$M_{cx} = M_{x1} + M_{x2}, \quad M_{cy} = M_{y1} + M_{y2},$$

方向如图 6 所示.

这样, 我们能够得到一个二元样条曲面作为薄板的挠曲面, 每一个胞腔上的表达式为:

$$w_1(x, y) = b \left[x - \frac{a}{2} \right]^2 - d \left[y - \frac{c}{2} \right]^2 - \frac{1}{4}(ba^2 - dc^2) =$$

$$bx^2 - dy^2 - abx + cdy, \quad (x, y) \in \Delta_1,$$

$$w_2(x, y) = b \left[x - \frac{a}{2} \right]^2 + c \left[y + \frac{d}{2} \right]^2 - \frac{1}{4}(ba^2 - cd^2) =$$

$$bx^2 + cy^2 - abx + cdy, \quad (x, y) \in \Delta_2,$$

$$w_3(x, y) = -a \left[x + \frac{b}{2} \right]^2 + c \left[y + \frac{d}{2} \right]^2 + \frac{1}{4}(ab^2 - cd^2) =$$

$$-ax^2 + cy^2 - abx + cdy, \quad (x, y) \in \Delta_3,$$

$$w_4(x, y) = -a \left[x + \frac{b}{2} \right]^2 - d \left[y - \frac{c}{2} \right]^2 + \frac{1}{4}(ab^2 + dc^2) =$$

$$-ax^2 - dy^2 - abx + cdy, \quad (x, y) \in \Delta_4.$$

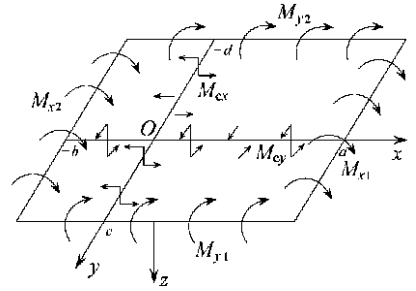


图 6 一般矩形剖分

它们可以写成如下截断多项式的形式:

$$s(x, y) := w_1(x, y) + (c + d)(0 - y)_+^2 + (-a - b)(0 - x)_+^2 + (-c - d)(y - 0)_+^2. \quad (13)$$

显然, 前面两个结果是一般矩形剖分的特例, 并且上述矩形剖分可任意加细或在板的中面上任意延拓, 只要作用在板上的外弯矩和外力偶能够使板保持平衡并承受纯弯曲.

由此我们可得如下结论: 矩形剖分上一类形如方程(13)的二元样条, 即 $S_2^1(\Delta_{mn})$ 的一个子空间, 对应如图 6 所示受弯矩和力偶联合作用的矩形薄板纯弯曲的变形曲面. 它是在小挠度假设下薄板纯弯曲足够精确的数学模型, 这就建立了一类二元样条的力学背景. 而这一样条函数在剖分线上的一阶光滑性恰好对应薄板在力偶作用下转角的连续性, 二阶导数的不连续性恰好对应应力偶作用线的两侧内弯矩的间断(符号相反), 内网点上的协调条件则对应薄板真实变形曲面的唯一性或单值性.

由于没有横向载荷, 即 $q = 0$, 上述样条函数显然满足平衡方程(6).

3.4 进一步讨论

前述样条中均不含交叉项 xy , 原因在于对于薄板纯弯曲, 在与板边平行的截面上, 扭矩^[4]

$$M_{xy} = D(1 - \nu) \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} = 0.$$

若在图 6 中沿板的边界(或网线)施加扭矩 $M_{xy} = M_0 \neq 0$ 或 $M_{yx} = M_0 \neq 0$, 则易知挠曲面方程中将含有 $DM_0(1 - \nu)xy$ 这一项.

由定理 1.2, $S_2^1(\Delta_{mn})$ 中样条函数的表达式为:

$$s(x, y) = p(x, y) + \sum_{i=1}^m b_i (x - x_i)_+^2 + \sum_{j=1}^n g_j (y - y_j)_+^2, \quad (14)$$

其中 $p(x, y) \in P_2$ 为源胞腔中的表达式, $b_i, g_j \in \mathbf{R}$, 即每条网线上的光滑余因子均为一常数.

因此任一二元样条 $S(x, y) \in S_2^1(\Delta_{mn})$ 中是否含有 xy 项, 仅由源胞腔中的表达式决定. 对源胞腔 Δ_1 中任给的表达式 $w_1(x, y) = ax^2 + by^2 + cxy + dx + ey + f$, 若 Δ_1 的中心为 (x_1, y_1) , 则有恒等式

$$\begin{aligned} w_1(x, y) &= ax^2 + by^2 + cxy + dx + ey + f = \\ & a(x - x_1)^2 + b(y - y_1)^2 + c(x - x_1)(y - y_1) + \\ & (2ax_1 + cy_1 + d)x + (2by_1 + cx_1 + e)y + (f - ax_1^2 - by_1^2 - cx_1y_1). \end{aligned} \quad (15)$$

由系数 a, b, c 可分别确定形成该胞腔的网线上外力偶的组合 M_x, M_y, M_{xy} 和 M_{yx} . 上式的后 3 项所表示的平面可认为是薄板中面在坐标系中的原始位置, 即有一定的倾斜和平移而未必位于 xOy 平面内.

类似的, 对其余胞腔上的表达式, 均可给出对应的外力组合. 这样就建立了 $S_2^1(\Delta_{mn})$ 的力学背景, 即矩形剖分上分片 2 次一阶光滑的二元样条可以解释为在网线上承受适当的外力偶时薄板弯曲的挠曲面方程, 此时的弯曲已不仅是纯弯曲.

简单贯穿剖分是矩形剖分相当一般化的推广^[2], 有关后者的结论可以完全推广到前者上, 亦不难建立样条空间 $S_2^1(\Delta_{sc})$ 的力学背景.

4 结论及展望

平板弯曲问题是二三百年来在力学、数学家中久盛不衰的研究课题, 其中仍有许多复杂的问题值得研究. 另一方面, 经过几十年的发展, 多元样条函数也已取得丰富成果^[6]. 但平板弯曲与多元样条之间是否存在着必然的联系, 一直没有明确的回答. 纯弯曲是薄板弯曲问题中最简单的一种, 而 $S_2^1(\Delta_{mn})$ 也是二元样条空间中最简单的一类样条函数, 本文从力学分析入手, 建立了特殊材料薄板纯弯曲与 $S_2^1(\Delta_{mn})$ 的一个子空间之间的对应关系, 构造性的给出了一类二元样条的力学背景. 更进一步, 对于样条空间 $S_2^1(\Delta_{mn})$ 中的任意样条函数 $s(x, y)$, 通过引入扭矩, 建立了它与某种薄板弯曲的对应关系. 正是由于作用在剖分线上的外力偶才使挠曲面具有分片形式, 并形成一张不同于普通二元 2 次多项式曲面的样条曲面. 应该指出, 尝试建立不同剖分上具有不同次数和光滑度的二元样条函数的力学背景^[7-9], 无论对工程领域, 还是数学领域都是很有意义和值得研究的工作.

[参 考 文 献]

- [1] Schoenberg I J. Contributions to the problem of approximation of equidistant data by analytic functions[J]. Quart Appl Math, 1946, 4(1/2): 45-99, 112-141.
- [2] 王仁宏. 多元样条函数及其应用[M]. 北京: 科学出版社, 1994.
- [3] 王仁宏. 多元齿的结构与插值[J]. 数学学报, 1975, 18(2): 91-106.
- [4] Timoshenko S P, Woinowsky-Krieger S. Theory of Plates and Shells [M]. 2nd Ed. New York: McGraw-Hill, 1959.
- [5] Gere J M, Timoshenko S P. Mechanics of Material [M]. 3rd Ed. Boston: PWS, 1990.
- [6] 王仁宏. 任意剖分下的多元样条分析[J]. 中国科学, 数学专辑 I, 1979, (S1): 215-226.
- [7] 孙家昶, 李炳坤. 三向剖分下的二元 B 样条有限元法[J]. 数值计算与计算机应用, 1991, 12(2): 102-113.
- [8] 刘效尧. 二元 B 样条有限单元法[J]. 数值计算与计算机应用, 1988, 9(3): 129-138.
- [9] 刘焕文. 解平行四边形板弯曲问题的二元 B 样条有限元法[J]. 广西科学, 1998, 5(1): 15-19.

A Kind of Bivariate Spline Space Over Rectangular Partition and Pure Bending of Thin Plate

WANG Ren-hong¹, CHANG Jin-cai^{1,2}

(1. Institute of Mathematical Sciences, Dalian University of Technology,

Dalian, Liaoning 116024, P. R. China;

2. College of Sciences, Hebei Polytechnic University,

Tangshan, Hebei 063009, P. R. China)

Abstract: The mechanical background of the bivariate spline space of degree 2 and smoothness 1 on rectangular partition was presented constructively. Making use of mechanical analysis method, by acting couples along the interior edges with suitable evaluations, the deflection surface was divided into piecewise form, therefore, the relation between a class of bivariate splines on rectangular partition and the pure bending of thin plate was established. In addition, the interpretation of smoothing cofactor and conformality condition from the mechanical point of view was given. Furthermore, by introducing twisting moments, the mechanical background of any spline belonging to the above space was set up.

Key words: smoothing cofactor; conformality condition; pure bending of thin plate