

抛物化稳定性方程在可压缩 边界层中应用的检验*

张永明¹, 周 恒^{1,2}

(1. 天津大学 力学系, 天津 300072;

2. 南开大学 天津大学 刘徽应用数学中心, 天津 300072)

(我刊编委周恒来稿)

摘要: 用抛物化稳定性方程(PSE), 研究了可压缩边界层中扰动的演化, 并与由直接数值模拟(DNS)所得进行比较. 目的在检验 PSE 方法用于研究可压缩边界层中扰动演化的可靠性. 结果显示, 无论是亚音速还是超音速边界层, 由 PSE 方法和由 DNS 方法所得结果都基本一致, 而温度比速度吻合得更好. 对超音速边界层, 还计算了小扰动中性曲线. 与线性稳定性理论(LST)的结果相比, 二者的关系和不可压边界层的情况相似.

关键词: 抛物化稳定性方程; 直接数值模拟; 线性稳定性理论

中图分类号: O357.41 **文献标识码:** A

引 言

在飞行器的研制中, 转换位置的确定是一个重要的问题, 为此要对边界层内扰动演化问题进行研究. 一种方法是使用线性及弱非线性稳定性理论, 它一般不考虑基本流的非平行性影响. 虽然有 Gaster^[1]、于秀阳和周恒^[2]等针对基本流的非平行性问题, 提出了一种处理线性问题的方法, 使得与实验结果更加符合, 但很难被推广到非线性问题. 近年来, 直接数值模拟方法越来越多地被用来研究扰动演化问题, 但计算工作量太大, 一般只能用于机理性研究.

上世纪 80 年代, Herbert 和 Bertolotti^[3]提出了抛物化稳定性方程, 用以分析不可压缩边界层内的扰动演化. 此法既考虑了非平行性, 计算量又不大. 用线性 PSE(LPSE)^[4]比用 LST 得到的中性曲线更符合实验结果^[5-8], 也与 Gaster^[1]的结果一致. 用非线性 PSE(NPSE)得到的结果^{[4],[9]}与 DNS 结果一致, 包括基本扰动、高次谐波和平均流修正的幅值与剖面. 在此基础上, PSE 方法被用来更深入的研究不可压缩边界层的稳定性^[10]. Herbert^[11]对这方面的工作做了总结.

相对不可压缩边界层, 可压缩边界层的 PSE 更为复杂, 其结果也较少. 但由于航空航天

* 收稿日期: 2006-05-10; 修订日期: 2007-06-21

基金项目: 国家自然科学基金(重点)资助项目(10632050); 南开大学天津大学刘徽应用数学中心资助项目

作者简介: 张永明(1979—), 男, 云南人, 博士生(Tel: + 86-22-27403374; E-mail: yingnzh@yahoo.com); 周恒(联系人, Tel: + 86-22-27890533; Fax: + 86-22-27407025; E-mail: hzhou1@tju.edu.cn).

技术发展的需求,尤其是对超音速和高超音速边界层的关注,这方面的研究逐渐多了起来。它同样开始于相对简单的线性问题^[12-14]。早些时候,Chang 等人^[15]用 NPSE 方法计算了扰动的非线性演化,并将扰动的二次谐波与时间模式的 DNS 结果对比,二者基本一致,而前者的工作量要比后者小很多。要将 PSE 方法用以研究可压缩边界层中的扰动演化,特别是非线性演化,其有效性必需经受更充分的检验。要将用 PSE 方法所得的扰动演化,与空间模式的 DNS 结果进行细致的对比,包括更多阶扰动的幅值和剖面。此外,可压缩边界层的 LST 同样存在临界 Reynolds 数偏大的问题,所以有必要用 PSE 方法研究边界层厚度的增长对中性曲线的影响。

本文将针对以上两个问题进行研究。但限于二维扰动的情况。

1 控制方程

由完全的 N-S 方程出发,先推出完全的扰动方程。再针对扰动特点推出稳定性方程,最后利用边界层厚度增长缓慢的性质将其抛物化而得到 PSE。

用上标* 表示有量纲的量,二维 Cartesian 坐标系下的完全 N-S 方程为

$$\begin{cases} \frac{\partial \rho^*}{\partial t^*} + \dots \cdot (\rho^* \mathbf{V}^*) = 0, \\ \rho^* \left[\frac{\partial \mathbf{V}^*}{\partial t^*} + (\mathbf{V}^* \cdot \dots) \mathbf{V}^* \right] = - \dots p^* - \dots \times [\mu^* (\dots \times \mathbf{V}^*)] + \\ \dots [(\lambda^* + 2\mu^*) \dots \cdot \mathbf{V}^*], \\ \rho^* c_p^* \left[\frac{\partial T^*}{\partial t^*} + (\mathbf{V}^* \cdot \dots) T^* \right] = \dots (k^* \dots T^*) + \frac{\partial p^*}{\partial t^*} + (\mathbf{V}^* \cdot \dots) p^* + \Phi^*, \\ p^* = \rho^* R^* T^*, \end{cases} \quad (1)$$

其中 \mathbf{V}^* 是速度矢量, t^* 是时间, ρ^* 是密度, p^* 是压力, T^* 是温度, c_p^* 是比热比, k^* 是热传导系数, μ^* 是第一粘性系数, λ^* 是第二粘性系数, R^* 为普适气体常数。 Φ^* 为粘性耗散函数,表示为

$$\Phi^* = 2\mu^* \mathbf{S}^* : \mathbf{S}^* + \lambda^* (\dots \cdot \mathbf{V}^*)^2, \quad (2)$$

其中 \mathbf{S}^* 为应变率张量。

方程无量纲化时取特征长度为 $l_0^* = \sqrt{\gamma_e^* x_0^* / \mu_e^*}$, 其中 x_0^* 为平板前缘到计算域入口的距离, γ_e^* 为运动粘性系数, u_e^* 为流向速度, 下标 e 表示边界层外的自由来流中的量。其它特征量为自由流速度 u_e^* 和自由流温度 T_e^* 。平板前缘到入口无量纲距离为 $x_0 = x_0^* / l_0^* = \sqrt{\gamma_e^* x_0^* / \mu_e^*}$, 而入口 Reynolds 数的表达式与之相同, $Re_0 = u_e^* l_0^* / \gamma_e^* = \sqrt{\mu_e^* x_0^* / \gamma_e^*} = x_0^*$ 。平板前缘到入口下游某处的距离为

$$x = x^* / l_0^* = x^* \sqrt{\mu_e^* / (x_0^* \gamma_e^*)} = x_0 \frac{x^*}{x_0^*} = Re_0 \frac{x^*}{x_0^*} = Re_0 \frac{x_0^* + \Delta x^*}{x_0^*} = Re_0 a,$$

显然 $a = (x_0^* + \Delta x^*) / x_0^* \geq 1$ 。由此得到流向 x 的 1 阶、2 阶导数的量级分别为

$$\frac{\partial}{\partial x} \sim \frac{1}{a} \frac{1}{Re_0}, \quad \frac{\partial^2}{\partial x^2} \sim \frac{1}{a^2} \frac{1}{Re_0^2}. \quad (3)$$

(3) 式成为后来对方程进行抛物化的依据。

将瞬时量设为定常基本流与扰动量之和

$$\begin{cases} u = u + u', v = v + v', \\ \rho = \rho + \rho', T = T + T', p = p + p', \\ \mu = \mu + \mu', \lambda = \lambda + \lambda', k = k + k', \end{cases} \quad (4)$$

其中上标-表示基本流,上标'表示扰动量。将(4)式代入N-S方程,并减去定常基本流满足的方程,得到扰动方程

$$V_{xx} \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + V_{yy} \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} + V_{xy} \frac{\partial^2 \phi}{\partial x \partial y} + \left[\Gamma \frac{\partial \phi}{\partial t} + A \frac{\partial \phi}{\partial x} + B \frac{\partial \phi}{\partial y} + D\phi \right] = 0, \quad (5)$$

其中 ϕ 为扰动矢量 $\phi = (\rho', u', v', T')^T$ 。系数矩阵 V_{xx} 、 V_{yy} 、 V_{xy} 、 Γ 、 A 、 B 、 D 都由线性部分与非线性部分组成,二者分别用上标 l 和 n 表示,则这些矩阵可记为

$$\begin{aligned} V_{xx} &= V_{xx}^l + V_{xx}^n, & V_{yy} &= V_{yy}^l + V_{yy}^n, & V_{xy} &= V_{xy}^l + V_{xy}^n, \\ \Gamma &= \Gamma^l + \Gamma^n, & A &= A^l + A^n, & B &= B^l + B^n, & D &= D^l + D^n. \end{aligned}$$

1.1 线性抛物化稳定性方程

对于小扰动,(5)式中的非线性部分可略去,得到线性扰动方程

$$V_{xx}^l \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + V_{yy}^l \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} + V_{xy}^l \frac{\partial^2 \phi}{\partial x \partial y} + \left[\Gamma^l \frac{\partial \phi}{\partial t} + A^l \frac{\partial \phi}{\partial x} + B^l \frac{\partial \phi}{\partial y} + D^l \phi \right] = 0. \quad (6)$$

再将扰动设为时间的周期函数,

$$\phi(x, y, t) = \psi(x, y) e^{i \left(\int_0^t a(x) dx - \omega t \right)} + c. c. \quad (7)$$

其中 $\psi = (\rho, \hat{u}, \hat{v}, T)^T$ 为形状函数矢量, a 为波数, ω 为频率, c. c. 表示复共轭。此形式与线性稳定性理论的表达式类似,但由于考虑边界层的生长,形状函数 ψ 和波数 a 都是 x 的缓变函数。将(7)式代入线性扰动方程(6)式,得到线性稳定性方程

$$V_{xx}^l \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + V_{yy}^l \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} + V_{xy}^l \frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial y} + \left[A \frac{\partial \psi}{\partial x} + B \frac{\partial \psi}{\partial y} + D\psi \right] = 0, \quad (8)$$

其中系数矩阵为

$$\begin{aligned} D &= -i\omega\Gamma^l + i\alpha A^l + D^l + \left[i \frac{d\alpha}{dx} - \alpha^2 \right] V_{xx}^l, \\ A &= A^l + 2i\alpha V_{xx}^l, & B &= B^l + i\alpha V_{xy}^l. \end{aligned}$$

Reynolds 数 Re_0 一般是一个大数且 $a \geq 1$, 可用(3)式估计方程(8)中系数的量级。去掉方程中含 $1/(Re_0^2)$ 的项,即得线性抛物化稳定性方程

$$V_{yy}^l \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} + \left[A \frac{\partial \psi}{\partial x} + B \frac{\partial \psi}{\partial y} + D\psi \right] = 0. \quad (9)$$

壁面处使用无滑移边界条件和等温或者绝热条件,使用等温条件时为

$$\hat{u} = \hat{v} = T = 0, \quad y = 0. \quad (10a)$$

使用绝热条件时为

$$\hat{u} = \hat{v} = 0, \quad \frac{\partial T}{\partial y} = 0, \quad y = 0. \quad (10b)$$

边界层外的边界条件为

$$\hat{u} = \hat{v} = T = 0, \quad y \rightarrow \infty \quad (11)$$

方程(9)中有两个未知函数,即形状函数 ψ 和波数 α , 这就需要补充一个条件。采用如下补充条件

$$\int_0^\infty \rho \left[\hat{u}^c \frac{\partial \hat{u}}{\partial x} + \hat{v}^c \frac{\partial \hat{v}}{\partial x} \right] dy = 0, \quad (12)$$

其中上标 c 表示复共轭。这相当于由形状函数决定的能量沿流向几乎是不变的,于是扰动的

能量增长和相位变化就分别吸收到波数的虚数和实数部分。具体应用这一条件(12)时要用下式算出一新的波数。

$$\alpha^{\text{new}} = \alpha^{\text{old}} - i \frac{1}{E} \int_0^{\infty} \rho \left[\hat{u}^c \frac{\partial \hat{u}}{\partial x} + \hat{v}^c \frac{\partial \hat{v}}{\partial x} \right] dy, \quad (13)$$

其中 E 为扰动能量 $E = \int_0^{\infty} \rho (|\hat{u}|^2 + |\hat{v}|^2) dy$ 。然后返回去用(9)式重算一个新的解。如此反复迭代,直至 α 的变化小于预设的小量 ε (本文取 $\varepsilon = 10^{-9}$)。

若 x 方向步长太小, PSE 会表现出较强的数值不稳定性而导致计算发散。Li 和 Malik^[16], Haj-Hariri^[17] 证明了数值不稳定性的存在并提出了解决方法。

1.2 非线性抛物化稳定性方程

扰动方程(5)也可记为如下形式

$$\mathbf{V}_{xx}^l \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \mathbf{V}_{yy}^l \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} + \mathbf{V}_{xy}^l \frac{\partial^2 \phi}{\partial x \partial y} + \left[\Gamma^l \frac{\partial \phi}{\partial t} + \mathbf{A}^l \frac{\partial \phi}{\partial x} + \mathbf{B}^l \frac{\partial \phi}{\partial y} + \mathbf{D}^l \phi \right] = \mathbf{F}^n, \quad (14)$$

其中右边的矢量函数 \mathbf{F}^n 表示所有的非线性项。考虑到方程是非线性的,需将扰动设为如下形式

$$\phi(x, y, t) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \phi_m(x, y) e^{i \left[\int_0^x m \alpha(x) dx - m \omega t \right]}, \quad (15)$$

当然计算中只能取有限多项,本文中 m 取 -7 到 7 。将(15)式代入(14)式,再去掉方程中含 $1/(Re_0^2)$ 的项,并将波数和频率相同的项放在一起,则对每一阶未知的形状函数,有如下的抛物化稳定性方程

$$\mathbf{V}_{yy}^l \frac{\partial^2 \phi_m}{\partial y^2} + \left[\mathbf{A}_m \frac{\partial \phi_m}{\partial x} + \mathbf{B}_m \frac{\partial \phi_m}{\partial y} + \mathbf{D}_m \phi_m \right] = \mathbf{F}_m, \quad m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots, \quad (16)$$

其中 \mathbf{F}_m 是阶数为 m 时的非线性项。由于 $\phi(x, y, t)$ 是实变量,所以只需对 $m \geq 0$ 的项进行计算,其它的项为它们的共轭。

边界条件与线性 PSE 时相同,即使用(10)式、(11)式,只是当 $m = 0$ 时自由流条件改为

$$\hat{u}_0 = \frac{\partial \hat{v}_0}{\partial y} = T_0 = 0, \quad y \rightarrow \infty \quad (17)$$

此条件使得平均流保持质量平衡。

2 数值方法

2.1 基本流和入口条件

使用 PSE 计算,需要已知计算域内的基本流和入口条件。基本流可以是 Blasius 相似性解或者由直接数值模拟得到。我们选取某一频率的 Tollmien-Schlichting (T-S) 波作为入口扰动,其形状函数和波数由 LST 给出。

2.2 计算网格和差分格式

流向使用等间距网格。对于线性计算,流向步长可以取 $1/3$ 扰动波长或更大,而对于非线性计算,流向步长须小于 $1/20$ 的扰动基本波波长。法向使用变间距网格,靠近壁面处网格较密。为了在法向使用高精度等间距差分格式,须将方程变换到等间距的计算坐标 η 下,变换形式如下:

$$\eta = \eta(y). \quad (18)$$

流向使用 1 阶或 2 阶单边差分格式

$$\begin{cases} \left(\frac{\partial \phi}{\partial x}\right)_i = \frac{1}{\Delta x} \phi_i + \left[-\frac{1}{\Delta x}\right] \phi_{i-1}, & (19a) \\ \left(\frac{\partial \phi}{\partial x}\right)_i = \frac{3}{2} \frac{1}{\Delta x} \phi_i + \left[-\frac{2}{\Delta x}\right] \phi_{i-1} + \left[\frac{1}{2} \frac{1}{\Delta x}\right] \phi_{i-2}. & (19b) \end{cases}$$

坐标 η 的导数使用 4 阶中心差分格式

$$\begin{cases} \left(\frac{\partial \phi}{\partial \eta}\right)_j = \frac{-\phi_{j+2} + 8\phi_{j+1} - 8\phi_{j-1} + \phi_{j-2}}{12\Delta\eta}, & (20) \\ \left(\frac{\partial^2 \phi}{\partial \eta^2}\right)_j = \frac{\partial \phi}{\partial \eta^2} = \frac{-\phi_{j+2} + 16\phi_{j+1} - 30\phi_j + 16\phi_{j-1} - \phi_{j-2}}{12\Delta\eta^2}. & (21) \end{cases}$$

靠近边界处差分格式需降阶

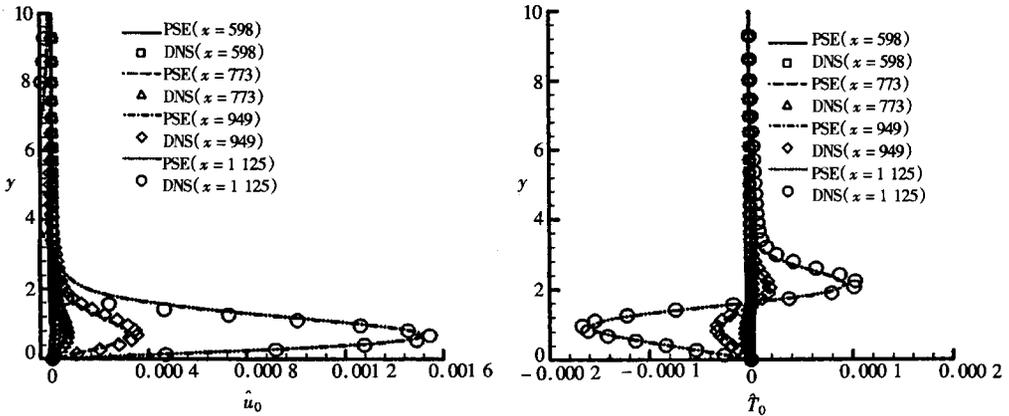
3 结果和讨论

3.1 非线性抛物化稳定性方程

分别对亚音速边界层及超音速边界层, 用 NPSE 方法计算了初始时是 T-S 波的扰动的非线性演化, 并将结果与相应的 DNS 结果比较, 以确定其有效性。

3.1.1 亚音速边界层

在入口 Reynolds 数 $Re_0 = 1138$ 处加入频率为 $\omega = 0.0284$, 幅值为 1×10^{-4} 的 T-S 波。基本流用直接数值模拟得到。来流 Mach 数 Ma 为 0.3。图 1、图 2 和图 3 分别画出了入口下游 $x = 598, x = 773, x = 949, x = 1125$ 处的 0 阶(即平均流修正)、1 阶(即 T-S 波)和 2 阶(即 T-S 波的二次谐波)波, 并与空间模式直接数值模拟的结果对比。由图可见, NPSE 的结果与 DNS 相当一致。



(a) 0 阶扰动速度剖面 \hat{u}_0 (b) 0 阶扰动温度剖面 T_0

图 1 入口下游 $x = 598, x = 773, x = 949, x = 1125$ 处 0 阶扰动剖面

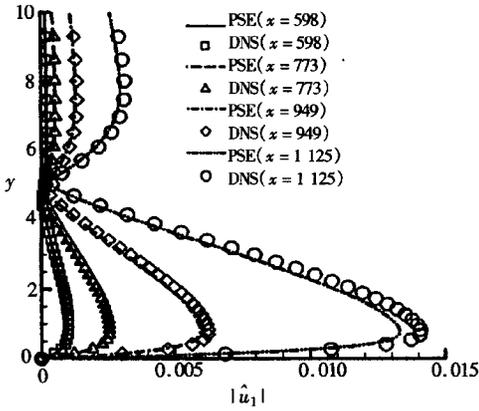
3.1.2 超音速边界层第一模态 T-S 波

对 Mach 数为 $Ma = 4.5$ 的边界层, 在入口 Reynolds 数 $Re_0 = 10471$ 处加入频率为 $\omega = 0.0533$, 波数为 $\alpha = 0.064$, 幅值为 0.01 的第一模态 T-S 波。基本流用直接数值模拟得到。图 4、图 5、图 6 画出了入口下游 $x = 516$ 处的 NPSE 与 DNS 的结果。二者符合较好, 而温度比速度符合得更好。

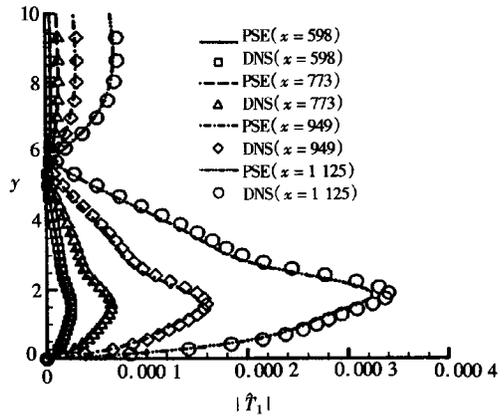
3.1.3 超音速边界层第二模态 T-S 波

对 Mach 数 $Ma = 4.5$ 的边界层, 在入口 Reynolds 数 $Re_0 = 11635$ 处加入频率为 $\omega = 0.258$, 波数为 $\alpha = 0.283$, 幅值为 0.001 的第 2 模态 T-S 波。基本流用直接数值模拟得到。图 7、图

8、图9画出了入口下游 x 为 138 处 NPSE 与 DNS 的结果。二者符合较好, 同样, 温度比速度符合得更好。

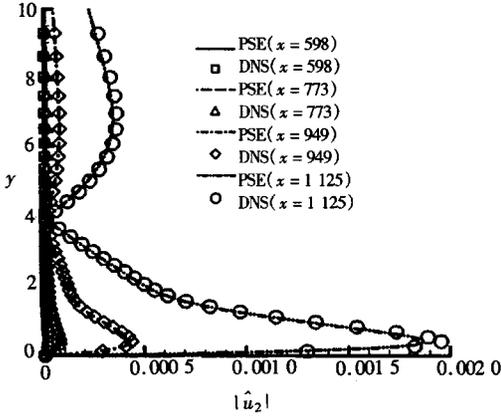


(a) 1 阶扰动速度幅值剖面 $|\hat{u}_1|$

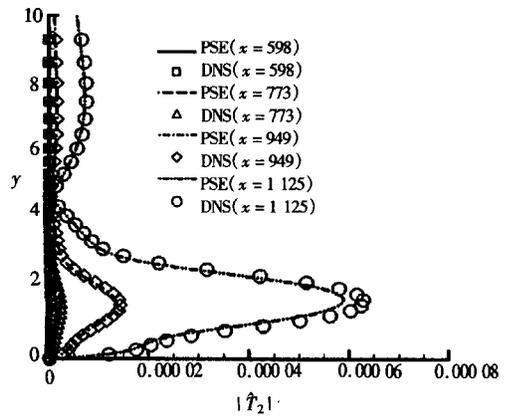


(b) 1 阶扰动温度幅值剖面 $|T_1|$

图2 入口下游 $x = 598, x = 773, x = 949, x = 1125$ 处 1 阶扰动幅值剖面

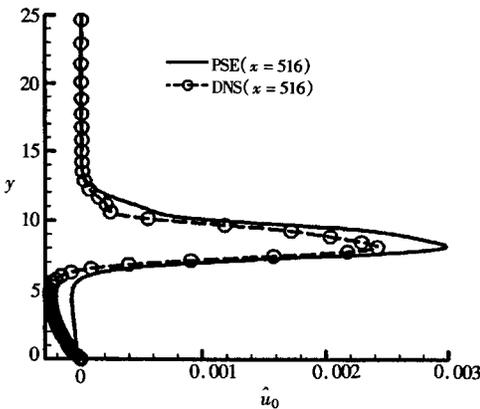


(a) 2 阶扰动速度幅值剖面 $|\hat{u}_2|$

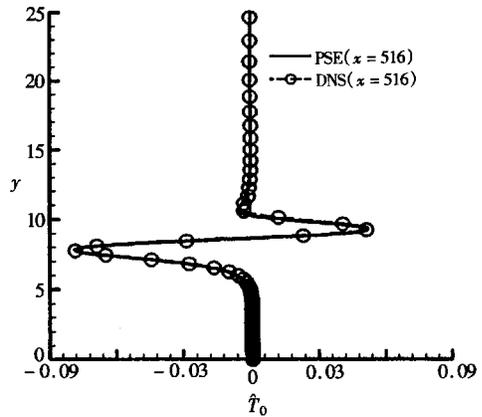


(b) 2 阶扰动温度幅值剖面 $|T_2|$

图3 入口下游 $x = 598, x = 773, x = 949, x = 1125$ 处 2 阶扰动幅值剖面

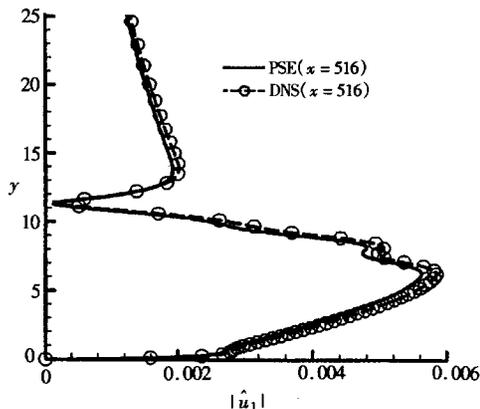


(a) 0 阶扰动速度剖面 \hat{u}_0

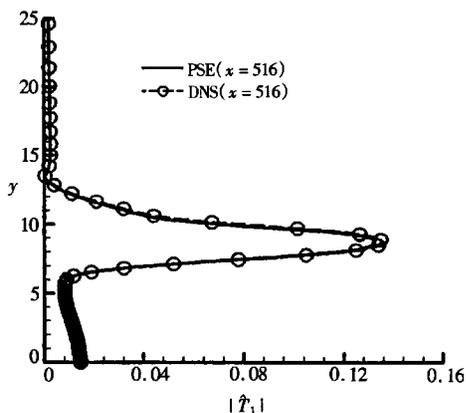


(b) 0 阶扰动温度剖面 T_0

图4 入口下游 $x = 516$ 处 0 阶扰动剖面

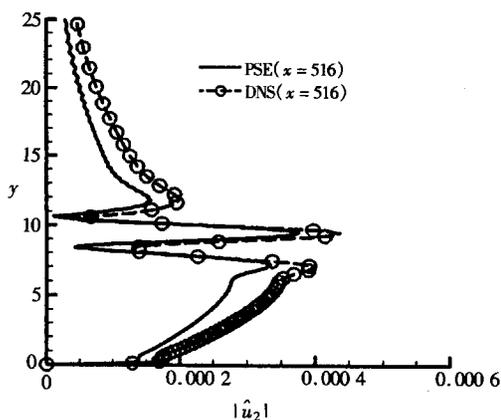


(a) 1阶扰动速度幅值剖面 $|\hat{u}_1|$

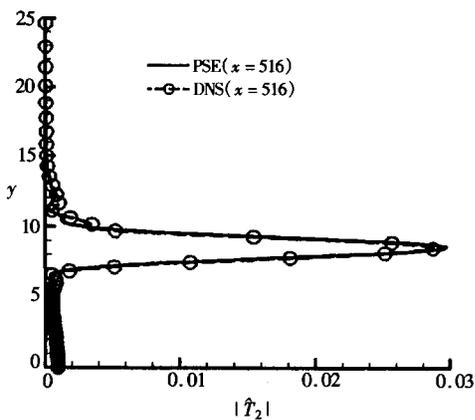


(b) 1阶扰动温度幅值剖面 $|\hat{T}_1|$

图5 入口下游 $x = 516$ 处1阶扰动幅值剖面

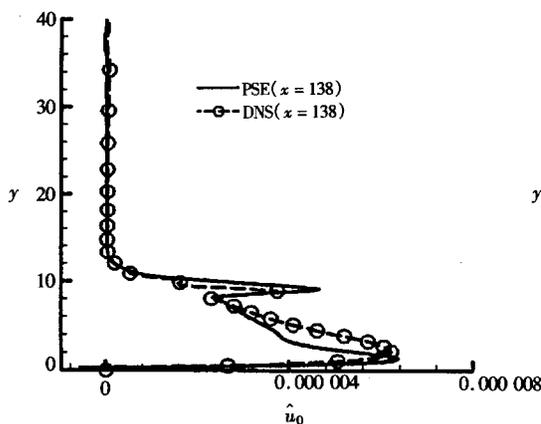


(a) 2阶扰动速度幅值剖面 $|\hat{u}_2|$

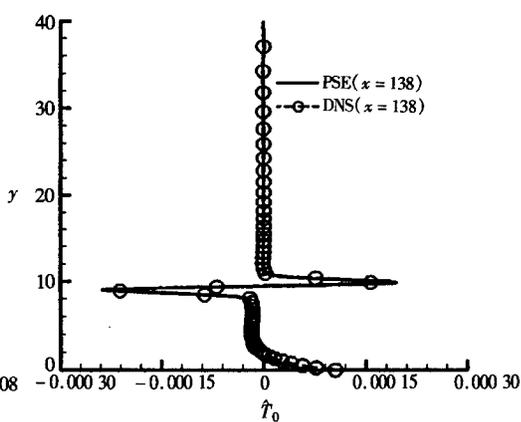


(b) 2阶扰动温度幅值剖面 $|\hat{T}_2|$

图6 入口下游 $x = 516$ 处2阶扰动幅值剖面



(a) 0阶扰动速度剖面 \hat{u}_0



(b) 0阶扰动温度剖面 T_0

图7 入口下游 $x = 138$ 处0阶扰动剖面

由以上3个算例可见, PSE的结果都与DNS的符合或基本符合, 但前者的计算时间比后者至少小1个数量级。另外对每个算例, 还用 Blasius 相似性解作基本流使用 NPSE 计算, 所得结

果不变,这与 DNS 相比又节省了计算定常基本流的时间。

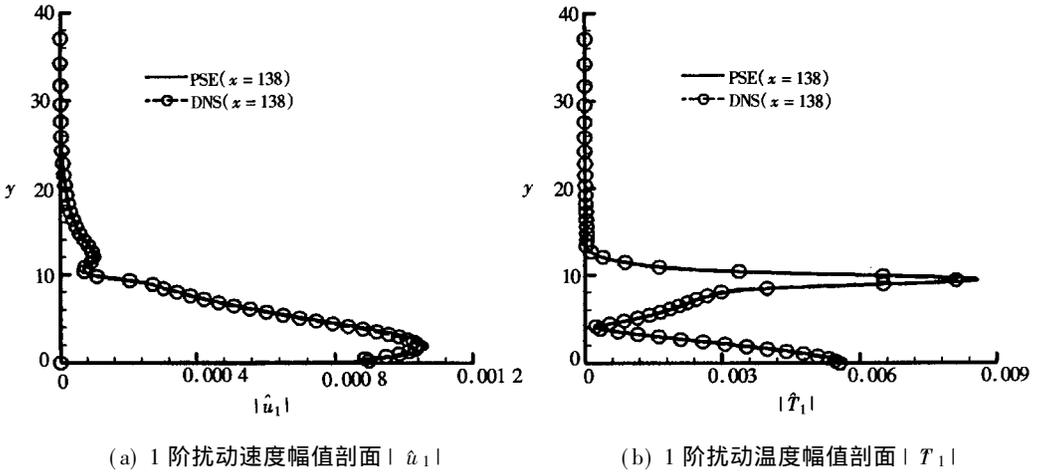


图 8 入口下游 $x = 138$ 处 1 阶扰动幅值剖面

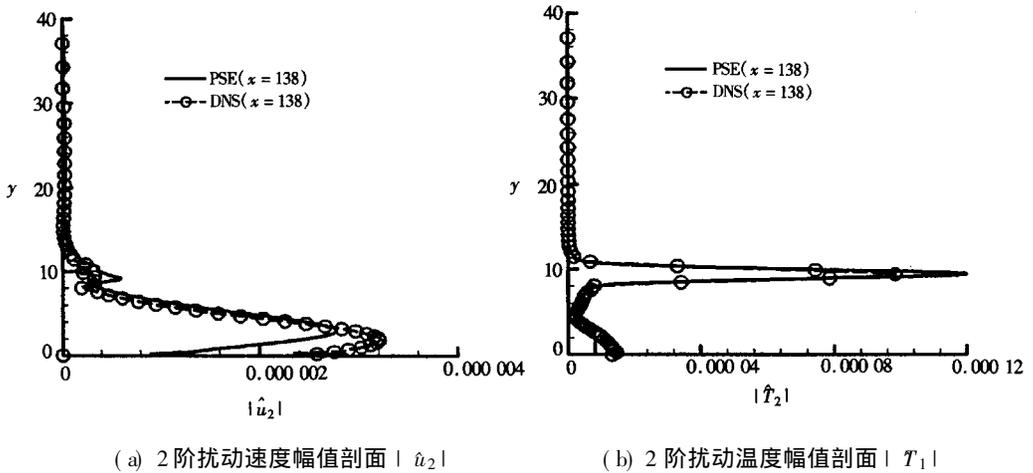


图 9 入口下游 $x = 138$ 处 2 阶扰动幅值剖面

3.2 平板超音速边界层的中性曲线

前面提到,对不可压缩边界层,用 LST 所得的中性曲线与实验不完全相符,这主要是由于 LST 忽略了边界层厚度的增长。现对 Mach 数为 4.5 的超音速边界层,比较用 LTS 及用 LPSE 所得到的第二模态 T-S 波的中性曲线,结果见图 10。LPSE 中性曲线所示的临界 Reynolds 数略小于 LST 的,而在大 Reynolds 数处两条中性曲线逐渐一致。这与不可压平板边界层的结果很相似。由此可见非平行性确实使得临界 Reynolds 数减小,而在大 Reynolds 数处平行流假设仍适用。

4 结 论

由于抛物化稳定性方程考虑了基本流的非平行性,比一般的流动稳定性理论能给出更符合 DNS 结果的扰动演化结果。

对超音速边界层的小扰动问题,用抛物化稳定性方程所得到的临界 Reynolds 数,比线性稳定性理论的结果要小一些,因而中性曲线也有一些不同。其趋势和不可压边界层相似。但因超音速边界层的中性曲线没有实验结果,因而无法与实验结果进行比较。

无论是亚音速还是超音速边界层中扰动的非线性演化问题,用抛物化稳定性方程都可得到与空间模式直接数值模拟基本一致的结果,包括各阶扰动的幅值和剖面。我们只比到2阶。如果比到更高阶,则有一个新的问题。对抛物化稳定性方程来说,阶数有限,但对每一阶波来说,其数值计算的分辨率都不成问题。而对直接数值模拟来说,扰动的阶数可以很高,但对高阶波来说,数值计算的分辨率就可能成问题。

用抛物化稳定性方程计算,所需时间要比用DNS方法的至少小1个数量级。因此,PSE方法在实际工程问题中的应用是值得进一步研究的问题。

致谢 本文图10中的LST中性曲线和部分DNS数据由天津大学力学系博士生闫溟提供,另一部分DNS数据由天津大学力学系黄章峰博士提供,在此仅向他们表示衷心的感谢。

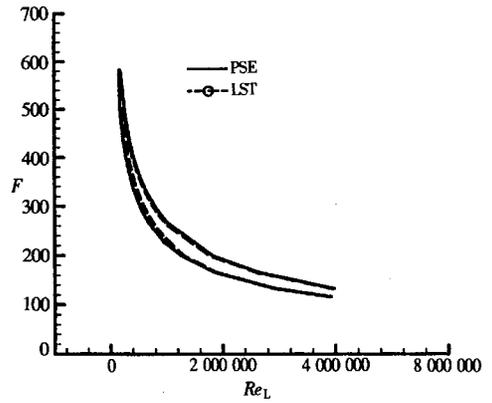


图10 LPSE和LST的中性曲线(当地 Reynolds 数 $Re_L = u_e^* x^* / \nu_e^*$, 无量纲频率 $F = 2\pi f^* \nu_e^* / u_e^* \times 10^6$, f^* 为频率)

附 录

方程(9)中系数矩阵的表达式如下,其中 $\tau = \mu' / T'$ 是基本流温度的函数, Pr 为 Prandtl 数 $Pr = c_p^* \mu_e^* / k_e^*$, γ 是比热比。

$$\begin{aligned}
 D_{11} &= -i\omega + i\alpha u + \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y}, \quad D_{12} = i\alpha\rho + \frac{\partial \rho}{\partial x}, \quad D_{13} = \frac{\partial \rho}{\partial y}, \quad D_{14} = 0, \\
 D_{21} &= u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{i\alpha T}{\gamma Ma^2} + \frac{1}{\gamma Ma^2} \frac{\partial T}{\partial x}, \\
 D_{22} &= -i\alpha\rho + i\alpha Q u + \rho \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{4}{3} \frac{1}{Re} \left(-i \frac{d\alpha}{dx} + \alpha^2 \right) \mu - \frac{4}{3} \frac{i\alpha}{Re_0} \frac{\partial \mu}{\partial x}, \\
 D_{23} &= \rho - \frac{\partial u}{\partial y} - \frac{i\alpha}{Re_0} \frac{\partial \mu}{\partial y}, \\
 D_{24} &= \frac{i\alpha\rho}{\gamma Ma^2} - \frac{i\alpha T}{Re_0} \left[\frac{4}{3} \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{2}{3} \frac{\partial v}{\partial y} \right] + \frac{1}{\gamma Ma^2} \frac{\partial \rho}{\partial x} - \frac{1}{Re_0} \left[\left[\frac{4}{3} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{1}{3} \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} \right] \tau + \left[\frac{4}{3} \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{2}{3} \frac{\partial v}{\partial y} \right] \frac{\partial \tau}{\partial x} + \left[\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right] \frac{\partial \tau}{\partial y} \right], \\
 D_{31} &= u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{1}{\gamma Ma^2} \frac{\partial T}{\partial y}, \quad D_{32} = \rho \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{2}{3} \frac{i\alpha}{Re_0} \frac{\partial \mu}{\partial y}, \\
 D_{33} &= -i\alpha\rho + i\alpha Q u + \rho \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{1}{Re_0} \left(-i \frac{d\alpha}{dx} + \alpha^2 \right) \mu - \frac{i\alpha}{Re_0} \frac{\partial \mu}{\partial x}, \\
 D_{34} &= -\frac{i\alpha T}{Re_0} \left[\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right] + \frac{1}{\gamma Ma^2} \frac{\partial \rho}{\partial y} - \frac{1}{Re_0} \left[\left[\frac{1}{3} \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{4}{3} \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right] \tau + \left[\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right] \frac{\partial \tau}{\partial x} + \left[-\frac{2}{3} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{4}{3} \frac{\partial v}{\partial y} \right] \frac{\partial \tau}{\partial y} \right], \\
 D_{41} &= -\frac{1}{\gamma} \left[u \frac{\partial T}{\partial x} + v \frac{\partial T}{\partial y} \right] - i\omega \frac{1-\gamma T}{\gamma} + i\alpha \frac{1-\gamma T}{\gamma} T u, \\
 D_{42} &= \frac{\rho}{\gamma} \frac{\partial T}{\partial x} + \frac{1-\gamma T}{\gamma} \frac{\partial \rho}{\partial x} + \frac{i\alpha(\gamma-1)Ma^2}{Re} \left(-\frac{8}{3} \mu \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{4}{3} \mu \frac{\partial v}{\partial y} \right), \\
 D_{43} &= \frac{\rho}{\gamma} \frac{\partial T}{\partial y} + \frac{1-\gamma T}{\gamma} \frac{\partial \rho}{\partial y} + \frac{i\alpha(\gamma-1)Ma^2}{Re_0} \left(-2\mu \frac{\partial v}{\partial x} - 2\mu \frac{\partial u}{\partial y} \right),
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 D_{44} = & -i\omega \frac{\rho}{Y} + i\alpha \left\{ \frac{\rho u}{Y} - \frac{1}{Re_0 Pr} \frac{\partial \mu}{\partial x} - \frac{\tau}{Re_0 Pr} \frac{\partial T}{\partial x} \right\} + \frac{1-Y}{Y} \left\{ u \frac{\partial \rho}{\partial x} + v \frac{\partial \rho}{\partial y} \right\} - \\
 & \frac{\tau}{Re_0} \left\{ \frac{1}{Pr} \left[\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \right] + (Y-1) Ma_e^2 \left[\frac{4}{3} \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial x} \right)^2 + \frac{4}{3} \left(\frac{\partial v}{\partial y} \right)^2 - \right. \right. \\
 & \left. \left. \frac{4}{3} \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial y} + 2 \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial v}{\partial x} \right] \right\} - \frac{1}{Re_0 Pr} \left(\frac{\partial T}{\partial x} \frac{\partial \tau}{\partial x} + \frac{\partial T}{\partial y} \frac{\partial \tau}{\partial y} \right) - \left(i \frac{d\alpha}{dx} - \alpha^2 \right) \frac{\mu}{Re_0 Pr}; \\
 A_{11} = & u, A_{12} = \rho, A_{13} = 0, A_{14} = 0, A_{21} = \frac{T}{Y Ma^2}, \\
 A_{22} = & \rho u - \frac{8}{3} \frac{i\alpha}{Re_0} \mu - \frac{4}{3} \frac{1}{Re} \frac{\partial \mu}{\partial x}, A_{23} = -\frac{1}{Re_0} \frac{\partial \mu}{\partial y}, \\
 A_{24} = & \frac{\rho}{Y Ma^2} - \frac{\tau}{Re_0} \left(\frac{4}{3} \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{2}{3} \frac{\partial v}{\partial y} \right), A_{31} = 0, A_{32} = \frac{2}{3} \frac{1}{Re_0} \frac{\partial \mu}{\partial y}, \\
 A_{33} = & \rho u - \frac{2i\alpha}{Re_0} \mu - \frac{1}{Re} \frac{\partial \mu}{\partial x}, A_{34} = -\frac{\tau}{Re_0} \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right), \\
 A_{41} = & \frac{1-Y}{Y} T u, A_{42} = \frac{(Y-1) Ma^2}{Re_0} \left(-\frac{8}{3} \mu \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{4}{3} \mu \frac{\partial v}{\partial y} \right), \\
 A_{43} = & \frac{(Y-1) Ma^2}{Re_0} \left(-2\mu \frac{\partial v}{\partial x} - 2\mu \frac{\partial u}{\partial y} \right), A_{44} = \frac{\rho u}{Y} - \frac{2i\alpha}{Re_0 Pr} \mu - \frac{1}{Re_0 Pr} \frac{\partial \mu}{\partial x} - \frac{\tau}{Re_0 Pr} \frac{\partial T}{\partial x}, \\
 B_{11} = & v, B_{12} = 0, B_{13} = \rho, B_{14} = 0, B_{21} = 0, \\
 B_{22} = & \rho v - \frac{1}{Re_0} \frac{\partial \mu}{\partial y}, B_{23} = -\frac{1}{3} \frac{i\alpha}{Re_0} \mu + \frac{2}{3} \frac{1}{Re_0} \frac{\partial \mu}{\partial x}, B_{24} = -\frac{\tau}{Re_0} \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right), \\
 B_{31} = & \frac{T}{Y Ma^2}, B_{32} = -\frac{1}{3} \frac{i\alpha}{Re_0} \mu - \frac{1}{Re_0} \frac{\partial \mu}{\partial x}, B_{33} = \rho v - \frac{4}{3} \frac{1}{Re_0} \frac{\partial \mu}{\partial y}, \\
 B_{34} = & \frac{\rho}{Y Ma^2} - \frac{\tau}{Re_0} \left(-\frac{2}{3} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{4}{3} \frac{\partial v}{\partial y} \right), B_{41} = \frac{1-Y}{Y} T v, B_{42} = \frac{(Y-1) Ma^2}{Re_0} \left(-2\mu \frac{\partial u}{\partial y} - 2\mu \frac{\partial v}{\partial x} \right), \\
 B_{43} = & \frac{(Y-1) Ma^2}{Re_0} \left(-\frac{8}{3} \mu \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{4}{3} \mu \frac{\partial u}{\partial x} \right), B_{44} = \frac{\rho v}{Y} - \frac{1}{Re_0 Pr} \frac{\partial \mu}{\partial y} - \frac{\tau}{Re_0 Pr} \frac{\partial T}{\partial y}, \\
 V_{yy} = & \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{Re_0} \mu & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{4}{3} \frac{1}{Re_0} \mu & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{Re_0 Pr} \mu \end{pmatrix}.
 \end{aligned}$$

[参 考 文 献]

- [1] Gaster M. On the effects of boundary-layer growth on flow stability[J]. Journal of Fluid Mechanics, 1974, 66(3): 465-480.
- [2] 于秀阳, 周恒. 平板边界层流的非平行性对流动稳定性的影响[J]. 力学学报, 1986, 18(4): 297-306.
- [3] Herbert Th, Bertolotti F P. Stability analysis of nonparallel boundary layers[J]. Bull Am Phys Soc, 1987, 32(11): 2079-2086.
- [4] Bertolotti F P, Herbert Th, Spalart P R. Linear and nonlinear stability of the Blasius boundary layer [J]. Journal of Fluid Mechanics, 1992, 242(1): 441-474.
- [5] Schubauer G B, Skramstad H K. Laminar boundary-layer oscillations and transition on a flat plate [J]. J Res Natl Bur Stand, 1947, 38(1): 251-292.
- [6] Ross J A, Barnes F H, Burns J G, et al. The flat plate boundary layer part-3—comparison of the theory with experiment[J]. Journal of Fluid Mechanics, 1970, 43(4): 819-832.
- [7] Strazisar A J, Reshotko E, Prah J M. Experimental study of the stability of heated laminar boundary layers in water[J]. Journal of Fluid Mechanics, 1977, 83(2): 225-247.

- [8] Kachanov Yu S, Kozlov V V, Levchenko V Ya. Nonlinear development of a wave in a boundary layer [J]. *Fluid Dynamics*, 1977, **12**(3): 383-390.
- [9] Esfahanian V, Hejranfar K, Sabetghadam F. Linear and nonlinear PSE for stability analysis of the Blasius boundary layer using compact scheme[J]. *Journal of Fluids Engineering*, 2001, **123**(3): 545-550.
- [10] Mujeeb R, Malik M R, Choudhari M M, et al. Secondary instability of crossflow vortices and swept-wing boundary-layer transition[J]. *Journal of Fluid Mechanics*, 1999, **399**(1): 85-115.
- [11] Herbert Th. Parabolized stability equations[J]. *Annual Review of Fluid Mechanics*, 1997, **29**(1): 245-283.
- [12] Bertolotti F P, Herbert Th. Analysis of the linear stability of compressible boundary layers using the PSE[J]. *Theoretical and Computational Fluid Dynamics*, 1991, **3**(2): 117-124.
- [13] Bertolotti F P. Compressible boundary layer stability analyzed with the PSE equations[R]. *AIAA Paper*, 1991, 1637.
- [14] Hu S H, Zhong X. Nonparallel stability analysis of compressible boundary layer using 3-D PSE[R]. *AIAA Paper*, 1999, 0813.
- [15] Chang C L, Malik M R, Erlebacher G, et al. Compressible stability of growing boundary layers using parabolized stability equations[R]. *AIAA Paper*, 1991, 1636.
- [16] Li F, Malik M R. On the nature of PSE approximation[J]. *Theoretical and Computational Fluid Dynamics*, 1996, **8**(4): 253-273.
- [17] Haj-Hariri H. Characteristics analysis of the parabolized stability equations[J]. *Studies in Applied Mathematics*, 1994, **92**(1): 41-53.

Verification of the Parabolized Stability Equations for Its Application to Compressible Boundary Layers

ZHANG Yong-ming¹, ZHOU Heng^{1,2}

(1. Department of Mechanics, Tianjin University, Tianjin 300072, P. R. China;

2. LIU Hui Center of Applied Mathematics of Nankai University and Tianjin University, Tianjin 300072, P. R. China)

Abstract: Parabolized stability equations (PSE) were used to study the evolution of disturbances in compressible boundary layers. The results were compared with those obtained by direct numerical simulations(DNs), to check if the results from PSE method were reliable or not. The results of comparison showed that no matter for subsonic or supersonic boundary layers, results from both the PSE method and DNS method agreed with each other reasonably well. And the agreement between temperatures is better than those between velocities. In addition, linear PSE was used to calculate the neutral curve for small amplitude disturbances in a supersonic boundary layer. Compared with those obtained by linear stability theory (LST), the situation is similar to those for incompressible boundary layer.

Key words: parabolized stability equation; direct numerical simulation; linear stability theory