文章编号: 1000-0887(2007) 08-0921-08
© 应用数学和力学编委会, ISSN 1000-0887

解变分不等式的三步松弛混合最速下降法*

丁协平[1], 林炎诚[2], 姚任之[3]

(1. 四川师范大学 数学与软件科学学院, 成都 610066;
2. 中国医药大学 公共教育中心, 台湾 台中 404;
3. 国立中山大学 应用数学系, 台湾 高雄 804)

(我刊编委 丁协平来稿)

摘要: 在 Hilbert 空间的非空闭凸子集上研究了具有 Lipschitz 和强单调算子的经典变分不等式. 为求解此变分不等式引入了一类新的三步松弛混合最速下降法. 在算法参数的适当假设下, 证明了此算法的强收敛性.

关 键 词: 变分不等式; 松弛混合最速下降法; 强收敛; 非扩张映射; Hilbert 空间
中图分类号: O177.92 文献标识码: A

引 言

设 H 是一具有内积 $\langle\cdot,\cdot\rangle$ 和范数 $\|\cdot\|$ 的实 Hilbert 空间, C 是 H 的一非空闭凸子集和 $F: H\to H$ 是一算子. Stampacchia[1] 首先研究了经典变分不等式问题: 求 $u^*\in C$ 使得

$$\mathrm{VI}(F, C),\quad \langle F(u^*), v-u^*\rangle\geqslant 0,\qquad \forall v\in C.$$

自此以后, 因为变分不等式理论适用于很多不同学科, 如偏微分方程、最优控制、最优化、数学规划、力学和金融等, 该理论已经被广泛研究, 例如见文献[1] 至文献[5] 和其中的参考文献. 在 $\mathrm{VI}(F, C)$ 的研究中, 最重要的问题之一是如何求 $\mathrm{VI}(F, C)$ 的解. 对求 $\mathrm{VI}(F, C)$ 解的问题已有大量的工作, 见文献[3] 和文献[5].

已知 $\mathrm{VI}(F, C)$ 等价于不动点方程

$$u^* = P_C(u^*-\mu F(u^*)),$$

其中 P_C 是 H 到 C 的投影算子, 对每一 $x\in H$, $P_C x=\arg\min_{y\in C}\|x-y\|$ 和 $\mu>0$ 是一任意固定常数. 如果 F 在 C 上是 Lipschitz 强单调的和 $\mu>0$ 充分小, 则方程右手边定义的映射是一压缩映射. Banach 压缩映象原理保证了 Picard 迭代按范数收敛于 $\mathrm{VI}(F, C)$ 的唯一解. 称此方法为投影方法. 长时间以来, 投影方法和它的变型已由很多作者广泛研究, 见文献[1] 和文献[3] 至文献[9]. 然而, 由于凸集的复杂性, 不动点方程中的投影 P_C 不容易计算. 为了减少由投影 P_C 引起的复杂性, 最近许多作者引入和研究了一类解 $\mathrm{VI}(F, C)$ 的混合最速下降法,

* 收稿日期: 2006-11-19; 修订日期: 2007-06-25
基金项目: 四川省教育厅重点科研基金资助项目(2003A081); 四川重点学科基金资助项目(0406)
作者简介: 丁协平(1938—), 男, 自贡人, 教授(联系人. Tel: +86-28-84780952; E-mail: xieping_ding@hotmail.com);
林炎诚(1963—), 男, 副教授; 姚任之(1959—), 男, 高雄人, 教授, 博士生导师.

见文献[10]至文献[12]• 受此方向最近研究工作的启发，为寻求 $\mathrm{VI}(F, C)$ 的近似解，我们引入了三步松弛混合最速下降法•

算法 1　设 $\{\alpha_n\} \subset [0, 1)$，$\{\beta_n\}$，$\{\gamma_n\} \subset [0, 1]$，$\{\lambda_n\}$，$\{\lambda_n'\}$，$\{\lambda_n''\} \subset (0, 1)$，并取 3 个固定的数 $t, \rho, \gamma \in (0, 2\eta/\kappa^2)$•　任选初始点 $u_0, v_0, w_0 \in H$，计算序列 $\{u_n\}$、$\{v_n\}$ 和 $\{w_n\}$，

$$\begin{cases} u_{n+1} = \alpha_n u_n + (1-\alpha_n)[Tv_n - \lambda_{n+1} tF(Tv_n)], \\ v_n = \beta_n u_n + (1-\beta_n)[Tw_n - \lambda_{n+1}' \rho F(Tw_n)], \\ w_n = \gamma_n u_n + (1-\gamma_n)[Tu_n - \lambda_{n+1}'' \gamma F(Tu_n)], \end{cases}$$

其中 $T: H \to H$ 是一非扩张映射•　在参数的适当限制下，我们将对算法 1 证明一个强收敛结果•

1　预 备 知 识

为证明本文的主要结果，将需要下面引理•

引理 1.1[13]　设 $\{s_n\}$ 是一满足下面不等式的非负实数序列

$$s_{n+1} \leqslant (1-\alpha_n)s_n + \alpha_n \tau_n + \gamma_n, \qquad \forall n \geqslant 0,$$

其中 $\{\alpha_n\}$、$\{\tau_n\}$ 和 $\{\gamma_n\}$ 满足条件

(i) $\{\alpha_n\} \subset [0, 1]$，$\sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n = \infty$，或等价的，$\prod_{n=0}^{\infty}(1-\alpha_n) = 0$；

(ii) $\limsup_{n\to\infty} \tau_n \leqslant 0$；

(iii) $\{\gamma_n\} \subset [0, \infty)$，$\sum_{n=0}^{\infty} \gamma_n < \infty$；

则有 $\lim_{n\to\infty} s_n = 0$•

引理 1.2[14]　半闭性原理•　假设 T 是 Hilbert 空间 H 的非空闭凸子集 C 上的非扩张自映射•　如果 T 有不动点，则 $I - T$ 是半闭的，即是每当 C 中的一序列 $\{x_n\}$ 弱收敛于 $x \in C$ 和序列 $\{(I-T)x_n\}$ 强收敛于 $y \in H$ 时，有 $(I-T)x = y$，其中 I 是 H 上的恒等算子•

下面引理是内积的直接推论•

引理 1.3　在实 Hilbert 空间 H 中，下面不等式成立

$$\|x+y\|^2 \leqslant \|x\|^2 + 2\langle y, x+y\rangle, \qquad \forall x, y \in H•$$

引理 1.4　设 $\{\alpha_n\}$ 是一非负实数列，满足 $\limsup_{n\to\infty} \alpha_n < \infty$；$\{\beta_n\}$ 是一实数列，满足 $\limsup_{n\to\infty} \beta_n \leqslant 0$•　则 $\limsup_{n\to\infty} \alpha_n \beta_n \leqslant 0$•

证明　我们分两种情形证明结论•

情行 1　$\sup_{j\geqslant n} \beta_j \geqslant 0$，$\forall n \geqslant 0$•　对任意固定的 $n \geqslant 0$，我们观察到

$$\sup_{i\geqslant n} \alpha_i \beta_i \leqslant \sup_{i\geqslant n}\left(\alpha_i \cdot \sup_{j\geqslant n} \beta_j\right) = \left(\sup_{i\geqslant n} \alpha_i\right)\left(\sup_{j\geqslant n} \beta_j\right)•$$

因此当 $n \to \infty$ 时，取极限，我们得到结论•

情形 2　对某 $m_0 \geqslant 0$，$\beta = \sup_{n\geqslant m_0} \beta_n < 0$•　容易看出 $\alpha_n \beta_n \leqslant \alpha_n \beta \leqslant 0$，$\forall n \geqslant m_0$•　这蕴含结论成立•

引理 1.5　C 是 Hilbert 空间 H 的非空闭凸子集•　对任意 $x, y \in H$ 和 $z \in C$，下面陈述成立：

(i) $\langle P_C x - x, z - P_C x\rangle \geqslant 0$；

(ii) $\|P_C x - P_C y\|^2 \leqslant \|x - y\|^2 - \|P_C x - x + y - P_C y\|^2$•

2　收 敛 定 理

设 H 是一 Hilbert 空间，C 是 H 的非空闭凸子集和 $F: H \to H$ 是一算子使得在 C 上对某常

数 $\kappa, \eta > 0$, F 是 κ-Lipschitz 和 η 强单调的, 即 F 满足下面条件:

$$\|Fx - Fy\| \leqslant \kappa \|x - y\|, \qquad \forall x, y \in C,$$

$$\langle Fx - Fy, x - y\rangle \geqslant \eta \|x - y\|^2, \qquad \forall x, y \in C,$$

因为 F 是 η 强单调的, 变分不等式问题 VI(F, C) 有唯一解 $u^* \in C$, 见文献[15]. 假使 $T: H \to H$ 是一具有不动点集 $\mathrm{Fix}(T) = C$ 的非扩张映射. 显然 $\mathrm{Fix}(P_C) = C$. 对任意给定的数 $\lambda \in (0, 1)$ 和 $\mu \in (0, 2\eta/\kappa^2)$, 我们定义映射 $T^\lambda_\mu: H \to H$ 如下:

$$T^\lambda_\mu x := Tx - \lambda\mu F(Tx), \qquad \forall x \in H.$$

引理 2.1[11] 如果 $0 < \lambda < 1$ 和 $0 < \mu < 2\eta/\kappa^2$, 则 T^λ_μ 是一压缩映射.

证明 对任何 $x, y \in H$, 有

$$\|T^\lambda_\mu x - T^\lambda_\mu y\| \leqslant (1 - \lambda\tau)\|x - y\|,$$

其中 $\tau = 1 - \sqrt{1 - \mu(2\eta - \mu\kappa^2)} \in (0, 1)$.

我们现在陈述和证明本文的主要结果.

定理 2.1 假设在算法 1 中的实序列 $\{\alpha_n\}$、$\{\beta_n\}$、$\{\gamma_n\}$、$\{\lambda_n\}$、$\{\lambda'_n\}$、$\{\lambda''_n\}$ 满足下列条件:

(i) $\sum_{n=1}^{\infty}|\alpha_n - \alpha_{n-1}| < \infty$, $\sum_{n=1}^{\infty}|\beta_n - \beta_{n-1}| < \infty$, $\sum_{n=1}^{\infty}|\gamma_n - \gamma_{n-1}| < \infty$;

(ii) $\lim_{n\to\infty}\alpha_n = 0$, $\lim_{n\to\infty}\beta_n = 1$, $\lim_{n\to\infty}\gamma_n = 1$;

(iii) $\lim_{n\to\infty}\lambda_n = 0$, $\lim_{n\to\infty}(\lambda_n/\lambda_{n+1}) = 1$, $\sum_{n\to\infty}\lambda_n = \infty$;

(iv) $\lambda_n \geqslant \max\{\lambda'_n, \lambda''_n\}$, $\forall n \geqslant 1$.

则由算法 1 生成的序列 $\{u_n\}$、$\{v_n\}$ 和 $\{w_n\}$ 强收敛于 u^* 且 u^* 是 VI(F, C) 的唯一解.

证明 因为 F 是 η 强单调的, VI(F, C) 有唯一解 $u^* \in C$. 其次我们分 6 步完成证明.

步 1 $\{u_n\}$、$\{v_n\}$ 和 $\{w_n\}$ 有界. 注意到 $T^{\lambda_{n+1}}_\rho u^* = u^* - \lambda_{n+1}\rho F(u^*)$, 我们有

$$\begin{aligned}
\|u_{n+1} - u^*\| &= \|\alpha_n u_n + (1 - \alpha_n)T^{\lambda_{n+1}}_t v_n - u^*\| \leqslant \\
&\alpha_n\|u_n - u^*\| + (1 - \alpha_n)\|T^{\lambda_{n+1}}_t v_n - u^*\| \leqslant \\
&\alpha_n\|u_n - u^*\| + (1 - \alpha_n)[\|T^{\lambda_{n+1}}_t v_n - T^{\lambda_{n+1}}_t u^*\| + \|T^{\lambda_{n+1}}_t u^* - u^*\|] \leqslant \\
&\alpha_n\|u_n - u^*\| + (1 - \alpha_n)[(1 - \lambda_{n+1}\tau)\|v_n - u^*\| + \lambda_{n+1}t\|F(u^*)\|], \qquad (1)
\end{aligned}$$

其中 $\tau = 1 - \sqrt{1 - t(2\eta - t\kappa^2)} \in (0, 1)$. 而且我们也有

$$\begin{aligned}
\|v_n - u^*\| &= \|\beta_n u_n + (1 - \beta_n)T^{\lambda'_{n+1}}_\rho w_n - u^*\| \leqslant \\
&\beta_n\|u_n - u^*\| + (1 - \beta_n)[\|T^{\lambda'_{n+1}}_\rho w_n - T^{\lambda'_{n+1}}_\rho u^*\| + \|T^{\lambda'_{n+1}}_\rho u^* - u^*\|] \leqslant \\
&\beta_n\|u_n - u^*\| + (1 - \beta_n)[(1 - \lambda'_{n+1}\tau')\|w_n - u^*\| + \lambda'_{n+1}\rho\|F(u^*)\|] \leqslant \\
&\beta_n\|u_n - u^*\| + (1 - \beta_n)\|w_n - u^*\| + (1 - \beta_n)\lambda'_{n+1}\rho\|F(u^*)\|, \qquad (2)
\end{aligned}$$

其中 $\tau' = 1 - \sqrt{1 - \rho(2\eta - \rho\kappa^2)} \in (0, 1)$, 和

$$\begin{aligned}
\|w_n - u^*\| &= \|\gamma_n u_n + (1 - \gamma_n)T^{\lambda''_{n+1}}_\gamma u_n - u^*\| \leqslant \\
&\gamma_n\|u_n - u^*\| + (1 - \gamma_n)[\|T^{\lambda''_{n+1}}_\gamma u_n - T^{\lambda''_{n+1}}_\gamma u^*\| + \|T^{\lambda''_{n+1}}_\gamma u^* - u^*\|] \leqslant \\
&\gamma_n\|u_n - u^*\| + (1 - \gamma_n)[(1 - \lambda''_{n+1}\tau'')\|u_n - u^*\| + \lambda''_{n+1}\gamma\|F(u^*)\|] \leqslant \\
&\gamma_n\|u_n - u^*\| + (1 - \gamma_n)\|u_n - u^*\| + (1 - \gamma_n)\lambda''_{n+1}\gamma\|F(u^*)\| =
\end{aligned}$$

$$\|u_n - u^*\| + (1-\gamma_n)\lambda''_{n+1}\gamma\|F(u^*)\| \leqslant$$
$$\|u_n - u^*\| + \lambda''_{n+1}\gamma\|F(u^*)\|, \tag{3}$$

其中 $\tau'' = 1 - \sqrt{1-\gamma(2\eta - \gamma\kappa^2)} \in (0,1)$. 因此代(3)式入(2)式, 和代(2)和(3)式入(1)式, 我们得到

$$\|v_n - u^*\| \leqslant$$
$$\beta_n\|u_n - u^*\| + (1-\beta_n)[(1-\lambda'_{n+1}\tau')\|w_n - u^*\| + \lambda'_{n+1}\rho\|F(u^*)\|] \leqslant$$
$$\beta_n\|u_n - u^*\| + (1-\beta_n)[(1-\lambda'_{n+1}\tau')(\|u_n - u^*\| +$$
$$\lambda''_{n+1}\gamma\|F(u^*)\|) + \lambda'_{n+1}\rho\|F(u^*)\|] \leqslant$$
$$\|u_n - u^*\| + (1-\beta_n)\max\{\lambda'_{n+1}, \lambda''_{n+1}\}(\gamma+\rho)\|F(u^*)\|, \tag{4}$$

$$\|u_{n+1} - u^*\| \leqslant \alpha_n\|u_n - u^*\| + (1-\alpha_n)\{(1-\lambda_{n+1}\tau)[\|u_n - u^*\| +$$
$$\max\{\lambda'_{n+1}, \lambda''_{n+1}\}(\gamma+\rho)\|F(u^*)\|] + \lambda_{n+1}t\|F(u^*)\|\} \leqslant$$
$$\alpha_n\|u_n - u^*\| + (1-\alpha_n)[(1-\lambda_{n+1}\tau)(\|u_n - u^*\| +$$
$$\max\{\lambda_{n+1}, \lambda'_{n+1}, \lambda''_{n+1}\}(\gamma+\rho+t)\|F(u^*)\|]. \tag{5}$$

由归纳法, 容易推得

$$\|u_n - u^*\| \leqslant M, \qquad \forall n \geqslant 0,$$

其中 $M = \max\{\|u_0 - u^*\|, ((\gamma+\rho+t)/\tau)\|F(u^*)\|\}$. 在此情形, 从(2)和(3)式推得

$$\|v_n - u^*\| \leqslant M + \max\{\lambda'_{n+1}, \lambda''_{n+1}\}(\gamma+\rho)\|F(u^*)\| \leqslant$$
$$M + \tau((\gamma+\rho)/\tau)\|F(u^*)\| \leqslant (1+\tau)M, \qquad \forall n \geqslant 0,$$
$$\|w_n - u^*\| \leqslant M + \lambda''_{n+1}\gamma\|F(u^*)\| \leqslant$$
$$M + \lambda''_{n+1}\tau(\gamma/\tau)\|F(u^*)\| \leqslant (1+\tau)M, \qquad \forall n \geqslant 0.$$

步 2 $\|u_{n+1} - Tu_n\| \to 0$, $n \to \infty$. 的确由步 1, $\{u_n\}$、$\{v_n\}$和$\{w_n\}$是有界的, 且因此$\{Tu_n\}$、$\{Tv_n\}$、$\{Tw_n\}$、$\{F(Tu_n)\}$、$\{F(Tv_n)\}$和$\{F(Tw_n)\}$也有界. 按条件 $\alpha_n \to 0$, $\lambda_n \to 0$和$\beta_n \to 1$, 我们得到

$$\|v_n - u_n\| = \|-(1-\beta_n)u_n + (1-\beta_n)(Tw_n - \lambda'_{n+1}\rho F(Tw_n))\| \leqslant$$
$$(1-\beta_n)\|u_n\| + (1-\beta_n)(\|Tw_n\| + \lambda'_{n+1}\rho\|F(Tw_n)\|) \to 0.$$

从而有

$$\|u_{n+1} - Tu_n\| = \|\alpha_n(u_n - Tu_n) + (1-\alpha_n)(T_t^{\lambda_{n+1}}v_n - Tu_n)\| \leqslant$$
$$\alpha_n\|u_n - Tu_n\| + (1-\alpha_n)\|Tv_n - Tu_n\| + (1-\alpha_n)\lambda_{n+1}t\|F(Tv_n)\| \leqslant$$
$$\alpha_n\|u_n - Tu_n\| + \|v_n - u_n\| + \lambda_{n+1}t\|F(Tv_n)\| \to 0.$$

步 3 $\|u_{n+1} - u_n\| \to 0$, $n \to \infty$. 的确, 由简单的计算, 我们能得到

$$\|w_n - w_{n-1}\| = \|\gamma_n u_n - \gamma_{n-1}u_{n-1} + (1-\gamma_n)T_\gamma^{\lambda''_{n+1}}u_n - (1-\gamma_{n-1})T_\gamma^{\lambda''_n}u_{n-1}\| \leqslant$$
$$\|\gamma_n u_n - \gamma_{n-1}u_{n-1}\| + \|(1-\gamma_n)T_\gamma^{\lambda''_{n+1}}u_n - (1-\gamma_{n-1})T_\gamma^{\lambda''_n}u_{n-1}\| \leqslant$$
$$\|u_n - u_{n-1}\| + |(1-\gamma_n)\lambda''_{n+1} - (1-\gamma_{n-1})\lambda''_n| \cdot \gamma\|F(Tu_{n-1})\| +$$
$$|\gamma_n - \gamma_{n-1}| \cdot (\|u_{n-1}\| + \|Tu_{n-1}\|),$$

$$\|v_n - v_{n-1}\| = \|\beta_n u_n - \beta_{n-1}u_{n-1} + (1-\beta_n)T_\rho^{\lambda'_{n+1}}w_n - (1-\beta_{n-1})T_\rho^{\lambda'_n}w_{n-1}\| \leqslant$$
$$\|\beta_n u_n - \beta_{n-1}u_{n-1}\| + \|(1-\beta_n)T_\rho^{\lambda'_{n+1}}w_n - (1-\beta_{n-1})T_\rho^{\lambda'_n}w_{n-1}\| \leqslant$$
$$\|u_n - u_{n-1}\| + |\beta_n - \beta_{n-1}| \cdot (\|u_{n-1}\| + \|Tw_{n-1}\| + \|Tw_n\|) +$$

$$|(1-\beta_n)(1-\lambda'_{n+1}\tau')|\,\|\gamma_n-\gamma_{n-1}\|(\|u_{n-1}\|+\|Tu_{n-1}\|)+$$
$$(1-\beta_n)(1-\lambda'_{n+1}\tau')|(1-\gamma_n)\lambda''_{n+1}-(1-\gamma_{n-1})\lambda''_n|\cdot\gamma\|F(Tu_{n-1})\|+$$
$$|(1-\beta_n)\lambda'_{n+1}-(1-\beta_{n-1})\lambda'_n|\cdot\rho(\|F(Tw_{n-1})\|)\cdot$$

因此从上面不等式推得

$$\|u_{n+1}-u_n\|=\|\alpha_n u_n-\alpha_{n-1}u_{n-1}+(1-\alpha_n)T_t^{\lambda_{n+1}}v_n-(1-\alpha_{n-1})T_t^{\lambda_n}v_{n-1}\|\leqslant$$
$$\alpha_n\|u_n-u_{n-1}\|+|\alpha_n-\alpha_{n-1}|\cdot\|u_{n-1}\|+$$
$$(1-\alpha_n)(1-\lambda_{n+1}\tau)\|v_n-v_{n-1}\|+|\alpha_n-\alpha_{n-1}|\cdot\|Tv_{n-1}\|+$$
$$|(1-\alpha_n)\lambda_{n+1}-(1-\alpha_{n-1})\lambda_n|\cdot t\|F(Tv_{n-1})\|\leqslant$$
$$\alpha_n\|u_n-u_{n-1}\|+|\alpha_n-\alpha_{n-1}|\cdot(\|u_{n-1}\|+\|Tv_{n-1}\|)+$$
$$(1-\alpha_n)(1-\lambda_{n+1}\tau)[\|u_n-u_{n-1}\|+$$
$$|\beta_n-\beta_{n-1}|\cdot(\|u_{n-1}\|+\|Tw_{n-1}\|+\|Tw_n\|)+$$
$$(1-\beta_n)(1-\lambda'_{n+1}\tau')\|\gamma_n-\gamma_{n-1}\|(\|u_{n-1}\|+\|Tu_{n-1}\|)+$$
$$(1-\beta_n)(1-\lambda'_{n+1}\tau')|(1-\gamma_n)\lambda''_{n+1}-(1-\gamma_{n-1})\lambda''_n|\cdot\gamma\|F(Tu_{n-1})\|+$$
$$|(1-\beta_n)\lambda'_{n+1}-(1-\beta_{n-1})\lambda'_n|\cdot\rho(\|F(Tw_{n-1})\|)]+$$
$$|(1-\alpha_n)\lambda_{n+1}-(1-\alpha_{n-1})\lambda_n|\cdot t\|F(Tv_{n-1})\|\cdot$$

因此我们有

$$\|u_{n+1}-u_n\|\leqslant(1-(1-\alpha_n)\lambda_{n+1}\tau)\|u_n-u_{n-1}\|+$$
$$|\alpha_n-\alpha_{n-1}|(\|u_{n-1}\|+\|Tv_{n-1}\|)+|\beta_n-\beta_{n-1}|(\|u_{n-1}\|+$$
$$\|Tw_{n-1}\|+\|Tw_n\|)+|\gamma_n-\gamma_{n-1}|(\|u_{n-1}\|+\|Tu_{n-1}\|)+$$
$$|(1-\gamma_n)\lambda''_{n+1}-(1-\gamma_{n-1})\lambda''_n|\gamma\|F(Tu_{n-1})\|+$$
$$|(1-\beta_n)\lambda'_{n+1}-(1-\beta_{n-1})\lambda'_n|\rho\|F(Tw_{n-1})\|+$$
$$|(1-\alpha_n)\lambda_{n+1}-(1-\alpha_{n-1})\lambda_n|t\|F(Tv_{n-1})\|\cdot$$

令

$$\xi=\sup\Big\{\|u_n\|+\|Tu_n\|+\|Tv_n\|+$$
$$\|Tw_n\|+\|F(Tu_n)\|+\|F(Tv_n)\|+\|F(Tw_n)\|:n\geqslant0\Big\},$$
$$M=\|u^*\|+(\rho+\gamma+t)\|F(u^*)\|+\xi,$$

我们得到

$$\|u_{n+1}-u_n\|\leqslant(1-(1-\alpha_n)\lambda_{n+1}\tau)\|u_n-u_{n-1}\|+$$
$$((1-\alpha_n)\lambda_{n+1}\tau)\nu_n+\delta_n,$$

其中

$$\delta_n=|\alpha_n-\alpha_{n-1}|\cdot(\|u_{n-1}\|+\|Tv_{n-1}\|)+$$
$$|\beta_n-\beta_{n-1}|\cdot(\|u_{n-1}\|+\|Tw_{n-1}\|+\|Tw_n\|)+$$
$$|\gamma_n-\gamma_{n-1}|\cdot(\|u_{n-1}\|+\|Tu_{n-1}\|)\leqslant$$
$$M(|\alpha_n-\alpha_{n-1}|+|\beta_n-\beta_{n-1}|+|\gamma_n-\gamma_{n-1}|)\to0,$$

$$\nu_n\leqslant\frac{tM|(1-\alpha_n)\lambda_{n+1}-(1-\alpha_{n-1})\lambda_n|}{(1-\alpha_n)\lambda_{n+1}\tau}+\frac{\rho M|(1-\beta_n)\lambda'_{n+1}-(1-\beta_{n-1})\lambda'_n|}{(1-\alpha_n)\lambda_{n+1}\tau}+$$
$$\frac{\gamma M|(1-\gamma_n)\lambda''_{n+1}-(1-\gamma_{n-1})\lambda''_n|}{(1-\alpha_n)\lambda_{n+1}\tau}=$$
$$\frac{tM}{\tau}\left|1-\frac{1-\alpha_{n-1}}{1-\alpha_n}\frac{\lambda_n}{\lambda_{n+1}}\right|+\frac{\rho M}{\tau}\left[\frac{(1-\beta_n)\lambda'_{n+1}}{(1-\alpha_n)\lambda_{n+1}}-\frac{(1-\beta_{n-1})\lambda'_n}{(1-\alpha_n)\lambda_{n+1}}\right]+$$

$$\frac{\gamma M}{\tau}\left[\frac{(1-\gamma_n)\lambda''_{n+1}}{(1-\alpha_n)\lambda_{n+1}}-\frac{(1-\gamma_{n-1})\lambda''_n}{(1-\alpha_n)\lambda_{n+1}}\right]\leqslant$$
$$\frac{tM}{\tau}\left|1-\frac{1-\alpha_{n-1}}{1-\alpha_n}\frac{\lambda_n}{\lambda_{n+1}}\right|+\frac{\rho M}{\tau}\left|\frac{1-\beta_n}{1-\alpha_n}\frac{\lambda'_{n+1}}{\lambda_{n+1}}-\frac{1-\beta_{n-1}}{1-\alpha_n}\frac{\lambda'_n}{\lambda_{n+1}}\right|+$$
$$\frac{\gamma M}{\tau}\left|\frac{1-\gamma_n}{1-\alpha_n}\frac{\lambda''_{n+1}}{\lambda_{n+1}}-\frac{1-\gamma_{n-1}}{1-\alpha_n}\frac{\lambda''_n}{\lambda_{n+1}}\right|\to 0.$$

利用条件 $\alpha_n\to 0$, $\beta_n\to 1$, $\gamma_n\to 1$, $\max\{\lambda'_n,\lambda''_n\}\leqslant\lambda_n(n\geqslant 1)$ 和 $(\lambda_n/\lambda_{n+1})\to 1$ 并且注意到 $\sum_{n=0}^{\infty}\lambda_n=\infty$ 蕴涵 $\sum_{n=0}^{\infty}(1-\alpha_n)\lambda_{n+1}=\infty$, 和条件 $\sum_{n=1}^{\infty}|\alpha_n-\alpha_{n-1}|<\infty$, $\sum_{n=1}^{\infty}|\beta_n-\beta_{n-1}|<\infty$ 和 $\sum_{n=1}^{\infty}|\gamma_n-\gamma_{n-1}|<\infty$ 蕴涵 $\sum_{n=1}^{\infty}\delta_n<\infty$. 由引理 1.1, 我们推得 $\|u_{n+1}-u_n\|\to 0$.

步 4 $\|u_n-Tu_n\|\to 0$. 这是步 2 和步 3 的直接推论.

步 5 $\limsup_{n\to\infty}\langle -F(u^*),Tv_n-u^*\rangle\leqslant 0$. 为证明此结论, 我们选出 $\{Tu_n\}$ 的一子序列 $\{Tu_{n_i}\}$ 使得

$$\limsup_{n\to\infty}\langle -F(u^*),Tu_n-u^*\rangle=\lim_{i\to\infty}\langle -F(u^*),Tu_{n_i}-u^*\rangle.$$

不失一般性, 我们可进一步假设对某 $u\in H$, Tu_{n_i} 弱收敛到 u. 由步 4, 我们推得 u_{n_i} 弱收敛到 u. 但由引理 1.2 和步 4, 我们有 $u\in \mathrm{Fix}(T)=C$. 因为 u^* 是 VI(F,C) 的唯一解, 我们得到

$$\limsup_{n\to\infty}\langle -F(u^*),Tu_n-u^*\rangle=\langle -F(u^*),u-u^*\rangle\leqslant 0.$$

因为从步 2 的证明推得

$$\|Tv_n-Tu_n\|\leqslant\|v_n-u_n\|\to 0,\qquad n\to\infty,$$

我们立即推得

$$\limsup_{n\to\infty}\langle -F(u^*),Tv_n-u^*\rangle=$$
$$\limsup_{n\to\infty}[\langle -F(u^*),Tv_n-Tu_n\rangle+\langle -F(u^*),Tu_n-u^*\rangle]=$$
$$\lim_{n\to\infty}\langle -F(u^*),Tv_n-Tu_n\rangle+\limsup_{n\to\infty}\langle -F(u^*),Tu_n-u^*\rangle=$$
$$\limsup_{n\to\infty}\langle -F(u^*),Tu_n-u^*\rangle\leqslant 0.$$

步 6 按范数 $u_n\to u^*$ 和 $v_n\to u^*$. 的确, 用引理 1.3 和简单的计算, 我们能得到

$$\|u_{n+1}-u^*\|^2=\|\alpha_n(u_n-u^*)+(1-\alpha_n)(T_t^{\lambda_{n+1}}v_n-u^*)\|^2\leqslant$$
$$\alpha_n\|u_n-u^*\|^2+(1-\alpha_n)[\|T_t^{\lambda_{n+1}}v_n-T_t^{\lambda_{n+1}}u^*\|^2+$$
$$2\langle T_t^{\lambda_{n+1}}u^*-u^*,T_t^{\lambda_{n+1}}v_n-T_t^{\lambda_{n+1}}u^*\rangle+\|T_t^{\lambda_{n+1}}u^*-u^*\|^2]\leqslant$$
$$\alpha_n\|u_n-u^*\|^2+(1-\alpha_n)(1-\lambda_{n+1}\tau)^2\|v_n-u^*\|^2+$$
$$2t\lambda_{n+1}\langle -F(u^*),Tv_n-u^*-\lambda_{n+1}tF(Tv_n)\rangle\leqslant$$
$$\alpha_n\|u_n-u^*\|^2+(1-\alpha_n)(1-\lambda_{n+1}\tau)^2[\|u_n-u^*\|+$$
$$(1-\beta_n)\max\{\lambda'_{n+1},\lambda''_{n+1}\}(\gamma+\rho)\|F(u^*)\|]^2+$$
$$2t\lambda_{n+1}\langle -F(u^*),Tv_n-u^*-\lambda_{n+1}tF(Tv_n)\rangle\leqslant$$
$$(\alpha_n+(1-\alpha_n)(1-\lambda_{n+1}\tau))\|u_n-u^*\|^2+2(1-\alpha_n)(1-$$
$$\lambda_{n+1}\tau)^2(1-\beta_n)\max\{\lambda'_{n+1},\lambda''_{n+1}\}(\gamma+\rho)\|F(u^*)\|\|u_n-u^*\|+$$
$$(1-\alpha_n)(1-\beta_n)^2(1-\lambda_{n+1}\tau)^2(\max\{\tau\lambda'_{n+1},\lambda''_{n+1}\})^2(\gamma+\rho)^2\|F(u^*)\|^2+$$

$$2t\lambda_{n+1}\langle -F(u^*), Tv_n - u^* - \lambda_{n+1}tF(Tv_n)\rangle \leqslant$$
$$(1-(1-\alpha_n)\lambda_{n+1}\tau)\|u_n - u^*\|^2 +$$
$$(1-\alpha_n)\lambda_{n+1}\tau\left[\frac{2t\langle -F(u^*), Tv_n - u^* - \lambda_{n+1}tF(Tv_n)\rangle}{\tau(1-\alpha_n)} +\right.$$
$$\frac{2(1-\beta_n)(1-\lambda_{n+1}\tau)^2\max\{\lambda'_{n+1}, \lambda''_{n+1}\}(\gamma+\rho)M^2}{\tau\lambda_{n+1}} +$$
$$\frac{(1-\beta_n)^2(1-\lambda_{n+1}\tau)^2(\max\{\lambda'_{n+1}, \lambda''_{n+1}\})^2(\gamma+\rho)^2M^2}{\tau\lambda_{n+1}} \leqslant$$
$$(1-(1-\alpha_n)\lambda_{n+1}\tau)\|u_n - u^*\|^2 +$$
$$(1-\alpha_n)\lambda_{n+1}\tau\left[\frac{2t\langle -F(u^*), Tv_n - u^* - \lambda_{n+1}tF(Tv_n)\rangle}{\tau(1-\alpha_n)} +\right.$$
$$\frac{2}{\tau}(1-\beta_n)(1-\lambda_{n+1}\tau)^2(\gamma+\rho)M^2 +$$
$$\left.\frac{1}{\tau}(1-\beta_n)^2(1-\lambda_{n+1}\tau)^2(\max\{\lambda'_{n+1}, \lambda''_{n+1}\})^2(\gamma+\rho)^2M^2\right].$$

因为 $\lim_{n\to\infty}\alpha_n = \lim_{n\to\infty}\lambda_n = 0$, $\limsup_{n\to\infty}\langle -F(u^*), Tv_n - u^*\rangle \leqslant 0$ 和 $\{F(Tv_n)\}$ 有界，由引理1.4推得

$$\limsup_{n\to\infty}\left(\frac{2t\langle -F(u^*), Tv_n - u^* - \lambda_{n+1}tF(Tv_n)\rangle}{\tau(1-\alpha_n)} + \frac{2(1-\beta_n)(1-\lambda_{n+1}\tau)^2(\gamma+\rho)M^2}{\tau} + \frac{(1-\beta_n)^2(1-\lambda_{n+1}\tau)^2(\max\{\lambda'_{n+1}, \lambda''_{n+1}\})^2(\gamma+\rho)^2M^2}{\tau}\right) \leqslant$$
$$\limsup_{n\to\infty}\frac{2t}{\tau(1-\alpha_n)}\langle -F(u^*), Tv_n - u^*\rangle +$$
$$\limsup_{n\to\infty}\frac{2t^2\lambda_{n+1}}{\tau(1-\alpha_n)}\langle -F(u^*), -F(Tv_n)\rangle \leqslant 0 + 0 = 0.$$

由此从引理1.1我们得到 $\|u_n - u^*\| \to 0$ 且因此从 $\|u_n - v_n\| \to 0$ 和 $\|u_n - w_n\| \to 0$ 推得 $\|v_n - u^*\| \to 0$ 和 $\|w_n - u^*\| \to 0$.

最后我们注意到定理2.1能被应用到约束广义伪逆问题. 对详细情行, 读者可参考文献[10]至文献[12].

[参 考 文 献]

[1] Kinderlehrer D, Stampacchia G. An Introduction to Variational Inequalities and Their Applications [M]. New York: Academic Press, 1980.

[2] 张石生. 变分不等式和相补问题理论及应用[M]. 上海: 上海科技文献出版社, 1991.

[3] Glowinski R. Numerical Methods for Nonlinear Variational Problems [M]. New York: Springer, 1984.

[4] Jaillet P, Lamberton D, Lapeyre B. Variational inequalities and the pricing of American options[J]. Acta Applicandae Mathematicae, 1990, **21**(2): 263-289.

[5] Konnov I. Combined Relaxation Methods for Variational Inequalities [M]. Berlin: Springer, 2001.

[6] Oden J T. Qualitative Methods on Nonlinear Mechanics [M]. New Jersey: Prentice-Hall, Englewood Cliffs, 1986.

[7] Zeng L C. Iterative algorithm for finding approximate solutions to completely generalized strongly

nonlinear quasivariational inequalities[J]. Journal of Mathematical Analysis and Applications, 1996, **201**(1): 180-194.

[8] Zeng L C. Completely generalized strongly nonlinear quasi-complementarity problems in Hilbert spaces[J]. Journal of Mathematical Analysis and Applications, 1995, **193**(3): 706-714.

[9] Zeng L C. On a general projection algorithm for variational inequalities[J]. Journal of Optimization Theory and Applications, 1998, **97**(2): 229-235.

[10] Xu H K, Kim T H. Convergence of hybrid steepest-descent methods for variational inequalities[J]. Journal of Optimization Theory and Applications, 2003, **119**(1): 185-201.

[11] Yamada I. The hybrid steepest-descent method for variational inequality problems over the intersection of the fixed-point sets of nonexpansive mappings[A]. In: Butnariu D, Censor Y, Reich S, Eds. Inherently Parallel Algorithms in Feasibility and Optimization and Their Applications[C]. Amsterdam: North-Holland, 2001, 473-504.

[12] Zeng L C, Wong N C, Yao J C. Convergence analysis of modified hybrid steepest-descent methods with variable parameters for variational inequalities[J]. Journal of Optimization Theory and Applications, 2007, **132**(1): 51-69.

[13] Xu H K. Iterative algorithms for nonlinear operators[J]. Journal of London Mathematical Society, 2002, **66**(2): 240-256.

[14] Geobel K, Kirk W A. Topics on Metric Fixed-Point Theory[M]. Cambridge: Cambridge University Press, 1990.

[15] Yao J C. Variational inequalities with generalized monotone operators[J]. Mathematics of Operations Research, 1994, **19**: 691-705.

Three-Step Relaxed Hybrid Steepest-Descent Methods for Variational Inequalities

DING Xie-ping[1], LIN Yen-cherng[2], YAO Jen-chih[3]

(1. College of Mathematics and Software Science, Sichuan Normal University, Chengdu 610066, P.R. China;
2. General Education Center, China Medical University, Taichung 404, Taiwan, China;
3. Department of Applied Mathematics, National Sun Yat-sen University, Kaohsiung 804, Taiwan, China)

Abstract: The classical variational inequality problem with a Lipschitzian and strongly monotone operator on a nonempty closed convex subset in a real Hilbert space was studied. A new three-step relaxed hybrid steepest-descent method for this class of variational inequalities was introduced. Strong convergence of this method was established under suitable assumptions imposed on the algorithm parameters.

Key words: variational inequality; relaxed hybrid steepest-descent method; strong convergence; nonexpansive mapping; Hilbert space