

一个低阶各向异性有限元的超收敛分析*

朱国庆, 石东洋, 陈绍春

(郑州大学 数学系, 郑州 450052)

(郭兴明推荐)

摘要: 针对二阶椭圆问题, 在各向异性网格上得到了由 Park 和 Sheen 提出的一个低阶非协调单元的收敛性分析, 并给出了相应的误差估计. 进一步利用插值后处理技巧, 得到了后处理后的离散解与真解本身的整体超收敛性质. 最后的数值试验验证了理论的可靠性.

关键词: 非协调有限元; 各向异性; 误差估计; 插值后处理; 超收敛

中图分类号: O242.21 文献标识码: A

引言

有限元方法是目前科学与工程计算中使用最多的数值方法之一, 其收敛性分析基于对容许的网格剖分的正则性要求和拟一致假设^[1-2], 即

$$h_K/\rho_K \leq C, \quad h/h \leq C_1, \quad (1)$$

这里 K 为单元, h_K 和 ρ_K 分别是 K 的直径和最大内切圆直径, C 和 C_1 是不依赖于 $h = \max_K \{h_K\}$ 和 $h = \min_K \{h_K\}$ 及所考虑的函数的正常数. 这就很大程度上限制了其应用范围. 比如复合材料问题, 在上述条件之下, 要达到满意的逼近结果, 需要对剖充分加密, 导致所需要的计算工作量是相当大的. 近年来人们发现, 一方面此条件对于许多单元来说不是必须的, 另一方面一些问题的真解本身在一些区域具有各向异性特征, 此时使用各向异性剖分网格来反映这种各向异性特征更为合适. 在这方面, 文献[3]至文献[7]分别对协调有限元和非协调有限元的理论及应用方面作出了许多有意义的工作.

最近 Park 和 Sheen 针对二阶椭圆问题提出了一个新的低阶非协调单元^[8], 得到了最优的收敛阶. 但是其中所有的分析都是在正则网格下进行的. 本文首先给出此单元对二阶问题各向异性网格下的误差估计, 进一步分析了其各向异性网格下的超逼近性质, 并巧妙地利用插值后处理技巧^[9], 得到了后处理后的离散解与真解本身的整体超收敛性质. 最后的数值试验验证了我们理论的可靠性.

1 单元构造及各向异性插值分析

为了简便起见, 我们假设 Ω 是有界矩形区域, 其边界 $\partial\Omega$ 分别平行于 x 轴和 y 轴. $\mathcal{T}_h =$

* 收稿日期: 2006-10-12; 修订日期: 2007-06-11

基金项目: 国家自然科学基金资助项目(10371113; 10471133; 10590353)

作者简介: 朱国庆(1978—), 男, 河南南阳人, 博士生(联系人. Tel: + 86-371-67767923; E-mail: zhuguoqing7143@163.com).

$\{K\}$ 是 Ω 的矩形单元剖分族, $\Omega = \bigcup_{K \in \mathcal{T}_h} K$, 不要求满足以往文献中的正则性假设.

对任意固定的 $K \in \mathcal{T}_h$, 中心点记为 (x_K, y_K) , 4 个顶点分别记为 $a_i(x_i, y_i)$, $i = 1, 2, 3, 4$; 其 4 条边记为 $l_1 = \overline{a_1 a_2}$, $l_2 = \overline{a_2 a_3}$, $l_3 = \overline{a_3 a_4}$, $l_4 = \overline{a_4 a_1}$, 平行于 x 轴和 y 轴边的边长分别为 $2h_x$ 、 $2h_y$. K 是 $\xi\eta$ 平面上的参考元, 中心点为原点 $(0, 0)$, 4 个顶点依次为 $\hat{a}_1(-1, -1)$ 、 $\hat{a}_2(1, -1)$ 、 $\hat{a}_3(1, 1)$ 、 $\hat{a}_4(-1, 1)$, 相应的 4 条边记为 $\hat{l}_1 = \overline{\hat{a}_1 \hat{a}_2}$ 、 $\hat{l}_2 = \overline{\hat{a}_2 \hat{a}_3}$ 、 $\hat{l}_3 = \overline{\hat{a}_3 \hat{a}_4}$ 、 $\hat{l}_4 = \overline{\hat{a}_4 \hat{a}_1}$.

在 K 上, 我们定义有限元 (K, P, Σ) 如下: $P(K) = \text{span}\{1, \xi, \eta\}$, 且 $\Sigma = \{\hat{v}_1, \hat{v}_2, \hat{v}_3, \hat{v}_4\}$, 其中 $\hat{v}_i = \frac{1}{|\hat{l}_i|} \int_{\hat{l}_i} \hat{v} ds$, $1 \leq i \leq 4$. K 上的插值函数为^[8]

$$\hat{v} = \left[\frac{1}{4} - \frac{1}{2} \eta \right] \hat{v}_1 + \left[\frac{1}{4} + \frac{1}{2} \xi \right] \hat{v}_2 + \left[\frac{1}{4} + \frac{1}{2} \eta \right] \hat{v}_3 + \left[\frac{1}{4} - \frac{1}{2} \xi \right] \hat{v}_4. \quad (2)$$

作双参数^[10] 离散 $\hat{v}_i = (\hat{v}(\hat{a}_i) + \hat{v}(\hat{a}_{i+1}))/2$, $i = 1, \dots, 4$, 则 K 上的插值函数为

$$\begin{aligned} \mathbb{I}\hat{v} &= \frac{1}{4} \sum_{i=1}^4 \hat{v}(\hat{a}_i) + \frac{1}{4} (\hat{v}(\hat{a}_2) + \hat{v}(\hat{a}_3) - \hat{v}(\hat{a}_4) - \hat{v}(\hat{a}_1)) \xi + \\ &\quad \frac{1}{4} (\hat{v}(\hat{a}_3) + \hat{v}(\hat{a}_4) + \hat{v}(\hat{a}_1) - \hat{v}(\hat{a}_2)) \eta. \end{aligned} \quad (3)$$

这里有以下关系:

$$\frac{1}{|\hat{l}_1|} \int_{\hat{l}_1} \mathbb{I}\hat{v} ds + \frac{1}{|\hat{l}_3|} \int_{\hat{l}_3} \mathbb{I}\hat{v} ds = \frac{1}{|\hat{l}_2|} \int_{\hat{l}_2} \mathbb{I}\hat{v} ds + \frac{1}{|\hat{l}_4|} \int_{\hat{l}_4} \mathbb{I}\hat{v} ds.$$

我们简记 $h_K = \max\{h_x, h_y\}$, $h = \max_{K \in \mathcal{T}_h} \{h_K\}$, 于是双线性变换 $F_K: K \rightarrow K$ 定义为

$$x = x_K + h_x \xi, \quad y = y_K + h_y \eta.$$

相应的有限元空间取为

$$V_h = \left\{ v_h; v_h|_K \circ F_K = \hat{v}_h \in P, \forall K \in \mathcal{T}_h, \int_F [v_h] ds = 0, F \subset \partial K \right\}, \quad (4)$$

其中 F 是内边时, $[v_h]$ 代表 v_h 在 F 上的跳跃值, F 位于外边界时, $[v_h]$ 等于自身. 插值算子

$\Pi_h: H^2(\Omega) \rightarrow V_h$ 定义为

$$\Pi_h|_K = \mathbb{I}\hat{v}_h, \quad \Pi_h: H^2(K) \rightarrow P \circ F_K^{-1}, \quad \Pi_h v = (\mathbb{I}\hat{v}) \circ F_K^{-1}, \quad \forall v \in H^2(\Omega). \quad (5)$$

此单元具有下列各向异性插值性质:

引理 1.1 由(3)式定义的插值算子 Π 具有各向异性插值性质, 即对 $|\alpha| = 1$, 有

$$\|D^\alpha(\hat{v} - \mathbb{I}\hat{v})\|_{0,K} \leq C |D^\alpha \hat{v}|_{1,K}, \quad (6)$$

这里及以后出现的 C 代表不依赖于 h_K 和 h_K/Ω , $\forall K \in \mathcal{T}_h$ 的正常数, 不同的地方可以取不同值.

证明 由(3)式, 对任意 $\hat{v} \in H^1(K)$, 当 $\alpha = (1, 0)$ 时,

$$D^\alpha \mathbb{I}\hat{v} = \frac{1}{4} (\hat{v}(\hat{a}_2) + \hat{v}(\hat{a}_3) - \hat{v}(\hat{a}_4) - \hat{v}(\hat{a}_1)) = \frac{1}{4} \left[\int_{\hat{l}_1} \frac{\partial \hat{v}}{\partial \xi} d\xi + \int_{\hat{l}_3} \frac{\partial \hat{v}}{\partial \xi} d\xi \right].$$

由于对任意 $\omega \in H^1(K)$, 取 $F_1(\omega) = \int_{\hat{l}_1} \omega d\xi + \int_{\hat{l}_3} \omega d\xi$ 则 $F_1(\omega) \in (H^1(K))'$. 根据文献[6]

中提出的各向异性判别定理, 我们得到

$$\|D^\alpha(\hat{v} - \mathbb{I}\hat{v})\|_{0,K} \leq C |D^\alpha \hat{v}|_{1,K}.$$

类似地, 对 $\alpha = (0, 1)$, (6)式亦成立. 引理证毕.

2 各向异性误差估计

考虑二阶问题:

$$\begin{cases} -\Delta u = f, & \text{在 } \Omega \text{ 内,} \\ u = 0, & \text{在 } \Gamma = \partial\Omega \text{ 上.} \end{cases} \quad (7)$$

令 $V = H_0^1(\Omega)$, (7) 式的弱形式为

$$\text{求 } u \in V, \text{ 使得, } a(u, v) = f(v), \quad \forall v \in V, \quad (8)$$

其中 $a(u, v) = \int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v \, dx \, dy$, $f(v) = \int_{\Omega} f v \, dx \, dy$. (8) 式的逼近形式为

$$\text{求 } u_h \in V_h, \text{ 使得, } a_h(u_h, v_h) = f(v_h), \quad \forall v_h \in V_h, \quad (9)$$

其中 $a_h(u_h, v_h) = \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \int_K \nabla u_h \cdot \nabla v_h \, dx \, dy$. 令 $\|\cdot\|_h = (a_h(\cdot, \cdot))^{1/2}$, 则 $\|\cdot\|_h$ 是 V_h 上的模.

设 u 和 u_h 分别是变分问题(8)和逼近问题(9)的解, 由第二 Strang 引理^[1-2], 我们有

$$\|u - u_h\|_h \leq C \left[\inf_{v_h \in V_h} \|u - v_h\|_h + \sup_{w_h \in V_h} \langle 0 \rangle \frac{a_h(u, w_h) - f(w_h)}{\|w_h\|_h} \right]. \quad (10)$$

(10) 式右端的第 1 项称为插值误差, 第 2 项称为相容误差. 先看第 1 项插值误差, 根据引理 1.1, 我们有

$$\begin{aligned} \inf_{v_h \in V_h} \|u - v_h\|_h &\leq \|u - \Gamma_h u\|_h = \left(\sum_{K \in \mathcal{T}_h} \|u - \Gamma_K u\|_{1,K}^2 \right)^{1/2} = \\ &\left(\sum_{K \in \mathcal{T}_h} \sum_{|\alpha|=1} \|D^\alpha(u - \Gamma_K u)\|_{0,K}^2 \right)^{1/2} = \\ &\left(\sum_{K \in \mathcal{T}_h} \sum_{|\alpha|=1} h_K^{-2\alpha}(h_x h_y) \|D^\alpha(\hat{u} - \Gamma_K \hat{u})\|_{0,K}^2 \right)^{1/2} \leq \\ &C \left(\sum_{K \in \mathcal{T}_h} \sum_{|\alpha|=1} h_K^{-2\alpha}(h_x h_y) \|D^\alpha \hat{u}\|_{1,K}^2 \right)^{1/2} = \\ &C \left(\sum_{K \in \mathcal{T}_h} \sum_{|\alpha|=1} \sum_{|\beta|=1} h_K^{2\beta} \|D^{\alpha+\beta} u\|_{0,K}^2 \right)^{1/2} \leq \\ &Ch \|u\|_2 \end{aligned} \quad (11)$$

接下来估计第 2 项相容误差. 为此, $\forall K \in \mathcal{T}_h, \forall v_h \in H^1(K)$, 令

$$P_{0x} v_h = \frac{1}{|l_i|} \int_{l_i} v_h \, ds, \quad P_{0y} v_h = \frac{1}{|K|} \int_K v_h \, dx \, dy.$$

于是

$$\begin{aligned} a_h(u, v_h) - f(v_h) &= \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \int_{\partial K} \frac{\partial u}{\partial n} v_h \, ds = \\ &\sum_{K \in \mathcal{T}_h} \left[\int_{l_1} \left(-\frac{\partial u}{\partial y} v_h \right) dx + \int_{l_2} \frac{\partial u}{\partial x} v_h \, dy + \int_{l_3} \frac{\partial u}{\partial y} v_h \, dx + \int_{l_4} \left(-\frac{\partial u}{\partial x} v_h \right) dy \right] = \\ &\sum_{K \in \mathcal{T}_h} \left[\int_{l_1} - \left(\frac{\partial u}{\partial y} - P_0 \frac{\partial u}{\partial y} \right) (v_h - P_{01} v_h) dx + \int_{l_3} \left(\frac{\partial u}{\partial y} - P_0 \frac{\partial u}{\partial y} \right) (v_h - P_{03} v_h) dx + \right. \\ &\left. \int_{l_2} \left(\frac{\partial u}{\partial x} - P_0 \frac{\partial u}{\partial x} \right) (v_h - P_{02} v_h) dy + \int_{l_4} - \left(\frac{\partial u}{\partial x} - P_0 \frac{\partial u}{\partial x} \right) (v_h - P_{04} v_h) dy \right]. \end{aligned} \quad (12)$$

引入下列算子:

$$\begin{aligned} Lv_h &= \frac{x - (x_K - h_x)}{2h_x} P_{02} v_h - \frac{x - (x_K + h_x)}{2h_x} P_{04} v_h = \\ &\frac{1+\xi}{2} P_{02} v_h - \frac{1-\xi}{2} P_{04} v_h = \hat{L} v_h, \\ Nv_h &= \frac{y - (y_K - h_y)}{2h_y} P_{03} v_h - \frac{y - (y_K + h_y)}{2h_y} P_{01} v_h = \end{aligned}$$

$$\frac{1+\eta}{2}P_{03}\hat{v}_h - \frac{1-\eta}{2}P_{01}\hat{v}_h = N\hat{v}_h.$$

容易验证,算子 L, N 对零次多项式精确成立. 由 Green 公式,

$$\begin{aligned} a_h(u, v_h) - f(v_h) &= \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \left\{ \int_K \frac{\partial}{\partial y} \left[(v_h - Nv_h) \left(\frac{\partial u}{\partial y} - P_0 \frac{\partial u}{\partial y} \right) \right] dx dy + \right. \\ &\quad \left. \int_K \frac{\partial}{\partial x} \left[(v_h - Lv_h) \left(\frac{\partial u}{\partial x} - P_0 \frac{\partial u}{\partial x} \right) \right] dx dy \right\} \stackrel{\Delta}{=} \sum_{K \in \mathcal{T}_h} (I_1 + I_2), \end{aligned} \quad (13)$$

其中

$$\begin{aligned} I_1 &= \int_K \frac{\partial}{\partial y} \left[(v_h - Nv_h) \left(\frac{\partial u}{\partial y} - P_0 \frac{\partial u}{\partial y} \right) \right] dx dy, \\ I_2 &= \int_K \frac{\partial}{\partial x} \left[(v_h - Lv_h) \left(\frac{\partial u}{\partial x} - P_0 \frac{\partial u}{\partial x} \right) \right] dx dy. \end{aligned}$$

于是

$$\begin{aligned} I_1 &= \int_K (v_h - Nv_h) \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} dx dy + \int_K \left[\left(\frac{\partial v_h}{\partial y} - \frac{\partial Nv_h}{\partial y} \right) \left(\frac{\partial u}{\partial y} - P_0 \frac{\partial u}{\partial y} \right) \right] dx dy \stackrel{\Delta}{=} \\ &\quad A_1 + A_2, \end{aligned} \quad (14)$$

其中 $A_1 = \int_K (v_h - Nv_h) \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} dx dy$, $A_2 = \int_K \left[\left(\frac{\partial v_h}{\partial y} - \frac{\partial Nv_h}{\partial y} \right) \left(\frac{\partial u}{\partial y} - P_0 \frac{\partial u}{\partial y} \right) \right] dx dy$, 则

$$\begin{aligned} A_1 &= \int_K (v_h - Nv_h) \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} dx dy \leq \\ &\quad \left(\int_K |v_h - Nv_h|^2 dx dy \right)^{1/2} \left(\int_K \left| \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right|^2 dx dy \right)^{1/2} \leq \\ &\quad (h_x h_y)^{1/2} \|\hat{v}_h - N\hat{v}_h\|_{0,K} \|u\|_{2,K} \leq \\ &\quad C(h_x h_y)^{1/2} \|\hat{v}_h\|_{1,K} \|u\|_{2,K} = \\ &\quad C(h_x h_y)^{1/2} \|u\|_{2,K} \left[\int_K \left(\left| \frac{\partial \hat{v}_h}{\partial \xi} \right|^2 + \left| \frac{\partial \hat{v}_h}{\partial \eta} \right|^2 \right) d\xi d\eta \right]^{1/2} = \\ &\quad C(h_x h_y)^{1/2} \|u\|_{2,K} \left[\int_K \left(h_x^2 \left| \frac{\partial v_h}{\partial x} \right|^2 + h_y^2 \left| \frac{\partial v_h}{\partial y} \right|^2 \right) (h_x h_y)^{-1} dx dy \right]^{1/2} \leq \\ &\quad Ch_K \|u\|_{2,K} \|v_h\|_{1,K}. \end{aligned} \quad (15)$$

由于

$$\begin{aligned} \frac{\partial Nv_h}{\partial y} &= \frac{1}{2h_y} (P_{03}v_h - P_{01}v_h) = \frac{1}{2h_y} \left(\frac{1}{2h_x} \int_{l_3} v_h dx - \frac{1}{2h_x} \int_{l_1} v_h dx \right) = \\ &\quad \frac{1}{4h_x h_y} \left(\int_{l_3} v_h dx - \int_{l_1} v_h dx \right) = \frac{1}{|K|} \int_K \frac{\partial v_h}{\partial y} dx dy = P_0 \frac{\partial v_h}{\partial y}, \\ \left\| \frac{\partial Nv_h}{\partial y} \right\|_{0,K} &= \left[\int_K \left(\frac{1}{|K|} \int_K \frac{\partial v_h}{\partial y} dx dy \right)^2 dx dy \right]^{1/2} = \frac{1}{|K|^{1/2}} \left| \int_K \frac{\partial v_h}{\partial y} dx dy \right| \leq \\ &\quad \left(\int_K \left| \frac{\partial v_h}{\partial y} \right|^2 dx dy \right)^{1/2} = \left\| \frac{\partial v_h}{\partial y} \right\|_{0,K}, \end{aligned}$$

如果我们记 $\omega = \partial u / \partial y$, 则可以得到

$$\begin{aligned} A_2 &= \int_K \left[\left(\frac{\partial v_h}{\partial y} - \frac{\partial Nv_h}{\partial y} \right) (\omega - P_0 \omega) \right] dx dy \leq \|\omega - P_0 \omega\|_{0,K} \left\| \frac{\partial v_h}{\partial y} - \frac{\partial Nv_h}{\partial y} \right\|_{0,K} \leq \\ &\quad \|\omega - P_0 \omega\|_{0,K} \left(\left\| \frac{\partial v_h}{\partial y} \right\|_{0,K} + \left\| \frac{\partial Nv_h}{\partial y} \right\|_{0,K} \right) \leq 2 \|\omega - P_0 \omega\|_{0,K} \left\| \frac{\partial v_h}{\partial y} \right\|_{0,K} \leq \\ &\quad C(h_x h_y)^{1/2} \|\omega - P_0 \omega\|_{0,K} \|v_h\|_{1,K} \leq C(h_x h_y)^{1/2} \|\omega\|_{1,K} \|v_h\|_{1,K} = \end{aligned}$$

$$C(h_x h_y)^{1/2} |v_h|_{1,K} \left[\int_K \left[h_x^2 \left(\frac{\partial \omega}{\partial x} \right)^2 + h_y^2 \left(\frac{\partial \omega}{\partial y} \right)^2 \right] (h_x h_y)^{-1} dx dy \right]^{1/2} \leq Ch_K |u|_{2,K} |v_h|_{1,K} \tag{16}$$

将(15)式和(16)式代入(14)式,得到

$$I_1 \leq Ch_K |u|_{2,K} |v_h|_{1,K} \tag{17}$$

类似地 $I_2 \leq Ch_K |u|_{2,K} |v_h|_{1,K}$ (18)

因此将(17)式和(18)式代入(13)式,我们得到

$$a_h(u, v_h) - f(v_h) = \sum_{K \in \mathcal{T}_h} (I_1 + I_2) \leq Ch |u|_{2,\Omega} \|v_h\|_h \tag{19}$$

将(11)式、(19)式代入(10)式,我们得到下面的定理:

定理 2.1 设 u 和 u_h 分别是变分问题(8)和逼近问题(9)的解,且 $u \in H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$.

则有

$$\|u - u_h\|_h \leq Ch |u|_{2,\Omega} \tag{20}$$

3 超逼近和超收敛分析

引理 3.1 设 u 和 u_h 分别是变分问题(8)和逼近问题(9)的解,且 $u \in H^3(\Omega)$. 则以下估计式成立:

$$|a_h(u, v_h) - f(v_h)| \leq Ch^2 |u|_{3,\Omega} \|v_h\|_h, \quad \forall v_h \in V_h \tag{21}$$

证明

$$\begin{aligned} a_h(u, v_h) - f(v_h) &= \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \int_{\partial K} \frac{\partial u}{\partial n} v_h ds = \\ &= \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \left[\int_{l_1} \left(-\frac{\partial u}{\partial y} v_h \right) dx + \int_{l_2} \frac{\partial u}{\partial x} v_h dy + \int_{l_3} \frac{\partial u}{\partial y} v_h dx + \int_{l_4} \left(-\frac{\partial u}{\partial x} v_h \right) dy \right] = \\ &= \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \left[\int_{l_1} \left(\frac{\partial u}{\partial y} - P_{01} \frac{\partial u}{\partial y} \right) (v_h - P_{01} v_h) dx + \int_{l_3} \left(\frac{\partial u}{\partial y} - P_{03} \frac{\partial u}{\partial y} \right) (v_h - P_{03} v_h) dx + \right. \\ &\quad \left. \int_{l_2} \left(\frac{\partial u}{\partial x} - P_{02} \frac{\partial u}{\partial x} \right) (v_h - P_{02} v_h) dy + \int_{l_4} \left(\frac{\partial u}{\partial x} - P_{04} \frac{\partial u}{\partial x} \right) (v_h - P_{04} v_h) dy \right] \triangleq \\ &= \sum_{K \in \mathcal{T}_h} (J_1 + J_2 + J_3 + J_4), \end{aligned} \tag{22}$$

其中

$$\begin{aligned} J_1 &= \int_{l_1} \left(\frac{\partial u}{\partial y} - P_{01} \frac{\partial u}{\partial y} \right) (v_h - P_{01} v_h) dx, \\ J_2 &= \int_{l_2} \left(\frac{\partial u}{\partial x} - P_{02} \frac{\partial u}{\partial x} \right) (v_h - P_{02} v_h) dy, \\ J_3 &= \int_{l_3} \left(\frac{\partial u}{\partial y} - P_{03} \frac{\partial u}{\partial y} \right) (v_h - P_{03} v_h) dx, \\ J_4 &= \int_{l_4} \left(\frac{\partial u}{\partial x} - P_{04} \frac{\partial u}{\partial x} \right) (v_h - P_{04} v_h) dy. \end{aligned}$$

因此

$$\begin{aligned} J_1 + J_3 &= \int_{l_1} \left(\frac{\partial u}{\partial y} - P_{01} \frac{\partial u}{\partial y} \right) (v_h - P_{01} v_h) dx + \int_{l_3} \left(\frac{\partial u}{\partial y} - P_{03} \frac{\partial u}{\partial y} \right) (v_h - P_{03} v_h) dx = \\ &= \int_{x_K^-}^{x_K^+} \frac{h_x}{h_y} \left[\frac{\partial u}{\partial y}(x, y_K - h_y) - \frac{1}{2h_x} \int_{x_K^-}^{x_K^+} \frac{\partial u}{\partial y}(x, y_K - h_y) dx \right] \times \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \left[v_h(x, y_K - h_y) - \frac{1}{2h_x} \int_{x_K - h_x}^{x_K + h_x} v_h(x, y_K - h_y) dx \right] dx + \\ & \int_{x_K - h_x}^{x_K + h_x} \left[\frac{\partial u}{\partial y}(x, y_K + h_y) - \frac{1}{2h_x} \int_{x_K - h_x}^{x_K + h_x} \frac{\partial u}{\partial y}(x, y_K + h_y) dx \right] \times \\ & \left[v_h(x, y_K + h_y) - \frac{1}{2h_x} \int_{x_K - h_x}^{x_K + h_x} v_h(x, y_K + h_y) dx \right] dx. \end{aligned} \quad (23)$$

由于 $\partial v_h(x, y)/\partial x$ 和 $\partial v_h(x, y)/\partial y$ 分别是与 y 和 x 无关的常数, 利用文献[7]类似的技巧, 可以得到

$$|J_{1+} J_3| \leq \frac{4h_x^2}{3} \left\| \frac{\partial^3 u}{\partial x \partial^2 y} \right\|_{0,K} \left\| \frac{\partial v_h}{\partial x} \right\|_{0,K}, \quad (24)$$

$$|J_{2+} J_4| \leq \frac{4h_y^2}{3} \left\| \frac{\partial^3 u}{\partial^2 x \partial y} \right\|_{0,K} \left\| \frac{\partial v_h}{\partial y} \right\|_{0,K}. \quad (25)$$

将(24)式、(25)式代入(22)式, 引理 3.1 得证.

引理 3.2 在引理 3.1 相同的假设条件下, 记 $\Pi_h u$ 为 u 的插值, 则有

$$\|u_h - \Pi_h u\|_h \leq Ch^2 |u|_{3,\Omega}. \quad (26)$$

证明

$$\begin{aligned} \|u_h - \Pi_h u\|_h^2 &= a_h(u_h - \Pi_h u, u_h - \Pi_h u) = \\ & a_h(u - \Pi_h u, u_h - \Pi_h u) + a_h(u_h - u, u_h - \Pi_h u), \end{aligned}$$

对任意的 $v_h \in V_h, K \in \mathcal{T}_h$, 我们有

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^4 \int_{\partial K} (u - \Pi_h u) \frac{\partial v_h}{\partial n} ds &= \left[\sum_{i=1}^4 \int_{l_i} (u - \Pi_h u) \frac{\partial v_h}{\partial n} ds \right] = \\ & \frac{\partial v_h}{\partial y} \left[\int_{l_3} (u - \Pi_h u) dx - \int_{l_1} (u - \Pi_h u) dx \right] + \\ & \frac{\partial v_h}{\partial x} \left[\int_{l_2} (u - \Pi_h u) dy - \int_{l_4} (u - \Pi_h u) dy \right] = 0, \end{aligned}$$

结合(4)式,

$$\begin{aligned} a_h(u - \Pi_h u, v_h) &= \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \int_K (u - \Pi_h u) \cdot \nabla v_h dx dy = \\ & \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \left[\int_K (u - \Pi_h u) \Delta v_h dx dy + \int_{\partial K} (u - \Pi_h u) \frac{\partial v_h}{\partial n} ds \right] = 0, \end{aligned}$$

再由引理 3.1, 即得证引理 3.2.

为得到整体超收敛分析结果, 我们需要先构造插值后处理算子. 令 $\mathcal{T}_h = \{K\}$ 是一族平行于坐标轴的矩形网格剖分, 将其每个单元 K 四等分得到一族新的矩形网格, 记为 \mathcal{T}_h , 即是 $K_i \in \mathcal{T}_h (i = 1, 2, 3, 4), K = \bigcup_{i=1}^4 K_i$ (如下面的图 1 所示), 其中平行于 x 轴、 y 轴的边长分别记为 $2h_{K_x}, 2h_{K_y}$, 图中 A_1, A_3, A_7, A_9 分别为单元 K 的 4 个顶点, A_2, A_6, A_8, A_4 为 4 边中点, A_5 为中心点. 且记 $e_1 = \overline{A_1 A_2}, e_2 = \overline{A_3 A_6}, e_3 = \overline{A_9 A_8}, e_4 = \overline{A_7 A_4}, e_5 = \overline{A_2 A_8}$, 及 $e_6 = \overline{A_4 A_6}$.

由此可在 $V_h \cup H^3(\Omega)$ 上构造下面的插值后处理算子 Π_{2h}^2 满足:

$$\begin{aligned} \Pi_{2h}^2 v|_K &\in P_2(K), \int_{e_i} \Pi_{2h}^2 v ds = \int_{e_i} \Pi_h v ds, \\ & i = 1, \dots, 6, \forall v \in V_h \cup H^3(\Omega), \end{aligned}$$

此处 $P_2(K)$ 代表 K 上的二次多项式空间. 根据算子 Π_h 的定义, 我们知道

$$\int_{e_i} \Gamma_h w \, ds = \int_{e_i} w \, ds, \quad i = 1, \dots, 6, \quad \forall w \in P_1 \bullet$$

于是由 $\Gamma_{\mathbb{E}_h}$ 的构造知

$$\begin{aligned} \int_{e_i} \Gamma_{\mathbb{E}_h}^2(\Gamma_h \omega) \, ds &= \int_{e_i} \Gamma_h(\Gamma_h \omega) \, ds = \int_{e_i} \Gamma_h \omega \, ds = \\ &= \int_{e_i} \Gamma_{\mathbb{E}_h}^2 \omega \, ds, \quad i = 1, \dots, 6, \end{aligned}$$

于是有

$$\Gamma_{\mathbb{E}_h}^2(\Gamma_h \omega) = \Gamma_{\mathbb{E}_h}^2 \omega, \quad \forall \omega \in H^3(\Omega) \bullet \quad (27)$$

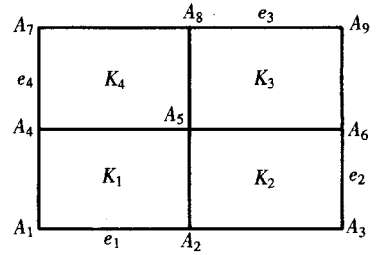


图 1 $K = \bigcup_{i=1}^4 K_i$

引理 3.3 在正则性网格下, 插值算子 $\Gamma_{\mathbb{E}_h}$ 满足:

$$| \Gamma_{\mathbb{E}_h}^2 \omega - \omega |_{1,K} \leq Ch^2 | \omega |_{3,K}, \quad \forall \omega \in H^3(\Omega), \quad (28)$$

$$| \Gamma_{\mathbb{E}_h}^2 \omega |_{1,K} \leq C | \omega |_{1,K}, \quad \forall \omega \in V_h \bullet \quad (29)$$

证明

$$\begin{aligned} \| (\Gamma_{\mathbb{E}_h}^2 \omega - \omega)_x \|_{0,K}^2 &= \int_K (\Gamma_{\mathbb{E}_h}^2 \omega - \omega)_x^2 \, dx \, dy = \\ &= \int_K (\Gamma_{\mathbb{E}_h}^2 \omega - \omega)_\xi^2 h_{K_x}^{-2} h_{K_y}^2 \, d\xi \, d\eta = \\ &= h_{K_x}^{-1} h_{K_y} \| (\Gamma_{\mathbb{E}_h}^2 \omega - \omega)_\xi \|_{0,\hat{K}}^2 \leq Ch_{K_x}^{-1} h_{K_y} | \omega_\xi |_{2,\hat{K}}^2 \leq \\ &= Ch_{K_x}^{-1} h_{K_y} \int_{\hat{K}} \left[\left(\frac{\partial^3 \omega}{\partial \xi^3} \right)^2 + \left(\frac{\partial^3 \omega}{\partial \xi^2 \partial \eta} \right)^2 + \left(\frac{\partial^3 \omega}{\partial \xi \partial \eta^2} \right)^2 \right] \, d\xi \, d\eta \leq \\ &= Ch_{K_x}^{-1} h_{K_y} \left(h_{K_x}^4 + h_{K_x}^2 h_{K_y}^2 + h_{K_y}^4 \right) h_{K_x}^{-2} h_{K_x}^{-1} h_{K_y}^{-1} | \omega |_{3,K}^2 = \\ &= Ch^4 | \omega |_{3,K}^2 \bullet \end{aligned} \quad (30)$$

类似地 $\| (\Gamma_{\mathbb{E}_h}^2 \omega - \omega)_y \|_{0,K}^2 \leq Ch^4 | \omega |_{3,K}^2 \bullet \quad (31)$

故(28)式得证. 另一方面

$$\begin{aligned} \| (\Gamma_{\mathbb{E}_h}^2 \omega)_x \|_{0,K}^2 &= \int_K (\Gamma_{\mathbb{E}_h}^2 \omega)_x^2 \, dx \, dy = \int_{\hat{K}} (\Gamma_{\mathbb{E}_h}^2 \omega)_\xi^2 h_{K_x}^{-2} h_{K_y}^2 \, d\xi \, d\eta = \\ &= h_{K_x}^{-1} h_{K_y} \| (\Gamma_{\mathbb{E}_h}^2 \omega)_\xi \|_{0,\hat{K}}^2 \leq Ch_{K_x}^{-1} h_{K_y} | \omega_\xi |_{0,\hat{K}}^2 = \\ &= Ch_{K_x}^{-1} h_{K_y} \int_{\hat{K}} \omega_\xi^2 \, d\xi \, d\eta = Ch_{K_x}^{-1} h_{K_y} \int_K \omega_x^2 h_{K_x}^2 h_{K_x}^{-1} h_{K_y}^{-1} \, dx \, dy = \\ &= C \int_K \omega_x^2 \, dx \, dy = C \| \omega_x \|_{0,K}^2, \end{aligned}$$

所以 $\| (\Gamma_{\mathbb{E}_h}^2 \omega)_x \|_{0,K} \leq C \| \omega_x \|_{0,K} \bullet \quad (32)$

类似地 $\| (\Gamma_{\mathbb{E}_h}^2 \omega)_y \|_{0,K} \leq C \| \omega_y \|_{0,K} \bullet \quad (33)$

故(29)式得证. 引理 3.3 证毕.

最后我们得到超收敛结果.

定理 3.4 设 u 和 u_h 分别是变分问题(8) 和逼近问题(9) 的解, 且 $u \in H^3(\Omega)$, 在正则网格下可得

$$\| \Gamma_{\mathbb{E}_h}^2 u_h - u \|_h \leq Ch^2 | u |_{3,\Omega} \bullet \quad (34)$$

证明 由(27) 式, 引理 3.2 和引理 3.3, 可得

$$\begin{aligned} \| \Gamma_{\mathbb{E}_h}^2 u_h - u \|_h &\leq \| \Gamma_{\mathbb{E}_h}^2(\Gamma_h u) - u \|_h + \| \Gamma_{\mathbb{E}_h}^2 u_h - \Gamma_{\mathbb{E}_h}^2(\Gamma_h u) \|_h = \\ &= \| \Gamma_{\mathbb{E}_h}^2 u - u \|_h + \| \Gamma_{\mathbb{E}_h}^2(u_h - \Gamma_h u) \|_h \leq \end{aligned}$$

$$Ch^2 |u|_{3, \Omega} + C \|u_h - \Pi_h u\|_h \leqslant$$

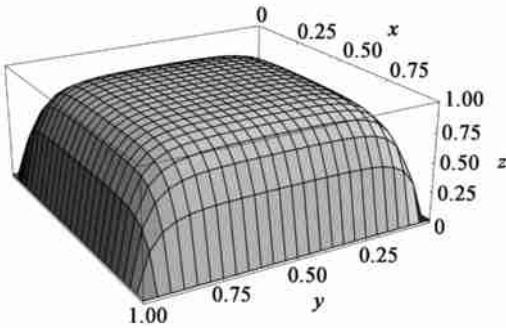
$$Ch^2 |u|_{3, \Omega} + Ch^2 |u|_{3, \Omega} =$$

$$Ch^2 |u|_{3, \Omega}.$$

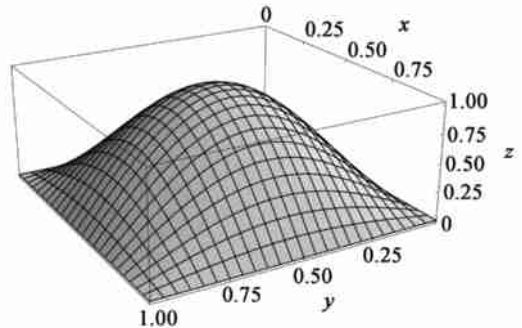
4 数值算例

为了检验该单元在各向异性网格下, 针对二阶椭圆问题(7)的有限元解的数值性态及验证我们的理论分析的可靠性, 我们做两个试验.

试验 1 考虑如下二阶椭圆问题(7): 求解区域 $\Omega = [0, 1]^2$, 取右端项 f 使得真解 $u(x, y) = (1 - e^{-x(1-x)/\varepsilon})(1 - e^{-y(1-y)/\varepsilon})$. $\varepsilon = 0.05$ 时的真解如图 2(a) 所示. 从图中可以看出真解在区域边界变化剧烈.



(a) 试验 1 的精确解 ($\varepsilon = 0.05$)



(b) 试验 2 的精确解

图 2 试验 1 和试验 2 的真解

对求解区域进行两种不同的网格剖分. 网格 1 是正方形网格 ($n = 16$ 时如图 3 所示), 网格 2 是一种各向异性矩形网格: 将 Ω 的每条边都使用分点 $(1 - \cos(i\pi/n))/2$ ($i = 0, 1, \dots, n$) 分成 n 段 ($n = 16$ 时如图 4 所示).

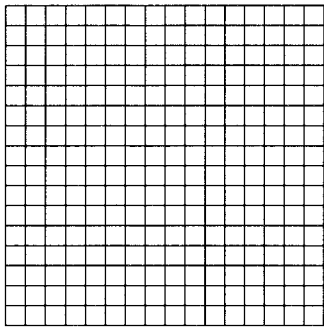


图 3 网格 1 ($n = 16$)

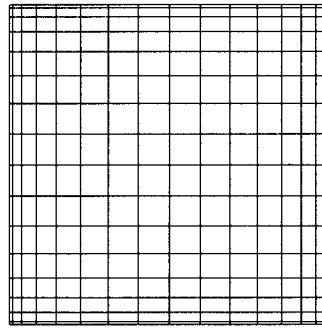


图 4 网格 2 ($n = 16$)

下面的表 1 至表 3 中的数据显示当 ε 取不同的数值时能量模和 L^2 模在网格 1 和网格 2 下的误差结果. 通过这些数据我们可以看到此类各向异性剖分网格比相应数据的正方形网格效果要好很多, 同时表明相适应的各向异性网格更为合适.

表 1 $\varepsilon = 0.2$ 时逼近结果

$n \times n$	网格 1		网格 2	
	$\ u - u_h\ _h$	$\ u - u_h\ _0$	$\ u - u_h\ _h$	$\ u - u_h\ _0$
8 × 8	0.404 614	0.008 333	0.322 496	0.004 414
16 × 16	0.208 286	0.002 083	0.165 656	0.001 099
32 × 32	0.104 948	0.000 528	0.083 339	0.000 279
64 × 64	0.052 576	0.000 133	0.041 732	0.000 070

表 2 $\varepsilon = 0.1$ 时逼近结果

$n \times n$	网格 1		网格 2	
	$\ u - u_h\ _h$	$\ u - u_h\ _0$	$\ u - u_h\ _h$	$\ u - u_h\ _0$
8 × 8	1.262 110	0.019 495	0.814 015	0.005 300
16 × 16	0.683 374	0.004 562	0.428 664	0.000 833
32 × 32	0.349 533	0.001 128	0.216 487	0.000 204
64 × 64	0.175 800	0.000 283	0.108 505	0.000 051

表 3 $\varepsilon = 0.05$ 时逼近结果

$n \times n$	网格 1		网格 2	
	$\ u - u_h\ _h$	$\ u - u_h\ _0$	$\ u - u_h\ _h$	$\ u - u_h\ _0$
8 × 8	3.247 347	0.044 959	1.758 990	0.024 448
16 × 16	1.988 449	0.009 796	0.987 802	0.004 108
32 × 32	1.063 859	0.002 241	0.502 185	0.000 992
64 × 64	0.541 985	0.000 547	0.252 054	0.000 249

表 4 网格 1 的逼近结果

$n \times n$	$\ u - u_h\ _h$	$\ u - u_h\ _0$	$\ u_h - \Pi_h u\ _h$	$\ u - \Pi_{2h}^2 u_h\ _h$
4 × 4	0.704 634 674 1	0.043 828 439 4	0.054 357 796 3	0.513 983 607 7
8 × 8	0.355 212 972 7	0.011 602 097 0	0.014 100 453 0	0.136 943 726 8
16 × 16	0.177 954 591 1	0.003 035 479 0	0.003 557 602 1	0.034 780 733 9
32 × 32	0.089 020 355 5	0.000 779 602 8	0.000 891 439 8	0.008 729 496 9
64 × 64	0.044 515 545 9	0.000 197 756 1	0.000 222 987 5	0.002 184 522 9
α	0.995 993	1.943 52	1.981 73	1.968 5

试验 2 考虑如下二阶椭圆问题(7): 求解区域 $\Omega = [0, 1]^2$, 取右端项 $f = 2\pi^2 \sin(\pi x) \times \sin(\pi y)$, 这样真解 $u(x, y) = \sin(\pi x) \sin(\pi y)$. 真解如上面的图 2(b) 所示. 我们采用正方形剖分网格.

表 4 中, $u, u_h, \Pi_h u, \Pi_{2h}^2 u_h$ 分别代表真解、有限元解、真解插值和有限元解后处理, α 表示平均收敛阶. 表中数据显示不同网格剖分时的 4 种不同模意义下的误差结果. 通过这些数据我们可以看出数值计算结果和理论分析相一致.

[参 考 文 献]

[1] Ciarlet P G. The Finite Element Method for Elliptic Problems [M]. Amsterdam: North-Holland, 1978.
 [2] Brenner S C, Scott L R. The Mathematical Theory of Finite Element Methods [M]. New York:

Springer-Verlag, 1994.

- [3] Apel T, Dobrowolski M. Anisotropic interpolation with applications to the finite element method[J]. Computing, 1992, **47**(3): 227-293.
- [4] Apel T. Anisotropic Finite Elements: Local Estimates and Applications [M]. Stuttgart: Teubner, 1999.
- [5] CHEN Shao-chun, ZHAO Yong-cheng, SHI Dong-yang. Anisotropic interpolation with application to nonconforming elements[J]. Appl Numer Math, 2004, **49**(2): 135-152.
- [6] CHEN Shao-chun, SHI Dong-yang, ZHAO Yong-cheng. Narrow arbitrary quadrilateral quasi-Wilson element[J]. IMA J Numer Anal, 2004, **24**(1): 77-95.
- [7] SHI Dong-yang, MAO Shi-peng, CHEN Shao-chun. An anisotropic nonconforming finite element with some superconvergence results[J]. J Comput Math, 2005, **23**(3): 261-274.
- [8] Park C, Sheen D. P₁ nonconforming quadrilateral finite element methods for second order elliptic problems[J]. SIAM J Numer Anal, 2003, **41**(2): 624-640.
- [9] 林群, 严宁宁. 高效有限元构造与分析[M]. 保定: 河北大学出版社, 1996.
- [10] CHEN Shao-chun, SHI Zhong-di. Doubleset parameter method of constructing a stiffness matrix[J]. Chinese J Numer Math Appl, 1991, **13**(4): 55-69.

Superconvergence Analysis of a Lower Order Anisotropic Finite Element

ZHU Guo-qing, SHI Dong-yang, CHEN Shao-chun

(Department of Mathematics, Zhengzhou University, Zhengzhou 450052, P. R. China)

Abstract: The convergence analysis of the lower order nonconforming element proposed by Park and Sheen was applied to the second order elliptic problem under anisotropic meshes. And the corresponding error estimation was obtained. Moreover, by using the interpolation postprocessing technique, a global superconvergence property for the discretization error of the postprocessed discrete solution to the solution itself was derived. Numerical results were also given to verify the theoretical analysis.

Key words: nonconforming finite element; anisotropic; error estimate; interpolation postprocessing; superconvergence