

黏性不可压流体的自适应网格技术和基本特性方程分离算法的联合分析

S 图赖维瓦塔纳¹, P 布恩马勒特¹, P 瑟雷克¹,
S 封查那帕尼², P 德乔姆凡¹

(1. 国立朱拉隆功大学 工程学院 机械工程系, 曼谷 10330, 泰国;
2. 北曼谷先皇科技大学 工业技术学院 机械工程系, 曼谷 10800, 泰国)

(周哲玮推荐)

摘要: 组合基本特性方程分离算法和自适应网格技术, 分析二维黏性不可压流体。该方法使用 3 节点三角单元, 对速度分量和压力等变量分析, 使用等阶次的插值函数。组合解法的主要优点在于, 在自适应网格技术中, 对解梯度变化大的区域, 通过耦合误差估计生成小的单元, 利于提高解的精度, 在其它区域生成大单元, 可以节省时间。最后, 通过对一个黏性流体圆柱体绕流问题的瞬态和稳态特性分析, 给出了组合解法性能的评价。

关键词: 自适应网格; 分离基本特性方程; 有限元法; 不可压流体
中图分类号: **文献标识码:** A

引 言

在流体力学中不可压流体占据了大部分, 常常包含由于黏性效应导致的复杂现象。过去 20 年来, 为解决这种流体现象, 提出了一些稳定的有限元方法。为求解高雷诺数流体, Yamada 等人^[1]和 Kawahara 等人^[2-3]使用了 6 节点三角单元的混合插值函数。在通常使用的加权残差法中, Christie 等人^[4]和 Heinrich 等人^[5]修正权函数, 提出了 Petrov-Galerkin 算法。Brook 和 Hughes^[6]发展了带有流线迎风格式技术的 Petrov-Galerkin 算法, 提高了解的精度。Wansophark 和 Dechaumphai^[7]在流线迎风技术方法中, 联合使用隔离解法和自适应网格技术, 改进了整体分析的效率。最近, Zienkiewicz 和 Codina^[8]提出了基本特性方程的分离算法, 在特性方程 Galerkin 方法的过程中, 消除了 Navier-Stokes 方程中对流项产生的震荡。

本文, 修改分离的基本特性方程有限元法, 对黏性不可压流体的瞬态和稳态特性都进行了分析。为了有效地结合自适应网格技术^[9-10], 采用 3 节点三角单元, 对流体速度分量和压力, 采用等阶次的插值函数, 使用这样的单元后, 在导出相应的有限元方程时, 减少了复杂性。自

收稿日期: 2006-05-08; 修订日期: 2007-05-08

基金项目: 泰国国家基金资助项目

作者简介: P. Dechaumphai, 教授, 博士(联系人, Tel/Fax: + 66-2-218-6621; E-mail: fmeppdc@eng.chula.ac.th).

本文原文为英文, 海治译, 张禄坤校。

适应网格技术能在解梯度变化大的区域生成小单元,同时,在其它区域生成大单元,以减少内存需求和节约计算时间

第1节给出黏性不可压流体分析中基本特性方程分离算法的理论公式 第2节给出自适应网格技术面向对象编程的全新实现 最后,通过例子黏性流体圆柱体绕流问题的渗态和稳态分析给出了对组合解法的性能进行评价

1 理论基础及其求解过程

1.1 控制方程

由质量守恒(或连续方程)和动量守恒组成的、二维层状不可压流体的控制微分方程如下:

质量守恒:

$$\frac{\partial}{\partial t} + \frac{u_i}{x_i} = 0, \quad (1a)$$

动量守恒:

$$\frac{\partial u_i}{\partial t} + u_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j} = \frac{1}{\rho} \frac{\partial \bar{ij}}{\partial x_j} - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x_i}, \quad (1b)$$

其中 i, j 分别表示 x 轴和 y 轴的张量分量, ρ 为流体密度, u_i 为速度分量,

$$\bar{ij} = \left[\frac{u_i}{x_j} + \frac{u_j}{x_i} \right]$$

为应力分量, p 为流体压力

1.2 基本特性方程的分离算法

以特性方程为基础的分离算法,实际上就是对特性方程使用 Galerkin 法,在算子分离过程中,建立时间离散化的递推关系,以 Galerkin 准则的加权残差法,对空间进行离散化,并导出有限元方程

1.2.1 时间离散化

用特性方程为基础方程的分离算法,来解黏性不可压流体,由3步组成 第1步,略去动量方程中压力梯度项,计算出中间速度;第2步,修改中间速度,解连续方程,求得压力;最后,将压力作为校正器,来修正动量方程中的速度

第1步 中间速度方程为:

$$u_i^* = t \left[-u_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial \bar{ij}}{\partial x_j} + \frac{t}{2} u_k \frac{\partial}{\partial x_k} \left[u_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{1}{2} \frac{\partial p}{\partial x_i} \right] \right]^n, \quad (2)$$

其中 t 为时间步长

第2步 连续方程为:

$$\frac{\partial p}{\partial x_i} \frac{\partial p}{\partial x_i} = -\frac{1}{t} \left[4 \frac{\partial u_i^*}{\partial x_i} + 2 \frac{\partial u_i^*}{\partial x_i} \right] - \frac{\partial p}{\partial x_i} \frac{\partial p}{\partial x_i} \quad (3)$$

第3步 速度校对方程为:

$$u_i^n = u_i^{n+1} - u_i^n = u_i^* - t \frac{1}{2} \left[\frac{\partial p^{n+1}}{\partial x_i} + \frac{\partial p^n}{\partial x_i} \right], \quad (4)$$

u 和 p 的初始条件取决于问题类型,为了简化计算,在稳态流体分析中通常使用零值 密度 计算中通常取常量

1.2.2 空间离散化

使用3节点的三角单元来推导有限元方程,假定速度和压力变量以及它们的增量形式如

下:

$$u_i^*(x, y) = \begin{cases} u^*(x, y) = N u^* = N \left\{ u^* \right\}, \\ v^*(x, y) = N v^* = N \left\{ v^* \right\}, \end{cases} \quad (5a)$$

$$u_i^{n+1}(x, y) = \begin{cases} u^{n+1}(x, y) = N u^{n+1} = N \left\{ u^{n+1} \right\}, \\ v^{n+1}(x, y) = N v^{n+1} = N \left\{ v^{n+1} \right\}, \end{cases} \quad (5b)$$

$$u_i^n(x, y) = \begin{cases} u^n(x, y) = N u^n = N \left\{ u^n \right\}, \\ v^n(x, y) = N v^n = N \left\{ v^n \right\}, \end{cases} \quad (5c)$$

$$p^{n+1}(x, y) = N p^{n+1} = N \left\{ p^{n+1} \right\}, \quad (5d)$$

$$p^n(x, y) = N p^n = N \left\{ p^n \right\}, \quad (5e)$$

其中 N ($= 1, 2, 3$) 为三角单元的插值函数

采用 Galerkin 法则的加权残差法导出有限元方程, 将方程(2)至方程(4) 乘上权函数 N , 通过 Gauss 定理进行分部积分, 得到单元方程如下:

第1步 中间速度方程

$$\begin{aligned} N u_i^* d = & t \left[- N u_j \frac{u_i}{x_j} d + \frac{1}{t} N \bar{u}_j d - \frac{1}{t} N u_j \frac{N}{x_j} \bar{u}_j d \right]^n + \\ & \frac{t^2}{2} \left[(N u_k) \left[u_j \frac{u_i}{x_j} \right]_{n,k} d - \left[\frac{N}{x_k} u_k \right] \left[u_j \frac{u_i}{x_j} \right] d + \right. \\ & \left. \frac{1}{2} \left[(N u_k) \left[\frac{p}{x_i} \right]_{n,k} d - \left[\frac{N}{x_k} u_k \right] \left[\frac{p}{x_i} \right] d \right] \right]^n \end{aligned} \quad (6)$$

第2步 连续方程

$$\frac{N}{x_i} \frac{p^{n+1}}{x_i} d = - \frac{1}{t} \left[- 4 N \frac{u_i^n}{x_i} d - 2 \frac{N}{x_i} u_i^* d \right] - \frac{N}{x_i} \frac{p}{x_i} d \quad (7)$$

第3步 速度修正方程

$$N (u_i^{n+1} - u_i^n) d = N u_i^* d - \frac{1}{2} N \left[\frac{p^{n+1}}{x_i} + \frac{p^n}{x_i} \right] d \quad (8)$$

矩阵形式的有限元方程, 可通过将方程(5)代入方程(6)至方程(8)得到:

第1步 中间速率方程

$$\begin{aligned} [M] \left\{ u_i^* \right\} = & - \frac{1}{t} \left[\left\{ C_u \right\} + \left\{ K_u \right\} - \left\{ R_{ku} \right\} \right]^n - \\ & \left(\frac{t^2}{2} \right) \left[\left\{ C_s \right\} + \left\{ P_s \right\} - \left\{ R_{cs} \right\} - \left\{ R_{ps} \right\} \right]^n \end{aligned} \quad (9)$$

第2步 连续方程

$$[K_p] \left\{ p \right\}^{n+1} = (4/t) \left\{ C_p \right\}^n - \left\{ P_p \right\}^n \quad (10)$$

第3步 速度修正方程

$$[M] \left\{ u_i \right\}^{n+1} = [M] \left\{ u_i^* \right\} - \left(\frac{t}{2} \right) \left\{ P_u \right\} \quad (11)$$

将上述方程中的单元矩阵用积分形式表示:

$$[M] = \left\{ N \right\} N d, \quad (12a)$$

$$\left\{ C_u \right\} = \left\{ N \right\} \left[u_j \frac{u_i}{x_j} \right] d, \quad (12b)$$

$$\left\{ K_u \right\} = \frac{1}{t} \left\{ \frac{N}{x_j} \right\} \bar{u}_j d, \quad (12c)$$

$$\{R_{ku}\} = \frac{1}{N} \{N\}_{ij} \hat{n}_j d, \tag{12d}$$

$$\{C_s\} = u_k \left\{ \frac{N}{x_k} \right\} \left[u_j \frac{u_i}{x_j} \right] d, \tag{12e}$$

$$\{R_{cs}\} = u_k \{N\} \left[u_j \frac{u_i}{x_j} \right] \hat{n}_k d, \tag{12f}$$

$$\{P_s\} = \frac{1}{2} u_k \left\{ \frac{N}{x_k} \right\} \left[\frac{p}{x_i} \right] d, \tag{12g}$$

$$\{R_{ps}\} = \frac{1}{2} u_k \{N\} \left[\frac{p}{x_i} \right] \hat{n}_k d, \tag{12h}$$

$$\{K_p\} = \left\{ \frac{N}{x_i} \right\} \frac{N}{x_i} d, \tag{12i}$$

$$\{C_p\} = \left\{ \frac{N}{x_i} \right\} \left[u_i + \frac{1}{2} u_i^* \right] d, \tag{12j}$$

$$\{P_p\} = \left\{ \frac{N}{x_i} \right\} \frac{p}{x_i} d, \tag{12k}$$

$$\{P_u\} = \frac{1}{N} \{N\} \left[\frac{p}{x_i} \frac{p^{n+1}}{x_i} \right] d, \tag{12l}$$

其中 u 为单元的平均速度, h 为单元的大小, ν 为动黏度 允许时间步长为:

$$t = h / (2 \nu) \tag{13}$$

上述算法中的边界条件, 取决于不同的流体问题 一般说来, 边界条件分为 3 类: 1) 流入边界, u 和 p 由进口条件决定; 2) 流出边界, 本文假定附着摩擦力和应力的梯度为 0; 3) 壁面条件, 由于是无滑动边界, 因此取 u 为固定值 0

2 自适应网格技术

2.1 网格的生成及其自适应性

本文的网格生成是基于 Delaunay 的三角剖分算法和内点的自动生成过程^[9-10] 1 单元的形状和大小, 或者说域内点的密度, 是通过 Alpha 和 Beta 2 个参数来控制 1 内点的自动生成过程, 主要就在于搜索所有符合 Alpha 和 Beta 测试标准的单元, 并在单元的中心设置一个新点, 然后根据 Delaunay 的三角剖分算法, 创建新单元 1 算法的具体步骤在文献[9] 和文献[10] 中, 已经有了详细的阐述 1

为了记录解梯度的急剧变化, 在这些区域中需要生成小单元 1 这类特定单元的大小 h_i , 需要通过所有单元的误差要一致^[9] 来确定:

$$h_i^2 K_i = h_{\min}^2 K_{\max} = \text{const}, \tag{14}$$

其中
$$K_i = \max \left[\left| \frac{5^2 \leq}{5 X^2} \right|, \left| \frac{5^2 \leq}{5 Y^2} \right| \right]$$

为单元细分时, 主变量较高的的量值, \leq 为被选定解的指标项 1 在下面给出的 Adaptive Meshing 程序中, 区域是细化还是疏化, 取决于压力变化系数的无量纲误差 1 节点 I 处的指标项为:

$$E_I = \frac{6}{c_{I I}} | 2 \leq - \leq - \leq | \sqrt{ \left(\frac{6}{c_{I I}} (A^* + B^*) \right) }, \tag{15}$$

其中 J 和 K 为三角形(单元 e) 的另外 2 个节点, $A^* = \max(| \leq - \leq |, A(| \leq + \leq))$ 和 $B^* = \max(| \leq - \leq |, A(| \leq + \leq))$ I 值 A 用来区分解是不连续的的还是数值震荡的 1 为了使数值结果和后面特地提出的方案相一致, 本文将 A 的值取为 0.0051 若 \leq 和 \leq 分别取在 \leq 的

1% 范围内震荡, 这便意味着 $A^* = 0.005(\varphi + \varphi)$ 和 $B^* = 0.005(\varphi + \varphi) I$

需要注意的是, 因点的间距是按二阶导数的最大值来确定的, 为了克服由此造成的加密过程的不充分性, 由单元大来建立标定函数, 从而保证点 p_i 的间距落在 V_{\min} 和 V_{\max} 的范围内

$$V_i = \text{ScaleRange} \left(\frac{h_{\max} - dp_i}{h_{\max} - h_{\min}}, 0, 1, V_{\min}, V_{\max} \right), \quad (16)$$

式中关于参数的表述见文献[9]。由于上述自适应算法不能得到良好的网格拓扑, 为了改进网格拓扑, 还采用了一种基于边交换技术的网格松弛法^[11]。

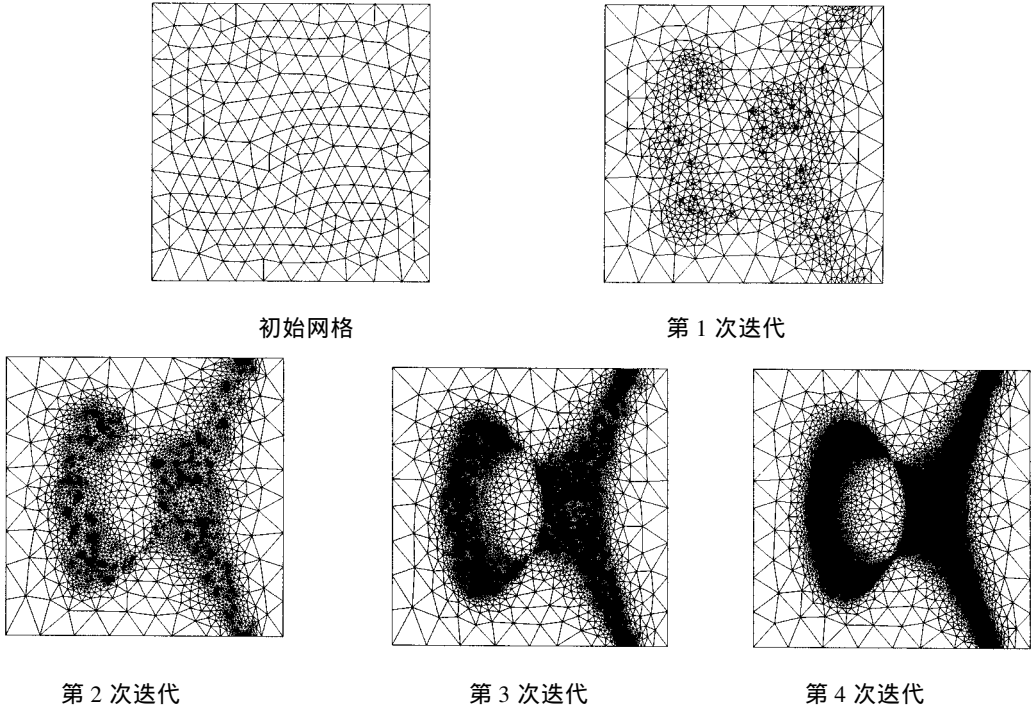


图1 正方形区域中生成 A 形的自适应网格

2.2 网格的生成及其算法的评估

本节提出了一种综合 Delaunay 三角剖分、网格细化和网格自适应技术的主要算法, 该算法采用面向对象的编程技术, 具有代码封闭、继承和多功能等优点。

为了评价 Delaunay 三角剖分自适应网格技术算法的效率, 将单元尺寸 h_i 作为二维区域上定义的分析函数。自适应网格的生成过程, 是从区域中生成初始网格开始, 然后由给定函数计算所有的点处单元的大小。网络的生成过程是和自适应网格的生成过程组合进行的, 反复迭代直到最终的网格全局稳定为止。若总节点增量少于指定数量, 迭代过程终止。这里, 给出了一个当指定单元大小时, 使用分析函数的自适应网格生成例子: 正方形区域中 A 形自适应网格的生成。

例1 正方形区域中生成 A 形自适应网格

给出了在正方形区域中生成 A 形的自适应网格。在 8×8 的正方形区域中^[12], 用下面的 A 形函数来计算单元的大小:

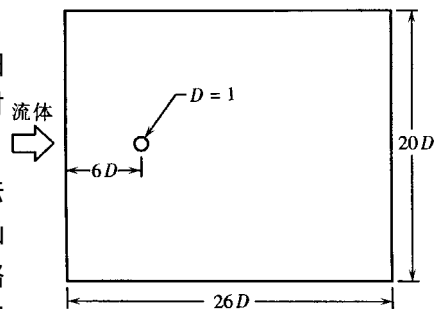


图2 圆柱体绕流模型

$$h(x, y) = \begin{cases} \min(0.2(K-1)^3 + 0.005, 1.0), & K \geq 1, \\ \min(0.2(K-1)^2 + 0.01, 1.0), & K < 1, \end{cases} \quad (17)$$

其中参数 K 的值由方程 $x^3 - y^2 + 2 - 3K = 0$ 得到

图 1 显示了, 从初始的粗糙网格, 到 4 次迭代后生成自适应网格的过程。网格生成系数 A 、 B 、 V_{\min} 、 V_{\max} 分别为 0.5、0.6、0.5 和 0.851。由图 1 可知, 小单元集中在 A 形状区域的附近, 而大单元集中在在其他区域。实际例子中, A 和 B 的值分别取 0.5 和 0.61。一般情况下, A 和 B 的合理范围分别为 0.3~0.8 和 0.7~1.31。

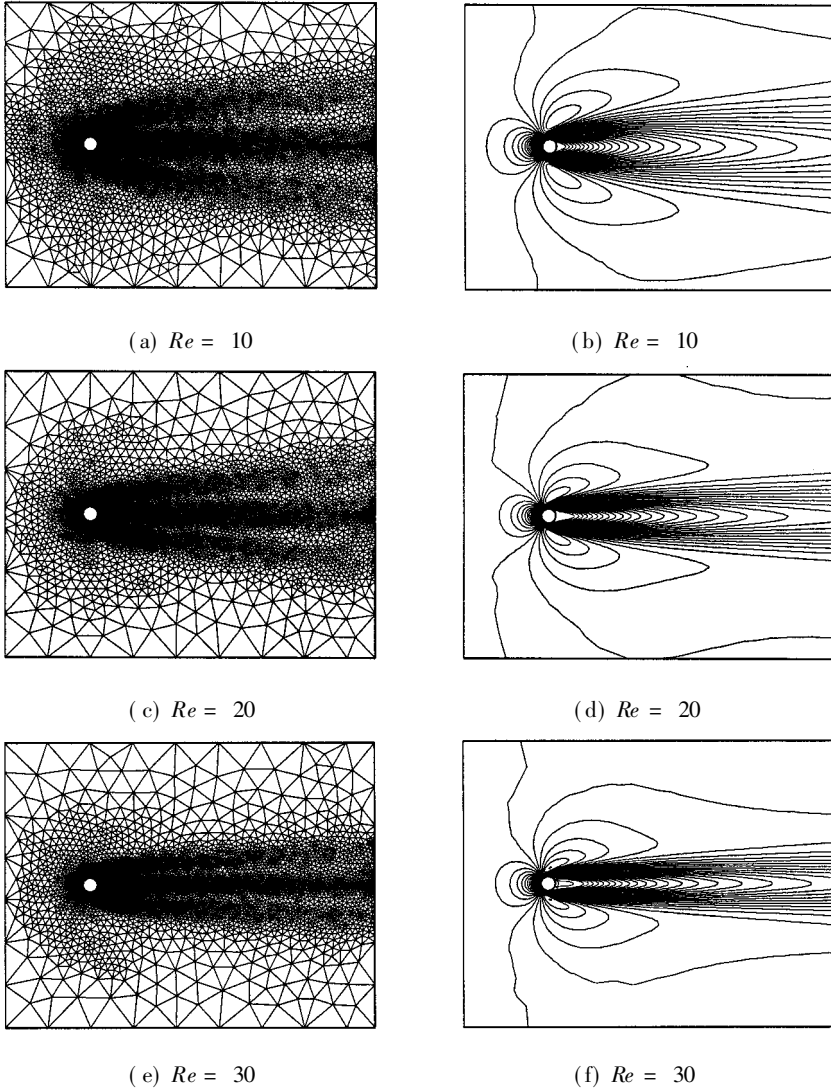


图 3 自适应网格和相应的等速度线

3 结果和讨论

为了评价分离基本特性方程算法和自适应网格技术组合时的性能, 给出一个黏性流体圆柱体绕流的分析, 分析它们瞬态和稳态两方面的特性。

例2 圆柱体绕流

为了更深入地说明, 联合应用基本特性方程分离算法和自适应网格技术, 求解瞬时黏性流体问题, 取圆柱体绕流问题作为第2个例子, 圆柱体绕流在流体力学中是具有普遍重要意义的¹

当雷诺数较低时, 绕经圆柱体的流场是对称的, 但是随着雷诺数增大, 圆柱体后面的流体开始分离, 出现旋涡, 这是一种不稳定状态¹ 其可计算的区域和边界条件见图21 通过选取不同的雷诺数10、20、30和100来分析该问题¹

图3(a)至图3(f)表明了雷诺数为10、20、30时的自适应网格和相应的等速度线, 这时候雷诺数较低, 流动是稳定的¹

图4给出了重附着长度作为雷诺数的函数计算, 与数值结果比较, 符合得很好¹

当雷诺数超过40时, 圆柱体后面的流体开始变得不稳定, 出现旋涡脱落现象¹ 图5(a)至图5(l)表明, 当雷诺数等于100时, 自适应网格和等速度线随时间演化的过程¹ 这些图形表明, 自适应网格技术有能力生成相应的网格, 以捕捉到圆柱体后面瞬时旋涡的复杂变化¹ 本文, 将 Strouhal 数与文献[14]至文献[16]实验中的数值结果进行了比较, 见表11

这个例子凸现出, 该组合解法对不很清楚的流体行为, 也可以给出好的结果¹

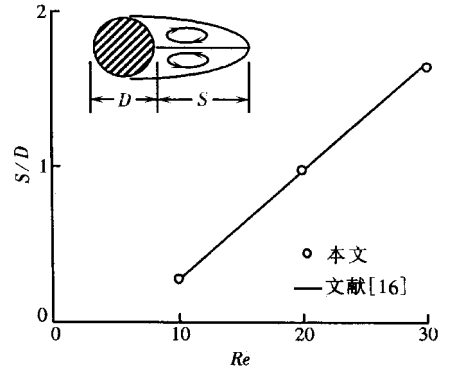
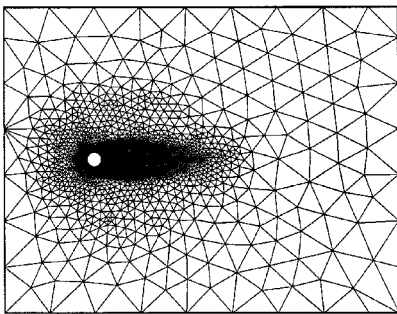
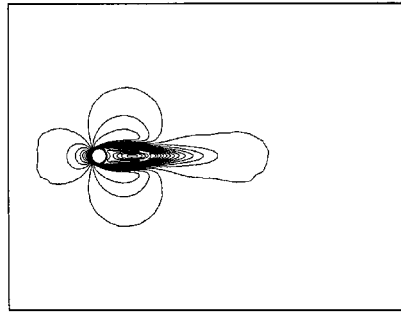


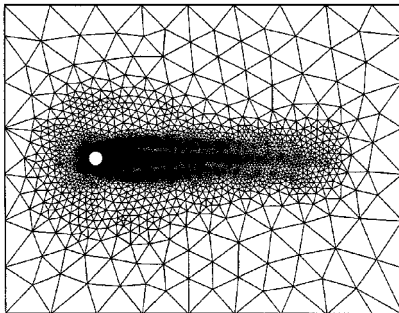
图4 重附着长度计算值的比较



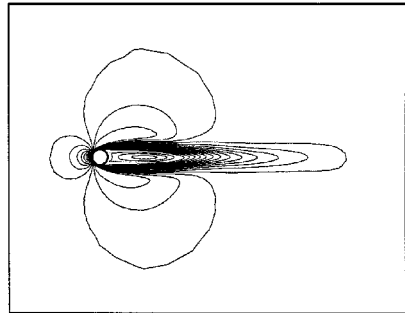
(a) $t = 10$



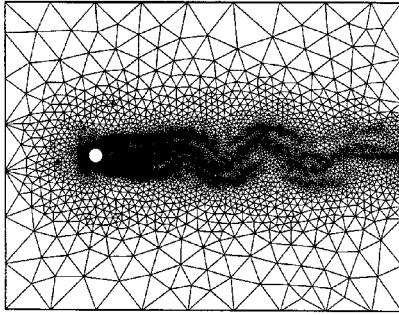
(b) $t = 10$



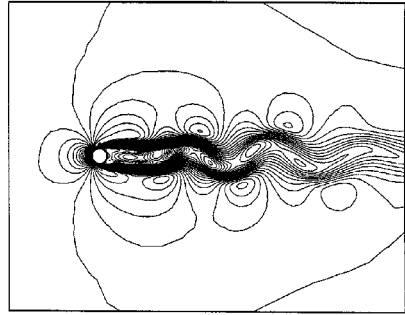
(c) $t = 20$



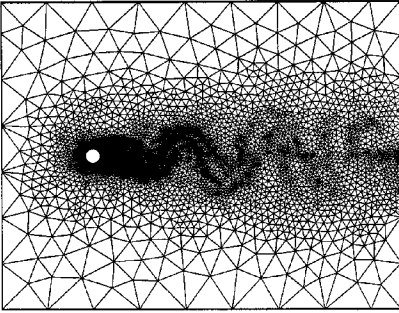
(d) $t = 20$



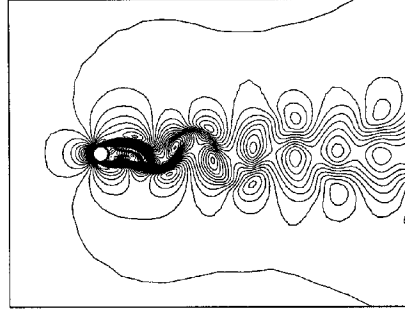
(e) $t = 40$



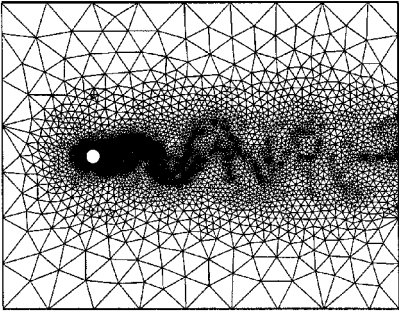
(f) $t = 40$



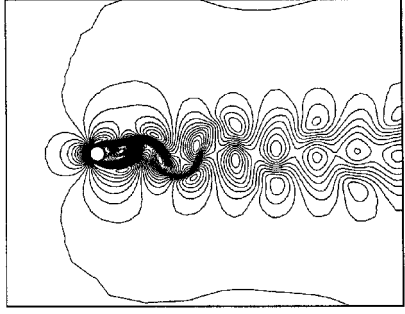
(g) $t = 60$



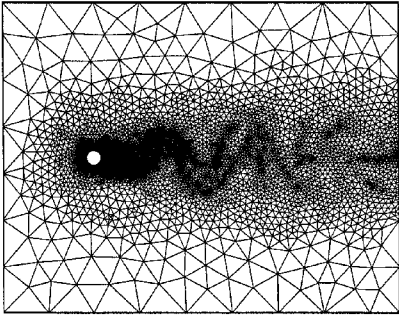
(h) $t = 60$



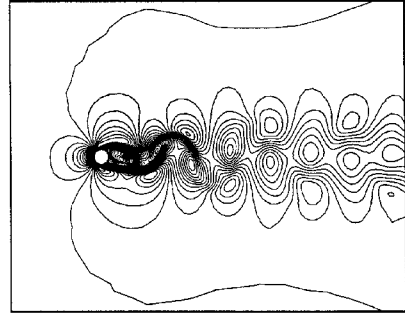
(i) $t = 80$



(j) $t = 80$



(k) $t = 100$



(l) $t = 100$

图 5 雷诺数为 100 时, 自适应网格与等速度线随时间的演化

表 1 圆柱体绕流问题中 Strouhal 数计算值的比较

	Strouhal 数
当前的研究	0.166
Williamson ^[14]	0.164
Brasa 等 ^[15]	0.160
Karniadakis 和 Triantafyllou ^[16]	0.179

4 结 论

提出了基本特性方程分离算法和自适应网格技术的组合应用,分析了稳态和瞬态粘性不可压缩流体问题1 根据基本特性方程分离算法,由 Navier-Stokes 控制微分方程,导出了有限元方程组,根据闭合形式的有限单元矩阵,开发出相应的计算机程序1 阐述了自适应网格技术及其细节1 在解梯度变化大的区域,自适应网格技术能生成簇状小单元来提高解的精度,在其它区域生成大单元,用以减少内存需求和节约计算时间1 通过对一个黏性流体圆柱体绕流问题的分析,来评价组合解法的性能1 将组合解法得到的结果与其他数值结果和现有的实验值进行了比较1 结果表明,通过运用自适应网格技术,在减少计算复杂性的条件下,组合解法可以提供较为精确的分析结果1

[参 考 文 献]

- [1] Yamada Y, Ito K, Yokouchi Y, et al. Finite element analysis of steady fluid and metal flow [J]. *Finite Elements in Fluids: Viscous Flow and Hydrodynamics*, 1974, 1: 73-94.
- [2] Kawahara M. Steady and unsteady finite element analysis of incompressible viscous fluid [J]. *Finite Elements in Fluids*, 1974, 3: 23-54.
- [3] Kawahara M, Yoshimura N, Nakagawa K, et al. Steady and unsteady finite element analysis of incompressible viscous fluid [J]. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 1976, 10: 437-456.
- [4] Christie I, Griffiths D F, Mitchell A R, et al. Finite element methods for second order differential equations with significant first derivative [J]. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 1976, 10: 1389-1396.
- [5] Heinrich J C, Huyakorn P S, Zienkiewicz O C, et al. An upwind finite element scheme for two-dimensional convective transport equation [J]. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 1977, 11: 131-143.
- [6] Brooks A N, Heghes T J R. Streamline upwind/Petrov-Galerkin formulations for convection dominated flows with particular emphasis on the incompressible Navier-Stokes equations [J]. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 1982, 32: 199-259.
- [7] Wansophark N, Dechaumphai P. Enhancement of streamline upwinding finite element solutions by adaptive meshing technique [J]. *JSME International Journal Ser B, Fluids and Thermal Engineering*, 2002, 45: 770-779.
- [8] Zienkiewicz O C, Codina, R. A General algorithm for compressible and incompressible flow-part 1: The split, characteristic-based scheme [J]. *International Journal for Numerical Methods in Fluids*, 1995, 20: 869-885.
- [9] 卞德乔姆凡, #封查那帕尼. 用于高速可压缩流体分析的带多维耗散格式的自适应 Delaunay 三角剖分 [J]. *应用数学和力学*, 2005, 26(10), 1216-1228.
- [10] Phongthanapanich S, Dechaumphai P. Evaluation of combined Delaunay triangulation and remeshing

Mechanical Engineering, 2004, 27: 319-340.

- [11] Frey W H. Mesh Relaxation: A new technique for improving triangulations[J]. International Journal for Numerical Methods in Engineering, 1991, 31: 1121-1133.
- [12] Borouchaki H, George P L, Mohammadi B. Delaunay mesh generation governed by metric specifications-part 1: Application[J]. Finite Elements in Analysis and Design, 1997, 25: 85-109.
- [13] White F M. Viscous Fluid Flow [M]. Third edition. New York: McGraw-Hill, 2005.
- [14] Williamson C H K. Oblique and parallel modes of vortex shedding in the wake of a circular cylinder at low Reynolds numbers[J]. Journal of Fluid Mechanics, 1989, 206: 579-627.
- [15] Braza M, Chassaing P, Ha Minh H. Numerical study and physical analysis of the pressure and velocity fields in the near wake of a circular cylinder[J]. Journal of Fluid Mechanics, 1986, 165: 79-130.
- [16] Karniadakis G E, Triantafyllou G S. A passive control of vortex shedding in the wake of a circular cylinder[J]. Journal of Fluid Mechanics, 1989, 199: 441-469.

C o m b i n e d A d a p t i v e M e s h i n g T e c h n i q u e a n d C h a r a c t e r i s t i c -
B a s e d S p l i t A l g o r i t h m f o r V i s c o u s
I n c o m p r e s s i b l e F l o w A n a l y s i s

Suthee Traivivatana¹, Parinya Boonmarlet¹, Patcharee Theeraek¹,
Sutthisak Phongthanapanich², Pramote Dechaumphai¹

(1. Department of Mechanical Engineering, Faculty of Engineering,
Chulalongkorn University, Patumwan, Bangkok 10330, Thailand;

2. Department of Mechanical Engineering Technology, College of Industrial Technology,
King Mongkut's Institute of Technology North Bangkok, Bangsue, Bangkok 10800, Thailand)

Abstract: A combined characteristic-based split algorithm and an adaptive meshing technique for analyzing two-dimensional viscous incompressible flow is presented. The method uses the three-node triangular element with equal-order interpolation functions for all variables of the velocity components and pressure. The main advantage of the combined method is to improve solution accuracy by coupling an error estimation procedure to an adaptive meshing technique that generates small elements in regions with large change in solution gradients, and at the same time, larger elements in other regions. The performance of the combined procedure is evaluated by analyzing the three test cases of the flow past a cylinder, for their transient and steady-state flow behaviors.

Key words: adaptive mesh; characteristic-based split; finite element method; incompressible flow