

# 时变垂向入渗影响下河渠-潜水非稳定 渗流模型的解及应用\*

陶月赞, 姚梅, 张炳峰

(合肥工业大学 土木建筑学院, 合肥 230009)

(李家春推荐)

**摘要:** 在河渠边界控制下的半无限含水层中, 对时变垂向入渗影响下的潜水非稳定渗流模型, 利用 Boussinesq 第一线性化方法, 通过 Laplace 变换并结合卷积原理, 导出模型的解析解. 根据不同水文地质条件下解的数学特征, 建立相应的含水层参数求解方法; 在此基础上, 建立计算河渠与含水层之间水量交换的公式, 以及计算潜水蒸发强度的递推公式. 以安徽淮北平原某河流-潜水含水层系统为例, 阐述上述方法的计算过程与步骤.

**关键词:** 河渠-潜水; 时变入渗; 含水层参数; 水量交换; 潜水蒸发

**中图分类号:** O357.3      **文献标识码:** A

## 引 言

河渠边界控制下的半无限含水层中潜水非稳定渗流模型(河渠-潜水非稳定流模型)及其解, 一直是渗流力学中的研究热点, 它是透水边界影响下潜水的变化过程与规律<sup>[1-4]</sup>、河渠与含水层之间水量交换评价<sup>[5-6]</sup>、含水层参数评估等研究<sup>[7]</sup>的基本理论工具. 近年来, 一些特殊水文地质条件如非水平含水层中的<sup>[8-10]</sup>、或垂向入渗<sup>[11]</sup>(包括降水入渗、灌溉回渗、潜水蒸发等)影响下的河渠-潜水问题的研究, 受到普遍重视.

在稳定的垂向入渗影响下, 现有文献所给出的河渠-潜水非稳定流模型的解<sup>[1-2]</sup>, 往往就因为形式比较复杂而不利于推广应用<sup>[11]</sup>; 如果垂向入渗是一个时变变量, 现有文献的解法只能给出近似解、或形式更加繁杂的解析解. 利用文献<sup>[11]</sup>的求解方法, 结合卷积原理, 对时变垂向入渗作用下的河渠-潜水非稳定流模型, 给出形式比较简单的解析解; 在此基础上, 结合实例讨论解的应用.

## 1 稳定垂向入渗条件下的解

经典河渠-潜水非稳定渗流问题(即 Ferris<sup>[11]</sup>模型, 1950), 其水文地质概念模型可概括为: 平面上无限延伸且水平的潜水含水层均质各向同性, 潜水初始水位水平且潜水流可视为一

\* 收稿日期: 2006-05-31; 修订日期: 2007-07-08

基金项目: 国家自然科学基金资助项目(40474065); “十一五”国家科技支撑计划资助课题(2006BAB01B01)

作者简介: 陶月赞(1964—), 男, 安徽巢湖人, 教授, 博士(联系人. Tel: + 86-551-3640158; E-mail: taoyuezan@sohu.com).

维流; 一条完整切割含水层的河渠, 其水位迅速变化  $\Delta H$  后长时间保持不变. 以上述模型为基础, 非时变垂向入渗作用下的河渠潜水非稳定渗流问题, 可写成如下的数学模型:

$$\begin{cases} \mu \frac{\partial h}{\partial t} = k \frac{\partial}{\partial x} \left( h \frac{\partial h}{\partial x} \right) + \varepsilon & (0 < x < +\infty, t > 0), \\ h(x, t) |_{t=0} = h(x, 0) & (x > 0), \\ h(x, t) |_{x=0} = \Delta H & (t \geq 0), \\ h(x, t) |_{x \rightarrow \infty} = h(x, 0) + \frac{\varepsilon}{\mu} t & (t \geq 0), \end{cases}$$

式中:  $\mu$  是给水度;  $k$  (m/d) 是渗透系数;  $h$  (m) 是潜水位;  $\Delta H$  (m) 是河水位变幅;  $\varepsilon$  (m/d) 是垂向入渗强度(补给含水层为正, 如降水入渗等; 排泄含水层为负, 如潜水蒸发等);  $x$  (m) 是计算点距边界的距离;  $t$  (d) 是时间.

对该模型, 当潜水变幅  $h(x, t) - h(x, 0) \leq 0.1h_m$  ( $h_m$  是潜水流平均厚度, 这一条件在实际中通常是可以满足的<sup>[1], [3-5], [11]</sup>) 时, 根据 Boussinesq 第一线性化方法, 通过 Laplace 变换, 可获得如(1)式的解.

$$h(x, t) = h(x, 0) + \Delta H \cdot \operatorname{erfc} \left( \frac{x}{2\sqrt{at}} \right) + \frac{\varepsilon}{\mu} \int_0^t \operatorname{erf} \left( \frac{x}{2\sqrt{a(t-t')}} dt', \quad (1)$$

式中:  $a$  (m<sup>2</sup>/d) 为含水层的导压系数,  $a = kh_m/\mu$ ;  $\operatorname{erf}(z)$  和  $\operatorname{erfc}(z)$  分别是误差函数和余误差函数,  $z = x/(2\sqrt{at})$ .

与以前研究所获得的解相比, (1)式相对简单, 这为进一步研究提供了便利.

## 2 时变垂向入渗条件下的解

上述水文地质模型中, 垂向入渗强度  $\varepsilon$  是不随时间变化的常量. 但在一个评价期内, 含水层可能接受到潜水蒸发、降水入渗、灌溉回渗等多种垂向作用, 蒸发与入(回)渗是方向完全相反的作用, 此时  $\varepsilon$  显然不是常量; 即使是同一种垂向作用, 如果变化较大, 也应该按变量处理.

对时变  $\varepsilon$ , 根据其实际变化过程, 先将评价期划分为若干个时段; 在每个时段内, 可认为  $\varepsilon$  的变化较小, 将其时段内均值, 作为该时段内的时不变垂向强度. 如图1所示, 对于时段  $T_m$ ,  $T_m = t_{m+1} - t_m$ ;  $\varepsilon$  在

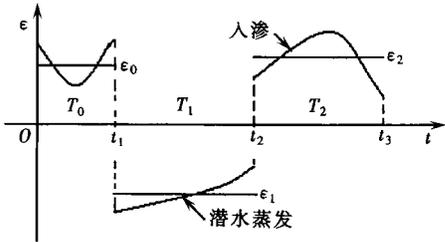


图1 计算时段与  $\varepsilon$  均值

$T_m$  内的均值为  $\varepsilon_m$ .

由(1)式, 利用卷积原理, 在  $t > t_m$  时, 有:

$$\begin{cases} h(x, t) = \sum_{i=0}^m h(x, t_i), \\ h(x, t) = h(x, 0) + \Delta H \cdot \operatorname{erfc} \left( \frac{x}{2\sqrt{at}} \right) + \sum_{i=0}^m \frac{(\varepsilon_{i+1} - \varepsilon_i)}{\mu} \int_{t_i}^t \operatorname{erf} \left( \frac{x}{2\sqrt{a(t-t')}} dt', \end{cases} \quad (2)$$

(2)式是在时变入渗影响下、河渠潜水非稳定渗流的解析解, 它是研究透水边界影响下潜水水位变化过程与规律的基本工具.

### 3 解的应用

河渠-潜水非稳定流模型及其解, 不仅可用来研究潜水位变化, 还可用来求算模型中所涉及的含水层参数、评价潜水含水层与河渠间的水量交换、评价潜水含水层中垂向入渗强度。

#### 3.1 求解含水层参数

利用水位动态数据计算含水层参数, 是研究河渠-潜水非稳定渗流问题的重要目的之一; 依据非时变入渗条件下解的数学特点, 建立与不同水文地质条件相适应的参数求解方法。模型中的含水层参数有  $\mu$ 、 $a$  和  $k$ , 由三者之间关系, 只要求算其中的两个; 由于  $\mu$  一般可利用野外简单实验直接测定, 所以, 利用潜水动态数据主要是计算  $a$ 。

3.1.1  $\varepsilon \neq 0 \cap \Delta H \neq 0$  时 在  $\Delta H$  和  $\varepsilon$  共同作用下, 潜水位变动速度为  $v_t(x, t)$  也即是  $\partial h(x, t)/\partial t$ 。由(1)式,  $v_t(x, t) \sim t$  的变化曲线上存在一拐点, 拐点处的时间为  $t_k$ ; 令  $R = \varepsilon/(\mu \cdot \Delta H)$ , 有:

$$t_k = \begin{cases} \frac{1}{2R} \left[ \sqrt{\left(\frac{3}{2}\right)^2 + \frac{Rx^2}{a}} - \frac{3}{2} \right] & (R > 0), \\ \frac{1}{2R} - \left[ -\sqrt{\left(\frac{3}{2}\right)^2 + \frac{Rx^2}{a}} - \frac{3}{2} \right] & (R < 0), \end{cases} \quad (3)$$

(3)式中,  $R > 0$ 时,  $\varepsilon$ 为正值(如降水入渗, 灌溉回渗等);  $R < 0$ 时,  $\varepsilon$ 为负值时(如潜水蒸发)。在  $\mu$  和  $\varepsilon$  为已知的条件下, 利用可由(3)式  $t_k$  算出  $a$ ; 在进行  $a$  求算过程中, 可选择  $\varepsilon$  变化较小的时段, 并结合其它有关方法先确定  $\varepsilon$  值, 再计算  $a$ 。

3.1.2  $\varepsilon = 0 \cap \Delta H \neq 0$  时 此时, (1)式转化为 Ferris 模型解,  $v_t(x, t) \sim t$  曲线也存在一拐点, 拐点处时间为  $t_j$ 。有:

$$t_j = x^2/(6a) \quad (\varepsilon = 0), \quad (4)$$

众多文献曾讨论或应用过(4)式, 由于与给水度  $\mu$  无关, 只需要一个拐点时间  $t_j$  就可算出  $a$  值。

3.1.3  $\varepsilon \neq 0 \cap \Delta H = 0$  时 在此条件下,  $v_t(x, t) \sim t$  曲线没有拐点, 此时可用配线法进行参数求算。由(1)式, 当  $\Delta H = 0$ , 有:

$$\frac{\partial h}{\partial t} = \frac{\varepsilon}{\mu} \operatorname{erf}\left(\frac{x}{2\sqrt{at}}\right), \quad (5)$$

对于实际的地下水位观测孔而言,  $x$  是已知的, 在  $\varepsilon$  值变化较小的时段,  $\varepsilon/\mu$  可认为是一常数; 令  $\varphi(v) = (\mu/\varepsilon) \cdot (\partial h/\partial t)$ , 将由实测潜水位计算出的  $\varphi(v) \sim t$  与不同  $a$  值条件下的  $\operatorname{erf}(z) \sim t$  理论曲线族进行配线, 就可确定研究中的  $a$  值。

#### 3.2 计算河渠与含水层间的水量交换

在  $t$  时刻, 河渠-含水层水量交换强度用单宽流量  $q(t)$  ( $\text{m}^3/(\text{s} \cdot \text{km})$ ) 表示。根据 Darcy 定律, 由(1)式:

$$\begin{cases} q(t) = -khm \left. \frac{\partial h}{\partial x} \right|_{x=0}, \\ q(t) = \mu \Delta H \sqrt{\frac{a}{\pi t}} - \varepsilon \left[ a - 2 \sqrt{\frac{a}{\pi t}} \right], \end{cases} \quad (6)$$

(6)式中等式右端的第1和第2项, 对应的是  $\Delta H$  和  $\varepsilon$  独立作用时形成的单宽流量, 分别用  $q_j(t)$  和  $q_e(t)$  表示;  $q_j(t)$  也是 Ferris 公式的单宽流量。

在  $0 \sim t$  时段内, 总的单宽交换水量为  $Q(T)$  ( $\text{m}^3/\text{km}$ )。由(6)式求积, 可得:

$$Q(t) = 2\mu\Delta H \sqrt{\frac{at}{\pi}} - \varepsilon \left[ \frac{at}{2} - \frac{4}{3} \sqrt{\frac{at}{\pi}} \right], \quad (7)$$

在  $0 \sim t$  时段内,  $q_\varepsilon(t)$  和  $q_j(t)$  各自独立形成的交换总量分别为  $Q_\varepsilon$  和  $Q_j$ , 分别对应(7) 式中等等号右端的第 1 项和第 2 项;  $Q_j$  也是 Ferris 公式的总交换水量。

在时变  $\varepsilon$  作用下, 与由(1) 式导出(7) 式同理, 在  $t > t_i$  时, 由(6) 式, 有:

$$Q(T) = \frac{2\mu\Delta H}{\sqrt{\pi}} \sqrt{at} - \sum_{i=0}^m (\varepsilon_{i+1} - \varepsilon_i) \cdot (t - t_i) \times \left[ \frac{1}{2} a(t - t_i) - \frac{4}{3\sqrt{\pi}} \sqrt{a(t - t_i)} \right]. \quad (8)$$

在进行水量交换评价或潜水蒸发评价(下述) 时, 含水层的给水度  $\mu$  和导压系数  $a$  必须是已知的。

### 3.3 计算垂向入渗强度

公式(1) 所反映的潜水水位变动幅度  $h(x, t) - h(x, 0)$ , 受 3 个条件控制: 河渠水位变动幅度  $\Delta H$ 、垂向入渗强度  $\varepsilon$ 、以及河渠边界条件。在利用潜水位变动计算垂向入渗强度时, 必须要考虑河渠水位变动和河渠边界的影响, 否则计算将会失真。

由垂向入渗作用形成的潜水位变动速度为  $v_\varepsilon(x, t) = \partial h_\varepsilon(x, t) / \partial t$ 。由(1) 式:

$$v_\varepsilon(x, t) = \frac{\partial h(x, t)}{\partial t} - \frac{\Delta H \cdot x}{2\sqrt{\pi a}} t^{-3/2} \exp\left[-\frac{x^2}{4at}\right], \quad (9)$$

在公式(9) 中,  $\partial h(x, t) / \partial t$  可以利用潜水水位实际测验数据进行计算; 在含水层参数  $a$  为已知的条件下, 可计算所需要时段的  $v_\varepsilon(x, t)$ 。此时, 再结合(2) 式, 可建立求解不同时段内  $\varepsilon$  的递推方程:

$$\begin{cases} v_\varepsilon(x, t) = \frac{\varepsilon_0}{\mu} \operatorname{erf}\left[\frac{x}{2\sqrt{at}}\right] & (t_1 \geq t > 0), \\ v_\varepsilon(x, t) = \frac{\varepsilon_0}{\mu} \operatorname{erf}\left[\frac{x}{2\sqrt{at}}\right] + \frac{\varepsilon_1 - \varepsilon_0}{\mu} \operatorname{erf}\left[\frac{x}{2\sqrt{a(t-t_1)}}\right] & (t_2 \geq t > t_1), \\ \vdots \\ v_\varepsilon(x, t) = \frac{\varepsilon_0}{\mu} \operatorname{erf}\left[\frac{x}{2\sqrt{at}}\right] + \sum_{i=1}^m \frac{\varepsilon_i - \varepsilon_{i-1}}{\mu} \operatorname{erf}\left[\frac{x}{2\sqrt{a(t-t_i)}}\right] & (t > t_{m-1}). \end{cases} \quad (10)$$

根据(10) 式, 先计算  $\varepsilon_0$ , 再算  $\varepsilon_1$ , 逐步递推, 最后计算  $\varepsilon_m$ 。

## 4 实例研究

在安徽省淮北平原中部地区, 厚度为 8.0 m 左右的潜水含水层在全区较均匀分布, 潜水静水位埋深 2.5 m 上下变动; 由于潜水位埋深较浅, 潜水含水层受降水、蒸发以及河渠水位的影响明显。区内有一大型深沟引水灌渠, 灌渠基本完全深切至潜水含水层底板; 在其节制闸上游约 3 km 处, 有一地下水水位观测井(自记式), 井距渠直线距离 65 m; 井附近地面标高 30.72 m。

研究时段为 1994 年 7 月 17 日至 23 日; 7 月 16 日下午关闸蓄水, 渠水位迅速升高 1.46 m。17 日、18 日连续降水, 19 日至 23 日为潜水蒸发时段。研究中, 给水度  $\mu$  用野外实测数据为 0.035。

### 4.1 导压系数求算

首先, 利用降水阶段的水位动态测验数据计算导压系数  $a$ 。17 日、18 日降水时程分配比较均匀, 日平均降水量为 18.0 mm, 据区域研究成果降水入渗系数取 0.2, 因此, 降水入渗强度

为 3.6 mm/d.

从连续的自记潜水变化过程上摘录水位,用来计算水位变动速度;采用向前、向后插值计算的值分别是  $v_1$  和  $v_2$ .按 6 h 摘录,在 18 h 左右出现拐点,因此,在 18 h 前后加密摘录至 3 h 一次;拐点时间  $t_k$  在 15 h~18 h 之间,取  $t_k = 16.5$  h.有关数据和计算结果,见表 1、图 2.

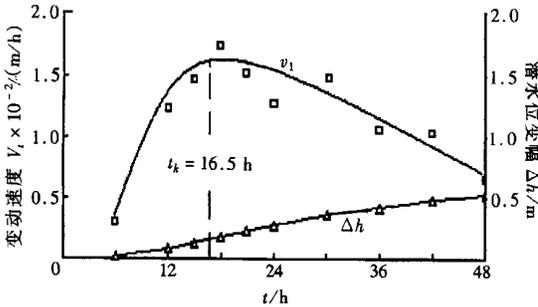


图 2 水位变动速度随时间变化过程

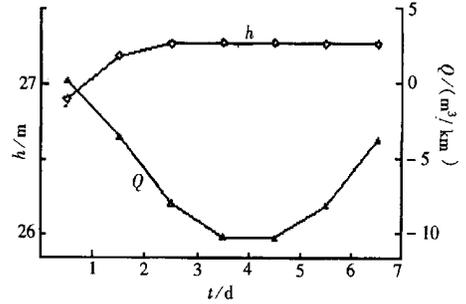


图 3 水平水量交换总量与潜水位变化过程

表 1 水位测验数据与变动速度(1994 年 7 月 17 日~18 日)

t/h	6	12	15	18	21	24	30	36	42	48
h/m	27.76	27.83	27.88	27.93	27.97	28.01	28.10	28.16	28.22	28.22
$v_1$ /(cm/h)	0.30	1.52	1.47	1.73	1.50	0.63	1.47	1.05	1.03	0.65
$v_2$ /(cm/h)	1.22	1.47	1.73	1.50	1.27	1.47	1.05	1.03	0.65	

备注  $v_1(t_i) = (h_{i+1} - t_i)/(t_{i+1} - t_i)$ ;  $v_2(t_i) = (h_i - t_{i-1})/(t_i - t_{i-1})$ .

据上述有关基础数据:  $x = 65$  m,  $t_k = 16.5$  h,  $R = 0.0036/(1.46 \times 0.035) = 0.07$ ; 利用(3)式,可求出  $a = 854.82$  m<sup>2</sup>/d.

#### 4.2 水量交换强度评价

在含水层参数为已知的条件下,利用潜水日平均水位(观测数据),根据公式(10),可逐日计算出垂向水量交换强度;在此基础上,利用公式(8),可计算出含水层与河渠的水量交换强度.有关测验数据和计算结果,见表 2 和图 3.

由上述评价结果,19 日至 23 日,潜水平均蒸发强度为 2.4 mm/d;在 7 d 的评价期内,总体是含水层向渠道排泄,累计排泄强度为 3.70 m<sup>3</sup>/km.

由表 2 和图 3,在评价的早期(17 日),含水层接受渠水补给;18 日至 21 日,含水层向灌渠排泄;自 22 日,含水层又开始接受渠水补给.但在 17 日至 21 日,潜水位一直在上升,这显然与这一水量交换过程的变化不同步,这是因为受前期降水入渗(垂向水量交换)作用的影响.这也说明,在实例中,垂向入渗作用是不可忽略的.

表 2 垂向水量交换强度、含水层与灌渠间水量交换强度评价

日期	17	18	19	20	21	22	23	
潜水日平均水位 h/m	27.90	28.19	28.27	28.28	28.28	28.27	28.27	
垂向入渗强度 $\varepsilon$ /(m/d)	0.003 8	0.003 0	- 0.000 6	- 0.002 8	- 0.002 9	- 0.003 2	- 0.002 3	
水平水量交换强度	逐日 (q)	0.23	- 3.77	- 4.42	- 2.27	- 0.06	2.17	4.42
q/(m <sup>3</sup> /km)	累计 (Q)	0.23	- 3.55	- 7.96	- 10.2	- 10.3	- 8.13	- 3.70

备注 垂向交换中的“-”表示潜水蒸发;水平交换中的“-”表示潜水排泄河渠.

## 5 讨论与结论

对时变入渗影响下河渠-潜水非稳定流模型的解及其应用,在进行结合实例的研究过程中,形成如下结论与建议.

1) 对河渠-潜水非稳定渗流问题,以非时变  $\varepsilon$  条件下的解为基础,利用卷积原理,可获得时变  $\varepsilon$  影响下的解析解,它不仅可用来研究潜水水位变化过程与规律,还可用来求算模型中所涉及的含水层参数、评价潜水含水层与河渠间的水量交换、评价潜水含水层中垂向入渗强度.对于河流水位随时间变化问题,利用上述方法原理,也可以获得相应问题的解.

2) 在利用河渠附近潜水位动态资料求含水层参数时,如果河渠水位有明显变化,可采用拐点法;在河渠水位基本不变的条件下,可采用配线法.

3) 目前潜水蒸发问题的计算,基本上都是一些经验、半经验的计算方法,河渠-潜水非稳定渗流模型的解,为评价潜水蒸发强度提供了一比较实用的理论方法.

4) 实例中,河渠与含水层之间的后期水量交换过程,明显受到前期垂向入渗的影响,这不仅说明垂向入渗作用在评价中的重要性,而且也表明垂向与水平方向的水量交换有一定的转换关系.

另外,在实际工作中,  $\varepsilon$  不仅是时间变量,而且还是空间变量,所以应该开展相应的数值模型研究.

### [参 考 文 献]

- [1] 张蔚榛. 地下水非稳定流计算和地下水资源评价[M]. 北京: 科学出版社, 1983.
- [2] 毛昶熙. 渗流计算分析与控制[M]. 北京: 中国水利水电出版社, 1988.
- [3] Sergio E S. Modeling groundwater flow under transient nonlinear free surface[J]. Journal of Hydrologic Engineering, 2003, 8(3): 123-132.
- [4] Srivastava R. Aquifer response to linearly varying stream stage[J]. Journal of Hydrologic Engineering, 2003, 8(6): 361-364.
- [5] Edenhofer J, Schmitz G H. Pressure distribution in a semi-infinite horizontal aquifer with steep gradients due to steady recharge and/ or drainage: the exact explicit solution[J]. Transport in Porous Media, 2001, 45(3): 345-364.
- [6] Mishra A, Hata T, Abdelhadi A W. Models for recession flows in the upper blue Nile river[J]. Hydrological Processes, 2004, 18(15): 2773-2786.
- [7] Szilagyi J, Parlange M B, Albertson J D. Recession flow analysis for aquifer parameter determination[J]. Water Resources Research, 1998, 34(7): 1851-1857.
- [8] Basha H A, Maalouf S F. Theoretical and conceptual models of subsurface hillslope flows[J]. Water Resources Research, 2005, 41(7): 1-7, doi: 10.1029/2004WR003769.
- [9] Troch P A, Van Loon A H, Hilberts A G J. Analytical solution of the linearized hillslope-storage Boussinesq equation for exponential hillslope width functions[J]. Water Resources Research, 2004, 40(8): 1-6, doi: 10.1029/2003WR002850
- [10] Woo S B, Philip L F L. Water table profiles and discharges for an inclined ditch drained aquifer under temporally variable recharge[J]. Journal of Irrigation and Drainage Engineering, 2003, 129(2): 93-99
- [11] 陶月赞, 席道瑛. 垂直与水平渗透作用下潜水非稳定渗流运动规律[J]. 应用数学和力学, 2006, 27(1): 53-59.

# Solution and Its Application of Transient Stream/ Groundwater Model Subjected to Time-Dependent Vertical Seepage

TAO Yue-zan, YAO Mei, ZHANG Bing-feng

(School of Civil Engineering, Hefei University of Technology,  
Hefei 230009, P. R. China)

**Abstract:** Based on the first linearized Boussinesq equation, analytical solution of the transient groundwater model, which is used for describing phreatic flow in a semi-infinite aquifer bounded by a linear stream and subjected to time-dependent vertical seepage, is derived out by Laplace transform and the convolution integral. According to the mathematical characteristics of the solution, different methods for estimating aquifer parameters are constructed to satisfy different hydrological conditions. Then, the equation for estimating water exchange between stream and aquifer is proposed. And a recursion equation for estimating the intensity of phreatic evaporation is proposed too. A phreatic aquifer-stream system located in Huaibei Plain, Anhui Province, China, is taken as an example to demonstrate the estimation process of the methods stated above.

**Key words:** stream/ groundwater aquifer; time-dependent vertical seepage; parameters of aquifer; water quantity exchange; phreatic evaporation