

粘滞性粒子动力学中的二维 非自相似初值问题*

孙文华^{1,2}, 盛万成¹

(1. 上海大学 数学系, 上海 200444;

2. 山东理工大学 数学与信息科学学院, 山东 淄博 255049)

(郭兴明推荐)

摘要: 研究了二维粘滞性粒子动力学中的非自相似初值问题. 该初值被一圆环分为内外两块常状态. 利用广义特征分析的方法和广义 Rankine-Hugoniot 关系, 该关系是常微分方程组, 一个包含狄拉克激波和真空的整体解被构造性地得到.

关键词: 粘滞性粒子动力学; 广义 Rankine-Hugoniot 关系; 熵条件; 狄拉克激波; 真空
中图分类号: O175.27 文献标识码: A

引 言

研究粘滞性粒子动力学中的二维零压流系统

$$\begin{cases} \rho_t + \operatorname{div}(\rho U) = 0, \\ (\rho U)_t + \operatorname{div}(\rho U \otimes U) = 0, \end{cases} \quad (1)$$

带有非自相似初值

$$(\rho, U)(0, x, y) = \begin{cases} (\rho_1, U_1) & (x, y) \in \Omega_1, \\ (\rho_2, U_2) & (x, y) \in \Omega_2, \end{cases} \quad (2)$$

其中 $\rho(t, x, y) \geq 0$ 和 $U = (u, v)$ 分别为密度和平均速度, $\operatorname{div} = (\partial_x, \partial_y)$, \otimes 是张量积, $\Omega_1 = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 < a^2\}$, $\Omega_2 = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 > a^2\}$, a 是任一正数.

本系统可以用来描述低温下自由粒子的粘合碰撞过程, 从而能够用来刻画宇宙中大尺度星体的形成等^[1,2]. 系统(1)是空气动力学中等熵 Euler 方程在忽略粘性下直接得到的结果^[3,4].

系统(1)的解中有可能会出现狄拉克激波^[4,5]. 关于狄拉克激波的研究请参看文献[4]至文献[9]等. 由于广义 Rankine-Hugoniot 关系(该关系在一维的情况下是一常微分方程组, 在高维的情况下是一偏微分方程组)的出现, 狄拉克激波分别从位置, 速度和权各方面得到了很好的描述. 对于该系统的 Riemann 问题, 在 Radon 测度的意义下存在唯一满足几何熵条件的解^{[4,5],[10]}.

最近, 文献[11]至文献[18]分别研究了某些双曲守恒律系统的初值问题. 文献[11]研究

* 收稿日期: 2006-07-05; 修订日期: 2007-05-18

基金项目: 国家自然科学基金资助项目(10671120)

作者简介: 孙文华(1976—), 男, 山东人, 博士(联系人, E-mail: sunwenhua@tom.com).

了空气动力系统学中高维零压流初值被一超平面分为两块常状态的初值问题, 作者利用自相似变换的方法把高维问题转化为一维问题, 从而使问题得到了解决. 在文献[12]中, 作者研究了一个二维双曲守恒律系统初值被一光滑凸曲线分为无穷大的两块常状态的非自相似初值问题, 并且构造性的得到了问题的解.

本文研究粘滞性粒子动力学中零压流方程的非自相似初值问题, 该初值被一圆环分为内为不相交的两块常状态. 该问题相对 Riemann 问题而言向 Cauchy 问题又迈进了一步. 其结果也可以用来检验数值计算. 利用广义特征分析的方法和广义的 Rankine-Hugoniot 关系, 在几何熵条件的意义下问题的整体解被构造性地给出.

本文内容安排如下: 在第 1 节中我们首先给出一些预备知识. 在该节中解决了系统(1)的 Riemann 问题. 该问题的初值被一直线分为左右两部分. 在该节中我们同时也引入了特征方法, 广义 Rankine-Hugoniot 关系和熵条件. 作为构造问题(1)和问题(2)的解的一个准备, 第 2 节研究了系统(1)带有初始集中的初值问题. 在第 3 节中我们完成了非自相似问题(1)和问题(2)解的构造.

1 预备知识

考虑系统(1)带有以下初值的 Riemann 问题

$$(\rho, U)(0, x, y) = \begin{cases} (\rho_1, U_1), & \mathbb{H}_x + \mathbb{V}_y < 0, \\ (\rho_2, U_2), & \mathbb{H}_x + \mathbb{V}_y > 0, \end{cases} \quad (3)$$

其中 $(\mathbb{H}, \mathbb{V}) =: \mathbf{n}$ 是直线 $\mathbb{H}_x + \mathbb{V}_y = 0$ 单位法向, 方向指向 $\mathbb{H}_x + \mathbb{V}_y > 0$ 的一方.

定义 1.1 对于任意的检验函数 $\phi \in C_0^\infty([0, \infty) \times R^1)$, 若 (ρ, U) 满足关系式

$$\begin{cases} \int_0^\infty \int_{-\infty}^\infty (\phi_t + \mathbf{U} \cdot \nabla \phi) d\rho dt = 0, \\ \int_0^\infty \int_{-\infty}^\infty \mathbf{U}(\phi_t + \mathbf{U} \cdot \nabla \phi) d\rho dt = 0, \end{cases} \quad (4)$$

则称 (ρ, U) 为(1)式的一个弱解.

根据(1)式和(3)式的形式, 我们可以寻找如下形式的平面波解

$$(\rho, U)(t, x, y) = (\rho, U)(t, \zeta), \quad \zeta = \mathbb{H}_x + \mathbb{V}_y. \quad (5)$$

对于光滑解, (1)式可化为一维双曲守恒律系统

$$\begin{cases} \rho_t + (\rho(\mathbf{U} \cdot \mathbf{n}))_\zeta = 0, \\ (\rho(\mathbf{U} \cdot \mathbf{n}))_t + (\rho(\mathbf{U} \cdot \mathbf{n})^2)_\zeta = 0. \end{cases} \quad (6)$$

该系统在方向 \mathbf{n} 上存在一个重特征 $\lambda = \mathbf{U} \cdot \mathbf{n}$, 其对应的特征向量为 $\mathbf{r} = (1, 0)$, 又因为 $\nabla \cdot \lambda \mathbf{r} = 0$, 所以系统(6)是非严格双曲的, 特征区域是完全非线性的.

系统(6)的特征方程为

$$\begin{cases} \frac{d\zeta}{dt} = \mathbf{U} \cdot \mathbf{n}, \\ \frac{d\rho}{dt} = -\rho(\mathbf{U} \cdot \mathbf{n})_\zeta, \\ \frac{d(\mathbf{U} \cdot \mathbf{n})}{dt} = 0. \end{cases} \quad (7)$$

上式表明所有的特征线是直线, 并且在每条特征线上 $\mathbf{U} \cdot \mathbf{n}$ 保持为常数.

Riemann 问题(1)和问题(3)的解除了常状态和真空解 $V_{\text{vac}}(\rho = 0)$ 以外还包含接触间断

$$J: \zeta/t = \mathbf{U}_1 \cdot \mathbf{n} = \mathbf{U}_2 \cdot \mathbf{n}. \quad (8)$$

因此, 当 $\mathbf{U} \cdot \mathbf{n} < 0$ 时, Riemann 问题(1) 和问题(3) 的解是

$$(\rho, \mathbf{U})(t, \zeta) = \begin{cases} (\rho_1, \mathbf{U}_1)(t, \zeta), & \zeta < \mathbf{U}_1 \cdot \mathbf{n}t, \\ V_{ac}, & \mathbf{U}_1 \cdot \mathbf{n}t < \zeta < \mathbf{U}_2 \cdot \mathbf{n}t, \\ (\rho_2, \mathbf{U}_2)(t, \zeta), & \zeta > \mathbf{U}_2 \cdot \mathbf{n}t. \end{cases} \quad (9)$$

其中 $G = G_1 - G_2$ 在本文中如无特别说明都是指 G 跨过间断的差, V_{ac} 为真空解.

当 $\mathbf{U} \cdot \mathbf{n} > 0$ 时, 狄拉克激波将会产生. 从物理角度讲, 狄拉克激波的形成是由于粒子的高度集中. 粒子在碰撞粘合以前都会保持直线运动状态, 它们的轨迹就是特征线. 粒子的碰撞等同于特征线的相遇. 因此我们能够用此理论来构造问题的解. 就此而言, 应该在广义范函的意义下在 Borel 空间中寻找问题的解. 由 Borel 测度理论和 Radon-Nykodym 定理, 当 $t > 0$ 时问题的测度解应满足定义 1.1. 如果以下广义 Rankine-Hugoniot 关系成立, 则称 Riemann 问题(1) 和问题(3) 在测度空间中在方向 \mathbf{n} 上存在一个满足(4) 式的弱解

$$\begin{cases} \frac{d\zeta}{dt} = \mathbf{U}_\delta \cdot \mathbf{n}, \\ \frac{dw}{dt} = - [\rho](\mathbf{U}_\delta \cdot \mathbf{n}) + [\rho(\mathbf{U} \cdot \mathbf{n})], \\ \frac{d(w\mathbf{U}_\delta)}{dt} = - [\rho\mathbf{U}](\mathbf{U}_\delta \cdot \mathbf{n}) + [\rho\mathbf{U}(\mathbf{U} \cdot \mathbf{n})], \end{cases} \quad (10)$$

其中 ζ , \mathbf{U}_δ 和 w 分别为狄拉克激波的位置, 速度和权. 利用格林公式和分步积分, 能够证明(10) 式和(4) 式是等价的. 在几何熵条件

$$\mathbf{U}_2 \cdot \mathbf{n} \leq \mathbf{U}_\delta \cdot \mathbf{n} \leq \mathbf{U}_1 \cdot \mathbf{n} \quad (11)$$

的意义下, 问题的狄拉克激波解是唯一的.

因此, 当 $\mathbf{U} \cdot \mathbf{n} > 0$, Riemann 问题(1) 和问题(3) 在方向 \mathbf{n} 上有如下形式的解

$$\rho(t, \zeta) = \rho_+ w \delta(\zeta - \mathbf{U}_\delta \cdot \mathbf{n}t), \quad \mathbf{U}(t) = \begin{cases} \mathbf{U}_1, & \zeta < \mathbf{U}_\delta \cdot \mathbf{n}t, \\ \mathbf{U}_\delta, & \zeta = \mathbf{U}_\delta \cdot \mathbf{n}t, \\ \mathbf{U}_2, & \zeta > \mathbf{U}_\delta \cdot \mathbf{n}t, \end{cases} \quad (12)$$

其中

$$\begin{cases} \rho(t, \zeta) = \begin{cases} \rho_1, & \zeta < \mathbf{U}_\delta \cdot \mathbf{n}t, \\ \rho_2, & \zeta > \mathbf{U}_\delta \cdot \mathbf{n}t, \end{cases} \\ w(t, \zeta) = \sqrt{\rho_1 \rho_2}(\mathbf{U} \cdot \mathbf{n})t, \quad \mathbf{U}_\delta = (\sqrt{\rho_1} \mathbf{U}_1 + \sqrt{\rho_2} \mathbf{U}_2) / (\sqrt{\rho_1} + \sqrt{\rho_2}). \end{cases} \quad (13)$$

2 具有初始集中的问题(1) 的解

作为构造非自相似初值问题(1) 和初值问题(2) 解的一个准备, 我们首先考虑(1) 式带有初始集中的 Riemann 问题

$$\rho|_{t=t_0} = \rho_+ m_0 \delta(\zeta), \quad \mathbf{U}|_{t=t_0} = \begin{cases} \mathbf{U}_1, & \zeta < 0, \\ \mathbf{U}_0, & \zeta = 0, \\ \mathbf{U}_2, & \zeta > 0, \end{cases} \quad (14)$$

其中

$$\rho(t_0, x, y) = \begin{cases} \rho_1, & \zeta < 0, \\ \rho_2, & \zeta > 0, \end{cases} \quad (15)$$

$m_0 > 0$, $\zeta = (x - x_0, y - y_0) \cdot \mathbf{n}$, $\mathbf{n} = (\mu, \nu)$ 是直线 $\zeta = 0$ 指向 $\zeta > 0$ 的单位法向. 并且 $U_0 \cdot \mathbf{n}$ 满足熵条件

$$U_2 \cdot \mathbf{n} \leq U_0 \cdot \mathbf{n} \leq U_1 \cdot \mathbf{n}. \quad (16)$$

在此情形中, 若 $U \cdot \mathbf{n} > 0$, 则狄拉克激波将会出现.

积分带有初值(14)的 Rankine-Hugoniot 关系式(10), 得

$$w + [\rho] \zeta = m_0 + [\rho(U \cdot \mathbf{n})](t - t_0) \quad (17)$$

和

$$w U_\delta + [\rho U] \zeta = m_0 U_0 + [\rho U(U \cdot \mathbf{n})](t - t_0). \quad (18)$$

分别用 $U_\delta \cdot \mathbf{n}$ 和 \mathbf{n} 乘以(17)式和(18)式, 然后相减得

$$\begin{aligned} [\rho](U_\delta \cdot \mathbf{n}) \zeta - [\rho U] \cdot \mathbf{n} \zeta &= m_0(U_\delta \cdot \mathbf{n}) - m_0 U_0 \cdot \mathbf{n} + \\ &[\rho(U \cdot \mathbf{n})](U_\delta \cdot \mathbf{n})(t - t_0) - [\rho U(U \cdot \mathbf{n})] \cdot \mathbf{n}(t - t_0), \end{aligned} \quad (19)$$

则

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left[\frac{[\rho]}{2} \zeta^2 - (m_0 + [\rho(U \cdot \mathbf{n})](t - t_0)) \zeta \right] &= \\ - m_0 U_0 \cdot \mathbf{n} - [\rho(U \cdot \mathbf{n})]^2 (t - t_0). \end{aligned} \quad (20)$$

因此

$$\begin{aligned} \frac{[\rho]}{2} \zeta^2 - (m_0 + [\rho(U \cdot \mathbf{n})](t - t_0)) \zeta &= \\ - m_0 U_0 \cdot \mathbf{n}(t - t_0) - \frac{[\rho(U \cdot \mathbf{n})]^2}{2} (t - t_0)^2 =: f(t; t_0). \end{aligned} \quad (21)$$

则

$$\zeta(t) = \begin{cases} -\frac{f(t; t_0)}{m_0 + [\rho(U \cdot \mathbf{n})](t - t_0)}, & [\rho] = 0, \\ \frac{m_0 + [\rho(U \cdot \mathbf{n})](t - t_0) - w(t)}{[\rho]}, & [\rho] \neq 0, \end{cases} \quad (22)$$

并且

$$w(t) = \left\{ m_0^2 + \rho_1 \rho_2 [U \cdot \mathbf{n}]^2 (t - t_0)^2 + 2m_0 [\rho(U \cdot \mathbf{n})](t - t_0) - 2[\rho] m_0 U_0 \cdot \mathbf{n}(t - t_0) \right\}^{1/2}. \quad (23)$$

由(18)式得

$$U_\delta(t) = \frac{1}{w(t)} (m_0 U_0 + [\rho U(U \cdot \mathbf{n})]t - [\rho U] \zeta). \quad (24)$$

注 2.1 当 $t_0 = 0$, 且 $m_0 = 0$, $U_0 = 0$ 时, 有

$$(\zeta, w, U_\delta)(t) = \left[\frac{(\sqrt{\rho_1} U_1 + \sqrt{\rho_2} U_2) \cdot \mathbf{n}}{\sqrt{\rho_1} + \sqrt{\rho_2}} t, \sqrt{\rho_1 \rho_2} ([U] \cdot \mathbf{n}) t, \frac{\sqrt{\rho_1} U_1 + \sqrt{\rho_2} U_2}{\sqrt{\rho_1} + \sqrt{\rho_2}} \right]. \quad (25)$$

命题 2.1 ($\zeta(t)$, $w(t)$, $U_\delta(t)$) 具有如下性质:

- 1) $w(t) \geq 0$ 是 t 的增函数;
- 2) $d\zeta/dt$ 和 dw/dt 都是 t 的单调函数;
- 3) $U_\delta(t)$ 满足熵条件(11), 而且有

$$\lim_{t \rightarrow \infty} U_\delta(t) = \frac{\sqrt{\rho_1} U_1 + \sqrt{\rho_2} U_2}{\sqrt{\rho_1} + \sqrt{\rho_2}}.$$

因此问题(1)和问题(14)的 Riemann 解为:

$$\rho(t, \zeta) = \rho(t, \zeta) + w(t) \delta(\zeta - \zeta(t)), \quad t > t_0, \quad (26)$$

$$U(t) = \begin{cases} U_1, & \zeta < \zeta(t), \\ U_\delta(t), & \zeta = \zeta(t), \quad t > t_0, \\ U_2, & \zeta > \zeta(t), \end{cases} \quad (27)$$

其中

$$\rho(t, \zeta) = \begin{cases} \rho_1, & \zeta < \zeta(t), \\ \rho_2, & \zeta > \zeta(t), \end{cases} \quad (28)$$

$\zeta(t)$ 、 $w(t)$ 、 $U_\delta(t)$ 分别具有(22)式、(23)式、(24)式的形式.

3 构造非自相似初值问题(1)和问题(2)的解

若用 $(x_0, y_0) = (a \cos \theta, a \sin \theta)$ ($\theta \in [-\pi, \pi]$) 来表示初始间断线 $x^2 + y^2 = a^2$ 上的点, 则间断线在此点的单位外法向为 $\mathbf{n}_0 := (\cos \theta, \sin \theta)$. 我们将按如下两种情形来构造此初值问题的解.

情形 1 $U_1 = U_2$

在此情形中, 问题的解被一间断 J 分为两个常状态:

$$(\rho, U) = \begin{cases} (\rho_1, U_1), & (x - ut)^2 + (y - vt)^2 < a^2, \\ (\rho_2, U_2), & (x - ut)^2 + (y - vt)^2 > a^2. \end{cases} \quad (29)$$

情形 2 $U_1 \neq U_2$

在此情形中, $U \cdot \mathbf{n}_0$ 可以写为

$$(u_1 - u_2) \cos \theta + (v_1 - v_2) \sin \theta = \sqrt{(u_1 - u_2)^2 + (v_1 - v_2)^2} \sin(\varphi + \theta),$$

其中 $\varphi = \arctan((u_1 - u_2)/(v_1 - v_2))$. 为了便于问题的讨论, 设

$$\varphi \in (0, \pi/2). \quad (31)$$

对于任意给定的两个常状态 (ρ_1, U_1) 和 (ρ_2, U_2) , 在初始间断上总存在两个点 $\theta_1 = -\varphi$ 和 $\theta_2 = \pi - \varphi$ 满足 $U \cdot \mathbf{n}_0 = 0$.

于是有结论:

1) 当 $\theta \in (-\varphi, \pi - \varphi)$, $U \cdot \mathbf{n}_0 > 0$ 时, 狄拉克激波解将会出现;

2) 当 $\theta \in (\pi - \varphi, 2\pi - \varphi)$, $U \cdot \mathbf{n}_0 < 0$ 时, 问题的解是一接触间断 J 连接一常状态 (ρ_2, U_2) 和一真空.

现在来逐点构造问题(1)和问题(2)的解, 其中 $\theta \in (-\varphi, \pi - \varphi)$. 为了证明以上结论, 我们首先给出一个引理.

对于任意给定的两个常状态, 发自初始间断线的狄拉克激波具有以下性质:

引理 3.1 过任意初始间断上的点 $(x_0, y_0) \in \{(x, y) | x^2 + y^2 = a^2, \theta \in (-\varphi, \pi - \varphi)\}$, 存在一直线

$$l: (x - x_0, y - y_0) \cdot \mathbf{n}_{\theta_1} = 0, \quad (32)$$

从直线 l 发出的所有的特征线形成一平面, 在该平面中一狄拉克激波从点 (x_0, y_0) 发出, 并在遇到真空前保持定常速度 U_δ (见(25)式) 行进.

证 由于特征理论, 发自 l 在 $x^2 + y^2 > a^2$ 部分上的特征线和发自 l 在 $x^2 + y^2 < a^2$ 部分上的特征线所形成的平面具有共同的法向

$$(v_1 - v_2, u_2 - u_1, u_1 v_2 - u_2 v_1),$$

从而, 由 l 出发的特征线共面

$$\Gamma: (v_1 - v_2)(x - x_0) - (u_1 - u_2)(y - y_0) + (u_1v_2 - u_2v_1)t = 0. \quad (33)$$

具有速度 U_6 的狄拉克激波从 (x_0, y_0) 发出, 并且在遇到真空以前保持速度不变. 引理证毕.

问题在平面 Γ 中被简化为具有 3 片常状态的非自相似初值问题.

记状态 (ρ_1, U_1) 消失的时间为 t_0^0 . 因此从上面的引理得

$$\begin{cases} (x - x_0, y - y_0) \cdot \mathbf{n}_0 = \frac{(\sqrt{\rho_1} U_1 + \sqrt{\rho_2} U_2) \cdot \mathbf{n}_0}{\sqrt{\rho_1} + \sqrt{\rho_2}} t_0^0, \\ (x - a \cos(2\varphi + \theta), y - a \sin(2\varphi + \theta)) \cdot \mathbf{n}_0 = U_1 \cdot \mathbf{n}_0 t_0^0, \end{cases} \quad (34)$$

注意到(30)式, 有

$$t_0^0 = 2a \sin(\varphi + \theta) \frac{1 + \sqrt{\rho_1/\rho_2}}{\sqrt{(u_1 - u_2)^2 + (v_1 - v_2)^2}}. \quad (35)$$

当 $\theta = -\varphi + \pi/2$ 时, t_0^0 有最大值 $t_{\max} = 2a \frac{1 + \sqrt{\rho_1/\rho_2}}{\sqrt{(u_1 - u_2)^2 + (v_1 - v_2)^2}}$.

对于非自相似初值问题(1)和非自相似初值问题(2), 由(25)式得, 当 $t < t_0^0$ 时狄拉克激波为

$$\begin{cases} x = a \cos \theta + \frac{\sqrt{\rho_1} u_1 + \sqrt{\rho_2} u_2}{\sqrt{\rho_1} + \sqrt{\rho_2}} t =: x(t), \\ y = a \sin \theta + \frac{\sqrt{\rho_1} v_1 + \sqrt{\rho_2} v_2}{\sqrt{\rho_1} + \sqrt{\rho_2}} t =: y(t). \end{cases} \quad (36)$$

当 $t < t_0^0$ 时, 非自相似问题(1)和非相似问题(2)的解为

$$(\rho, \mathbf{U})(t, \zeta) = (\rho, \mathbf{U})(t, \zeta) + (w(t, \zeta) \delta(\zeta - \zeta(t)), U_6), \quad (37)$$

其中 $\zeta = (x - x(t), y - y(t)) \cdot \mathbf{n}_0$,

$$\begin{aligned} (\rho, \mathbf{U})(t, \zeta) = & \\ \begin{cases} (\rho_1, U_1), & (x, y) \in \Sigma_1 = \{(x, y) \mid (x, y) = A + \lambda_1(B - A), \lambda_1 \in (0, 1)\}, \\ V_{ac}, & (x, y) \in \Sigma_2 = \{(x, y) \mid (x, y) = C + \lambda_2(A - C), \lambda_2 \in (0, 1)\}, \\ (\rho_2, U_2), & (x, y) \in l' \setminus (\Sigma_1 \cup \Sigma_2), \end{cases} \end{aligned} \quad (38)$$

$$l' = \{(x, y) \mid ((x - x_0, y - y_0) - U_6 t) \cdot \mathbf{n}_0 = 0\},$$

$$A = a(\cos(2\varphi + \theta), -\sin(2\varphi + \theta)) + U_1 t, B = (x_0, y_0) + U_6 t,$$

$$C = a(\cos(2\varphi + \theta), -\sin(2\varphi + \theta)) + U_2 t.$$

当 $t = t_0^0$ 时, 把(35)式带入(25)式, 得非自相似问题的解为

$$(\rho, \mathbf{U})|_{t=t_0^0} = (\rho, \mathbf{U})(t_0^0) + (w \delta(\zeta - \zeta(t_0^0)), U_6), \quad (39)$$

其中

$$\begin{aligned} (\rho, \mathbf{U})(t_0^0, \zeta) = & \\ \begin{cases} V_{ac}, & (x, y) \in \Sigma = \{(x, y) \mid (x, y) = C + \lambda(B - C), \lambda \in (0, 1)\}, \\ (\rho_2, U_2), & (x, y) \in l' \setminus \Sigma. \end{cases} \end{aligned} \quad (40)$$

当 $t \geq t_0^0$ 时, 问题相当于求解(10)式带有初值(14)式的问题. 其中

$$(\zeta_0, m_0, \mathbf{U}_0) = (\zeta, w, \mathbf{U}_\delta)(t_0^0),$$

注意到此时狄拉克激波的左侧 ($\zeta < \zeta(t_0^0)$) 为真空, 由第2节的结果可以直接得非自相似问题(1)和相似问题(2)的解为

$$(\rho, \mathbf{U})(t, \zeta) = (\rho, \mathbf{U})(t, \zeta) + (w \delta(\zeta - \zeta(t)), \mathbf{U}_\delta), \quad (41)$$

其中 $\zeta(t)$ 、 $w(t)$ 、 $\mathbf{U}_\delta(t)$ 具有(22)式至(24)式的形式.

$$(\rho, \mathbf{U})(t, \zeta) = \begin{cases} V_{ac}, & (x, y) \in \Sigma = \{(x, y) \mid (x, y) = C + \lambda(B - C), \lambda \in (0, 1)\}, \\ (\rho_2, \mathbf{U}_2), & (x, y) \in I' \setminus \Sigma, \end{cases} \quad (42)$$

解构造完毕.

定理 3.1 粘滞性粒子学中零压流系统的非自相似初值问题(1)和非自相似初值问题(2)存在形式为(37)式、(39)式和(41)式的解(见图1, $P_1: (a \cos(-\varphi) + u_2 t, a \sin(-\varphi) + v_2 t)$, $P_2: (a \cos(\pi - \varphi) + u_2 t, a \sin(\pi - \varphi) + v_2 t)$).

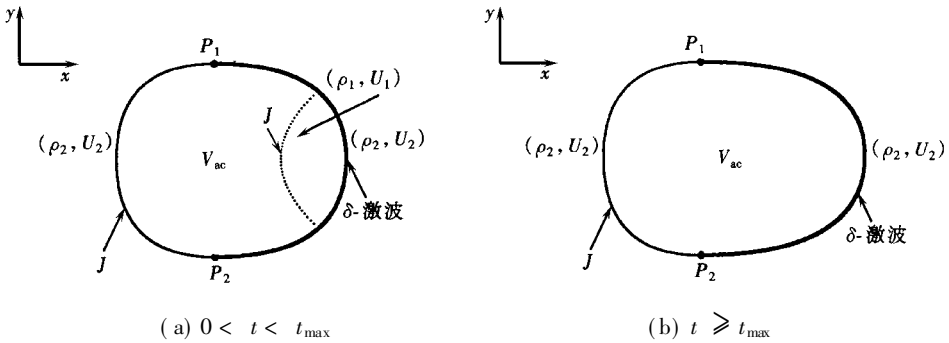


图 1

注 若 $\varphi \in (-\pi/2, 0)$, 则狄拉克激波和真空将会出现在我们以上讨论的 $\varphi \in (0, \pi/2)$ 相反方向.

致谢 作者非常感谢张同教授给予的帮助.

[参 考 文 献]

- [1] Weinan E, Guo Y Rykov, Sinai Ya G. Generalized variational principles, global weak solutions and behavior with random initial data for systems of conservation laws arising in adhesion particle dynamics[J]. Comm Phys Math, 1996, 177: 349-380.
- [2] Shandarin F, Zel'dovich Ya B. The large-scale structure of the universe: turbulence, intermittency, structures in a self-gravitation medium[J]. Reviews of Modern Physics, 1989, 61(2): 185-220.
- [3] 李荫藩. 第二阶“大粒子”差分法[J]. 中国科学 A 辑, 1985, 28(8): 729-739.
- [4] Sheng W, Zhang T. The Riemann problem for transportation equation in gas dynamics[J]. Mem Amer Math Soc, 1999, 137(654): 1-77.
- [5] Li J, Yang S, Zhang T. The Two-Dimensional Riemann Problem in Gas Dynamics [M]. Harlow: Longman Scientific and Technical, 1998.
- [6] Korchinski D J. Solutions of a Riemann Problem for a 2×2 System of Conservation Laws Possessing Classical Solutions[D]. New York Adelphi University Thesis, 1977.
- [7] Floch Le P. An existence and uniqueness result for two nonstrictly hyperbolic systems[A]. In: “Non-linear Evolution Equations That Change Type,” IMA Volumes in Mathematics and Its Applications

- [C]. New York/ Berlin: Springer-Verlag, 1990, 27.
- [8] Tan D, Zhang T, Zheng Y. Delta-shock waves as limits of vanishing viscosity for hyperbolic system of conservation laws[J]. *J Differential Equations*, 1994, **112**(1): 1-32.
- [9] Yang H, Sun W. The Riemann problem with delta initial data for a class of coupled hyperbolic systems of conservation laws[J]. *Nonlinear Analysis*, 2006, doi: 10.1016/j.na.2006.09.057.
- [10] Lax P D. Hyperbolic systems of conservation laws and the mathematical theory of shock waves[A]. *Conf Board Math Sci [C]*. Philadelphia: SIAM, 1973, 11.
- [11] Yang H. Generalized plane delta-shock waves for n-dimensional zero-pressure gas dynamics[J]. *J Math Anal and Appl*, 2001, **260**(1): 18-35.
- [12] Yang X. Research announcements: Un-selfsimilar elementary wave and global solutions of a class of multi-dimensional conservation laws[J]. *Advances in Mathematics (China)*, 2005, **34**(3): 367-369.
- [13] 杨小舟, 黄飞敏. 简化 Euler 方程的二维 Riemann 问题[J]. *科学通报*, 1998, **43**(6): 441-444.
- [14] Yang X. Multi-dimensional Riemann problem of scalar conservation laws[J]. *Acta Mathematica Scientia*, 1999, **19**(2): 190-200.
- [15] Yang X. The Singular structure of Non-selfsimilar global n dimensional burgers equation[J]. *Acta Mathematicae Applicatae Sinica (English Series)*, 2005, **21**(3), 505-518.
- [16] Huang F, Wang Z. Well posedness for pressureless flow[J]. *Comm Math Phys*, 2001, **222**(1): 117-146.
- [17] Li J, Zhang T. Generalized Rankine-Hugoniot relations of delta-shocks in solutions of transportation equations[A]. *Advances in Nonlinear Partial Differential Equations and Related Area [C]*. Singapore: World Sci Publ, River Edge, NJ, 1998, 219-232.
- [18] Li J, Li W. Riemann problem for the zero-pressure flow in gas dynamics[J]. *Progr Natur Sci*, 2001, **11**(5): 331-344.

Two Dimensional Non-Selfsimilar Initial Value Problem for Adhesion Particle Dynamics

SUN Wen-hua^{1,2}, SHENG Wan-cheng¹

(1. Department of Mathematics, Shanghai University,
Shanghai 200444, P. R. China;

2. School of Mathematics and Information Sciences, Shandong
University of Technology, Zibo, Shandong 255049, P. R. China)

Abstract: Two dimensional non-selfsimilar initial value problem for adhesion particle dynamics with two pieces constant states separated by a circular is considered. By using the generalized characteristic method and the generalized Rankine-Hugoniot relation which is a system of ordinary equations, unique solution which includes delta-shock waves and vacuum is constructed.

Key words: Adhesion particle dynamics; generalized Rankine-Hugoniot relation; entropy condition; delta-shock; vacuum