文章编号: 1000-0887(2007) 09-1087-08

具有共振的 $2n$ 阶 m 点边值问题的可解性*

江 卫华[1,2], 郭彦平[2], 仇计清[2]

(1. 河北师范大学 数学与信息科学学院, 石家庄 050016;
2. 河北科技大学 理学院, 石家庄 050018)

(郭兴明推荐)

摘要: 对具有共振的高阶多点边值问题进行研究. 首先在具有 $2n-1$ 阶连续导数的函数全体所成的空间 X 的子集上定义了指数为 0 的 Fredholm 算子 L, 并在 X 上定义了投影算子 P, 使得算子 L 在其定义域和 P 的核的交集上是可逆的. 然后, 在 Lebesgue 可积函数全体所成的空间 Y 上定义了投影算子 Q, 使得 L 的逆与 $I-Q$ 及非线性项 f 的复合是紧算子, 其中, I 是 Y 上的恒同算子. 最后通过赋予 f 一定的增长条件, 利用 Mawhin 的重合度理论, 证明了具有共振的 $2n$ 阶 m 点边值问题至少存在一个解, 并给出一个例子验证这一结果. 在这里不要求 f 具有连续性.

关 键 词: 共振; Fredholm 算子; 多点边值问题; 重合度理论
中图分类号: O175.8 文献标识码: A

引 言

目前, 具有共振的常微分方程边值问题得到了广泛的研究, 读者可参阅文献[1] 至文献[12]. 文献[1] 至文献[7] 研究具有共振的二阶多点边值问题解的存在性. 文献[8] 至文献[10] 研究具有共振的三阶 3 点边值问题解的存在性. 文献[11] 研究具有共振的 n 阶多点边值问题解的存在性. 文献[12] 在非局部边值条件下研究了具有共振的 n 阶多点边值问题解的存在性.

通过上述文献的启发, 本文研究 $2n$ 阶 m 点边值问题:

$$x^{(2n)}(t) = f(t, x(t), x'(t), \cdots, x^{(2n-1)}(t)), \qquad t \in (0, 1), \tag{1}$$

$$x^{(2i)}(0) = x^{(2i+1)}(1) = 0, \; i = 1, 2, \cdots, n-1; \; x'(1) = 0, \; x(1) = \sum_{i=1}^{m-2} \alpha_i x(\xi_i) \tag{2}$$

解的存在性, 此处 $f: [0, 1] \times R^{2n} \to R$ 把有界集映为有界集, 且 $f(t, x(t), x'(t), \cdots, x^{(2n-1)}(t)) \in L^1[0, 1]$, $x(t) \in C^{2n-1}[0, 1]$, $\alpha_i \in R$, $i = 1, 2, \cdots, m-2$; $0 < \xi_1 < \xi_2 < \cdots < \xi_{m-2} < 1$, $\sum_{i=1}^{m-2} \alpha_i = 1$. 在这里我们不要求 f 具有连续性. 目前, 据我们所知这是第一篇讨论具有共振的 $2n$ 阶边值问题在不要求 f 具有连续性, 以及在边界条件 $x^{(2i)}(0) = x^{(2i+1)}(1) =$

* 收稿日期: 2006-10-23; 修订日期: 2007-07-10
基金项目: 河北省自然科学基金资助项目(A2006000298); 河北省博士基金资助项目(B2004204); 河北省科技攻关资助项目(07217141)
作者简介: 江卫华(1964—), 女, 河北人, 副教授, 博士生(E-mail: jianghua64@sohu.com);
仇计清(1956—), 男, 教授, 博士(联系人. E-mail: qiujiqing@263.net).

0 下解的存在性的文章.

1 预备知识

设 X、Y 是 Banach 空间, $L: D(L) \subset X \to Y$ 是指数为 0 的 Fredholm 算子, $P: X \to X$, $Q: Y \to Y$ 是满足如下条件的投影算子:

$$\mathrm{Im}P = \mathrm{Ker}L,\ \mathrm{Ker}Q = \mathrm{Im}L,\ X = \mathrm{Ker}L \oplus \mathrm{Ker}P,\ Y = \mathrm{Im}L \oplus \mathrm{Im}Q.$$

由此可得:

$$L|_{\mathrm{dom}L \cap \mathrm{Ker}P}: \mathrm{dom}L \cap \mathrm{Ker}P \to \mathrm{Im}L$$

可逆, 用 K_P 表示它的逆.

设 Ω 是 X 的有界开子集, $\mathrm{dom}L \cap \Omega \neq \varnothing$, N 是 $X \to Y$ 的映射, 如果 $QN(\bar{\Omega})$ 有界且 $K_P(I - Q)N: \bar{\Omega} \to X$ 紧, 称 N 在 $\bar{\Omega}$ 上是 L 紧的.

定理 1(Mawhin[13]) 设 L 是指数为 0 的 Fredholm 算子, N 在 $\bar{\Omega}$ 上是 L 紧的. 如果以下条件成立:

1) 对任意 $(x, \lambda) \in [(\mathrm{dom}L \setminus \mathrm{Ker}L) \cap \partial\Omega] \times (0, 1)$, 有 $Lx \neq \lambda Nx$;

2) 对任意 $x \in \mathrm{Ker}L \cap \partial\Omega$, $Nx \notin \mathrm{Im}L$,

3) $\deg(QN|_{\mathrm{Ker}L}, \Omega \cap \mathrm{Ker}L, 0) \neq 0$.

则方程 $Lx = Nx$ 在 $\mathrm{dom}L \cap \bar{\Omega}$ 中至少有一个解.

2 主要结果

设 $X = C^{2n-1}[0, 1]$, 范数为 $\|x\| = \max\left\{\|x\|_\infty, \|x'\|_\infty, \cdots, \|x^{(2n-1)}\|_\infty\right\}$, 其中 $\|x\|_\infty = \max_{t \in [0,1]} |x(t)|$, $Y = L^1[0, 1]$ 范数为 $\|\cdot\|_1$.

设 $Lx = x^{(2n)}(t)$ 是 $\mathrm{dom}L \to Y$ 的线性算子, 其中 $\mathrm{dom}L = \left\{x \mid x^{(2n-1)}(t)\ 在 [0, 1] 上绝对连续, x^{(2i)}(0) = x^{(2i+1)}(1) = 0, i = 1, 2, \cdots, n-1; x'(1) = 0, x(1) = \sum_{i=1}^{m-2} \alpha_i x(\xi_i)\right\}$.

另外假设

$$Nx(t) = f(t, x(t), x'(t), \cdots, x^{(2n-1)}(t)), \qquad t \in (0, 1)$$

是 $N: X \to Y$ 的算子. 则 $x(t) \in \mathrm{dom}L$ 是边值问题(1) 和(2) 的解的充要条件为 $x(t)$ 是 $Lx = Nx$ 的解.

对 $x(t), y(t) \in Y$, 当且仅当 $x(t) \overset{\text{a.e.}}{=} y(t)$ 时, 定义 $x(t) = y(t)$.

为方便起见, 做出如下定义:

$$G(y) = \int_0^1 \int_{s_{2n-1}}^1 \int_0^{s_{2n-2}} \cdots \int_0^{s_2} \int_{s_1}^1 y(r) \mathrm{d}r \mathrm{d}s_1 \cdots \mathrm{d}s_{2n-1}, \qquad y \in L^1[0, 1].$$

$$H(y) = \sum_{i=1}^{m-2} \alpha_i \int_0^{\xi_i} \int_{s_{2n-1}}^1 \int_0^{s_{2n-2}} \cdots \int_0^{s_2} \int_{s_1}^1 y(r) \mathrm{d}r \mathrm{d}s_1 \cdots \mathrm{d}s_{2n-1}, \qquad y \in L^1[0, 1].$$

定理 2 设 $f: [0, 1] \times R^{2n} \to R$ 把有界集映为有界集, 且对任意 $x(t) \in \mathrm{dom}L$ 有 $f(t, x(t), x'(t), \cdots, x^{(2n-1)}(t)) \in L^1[0, 1]$. 如果下列条件成立:

(H1) $\sum_{i=1}^{m-2} \alpha_i = 1$, $\Delta := G(1) - H(1) > 0$;

(H2) 存在常数 $M > 0$ 使得对任意 $x \in \mathrm{dom}L \setminus \mathrm{Ker}L$ 且 $\min_{t \in [0,1]} |x(t)| > M$ 有

$G(Nx)\neq H(Nx)$;

(H_3) $f(t,x_1,x_2,\cdots,x_{2n})$ 满足

1) 存在函数 $a_1(t),a_2(t),\cdots,a_{2n}(t),b(t),r(t)\in L^1[0,1]$ 以及常数 $\theta\in[0,1]$ 使得

$$|f(t,x_1,x_2,\cdots,x_{2n})|\leqslant\sum_{i=1}^{2n}a_i(t)|x_i|+b(t)|x_k|^{\theta}+r(t),$$

其中 $1\leqslant k\leqslant 2n$, $\sum_{i=1}^{2n}\|\alpha_i\|_1<1$.

或者

2) $$|f(t,x_1,x_2,\cdots,x_{2n})|\leqslant\sum_{i=1}^{2n}g_i(t,x_i(t))+r(t),$$

其中 $g_i(t,x)$ 把有界集映为有界集, 且对任意 $x(t)\in C[0,1]$, 有 $g_i(t,x_i(t))\in L^1[0,1]$ 以及

$$\lim_{|x|\to\infty}\sup_{t\in[0,1]}\frac{g_i(t,x)}{|x|}=r_i,\qquad r_i\in[0,1),\ i=1,2,\cdots,2n;\ \sum_{i=1}^{2n}r_i<1.$$

(H_4) 存在常数 $M^*>0$ 使得当 $|c|>M^*$ 时

$$c[G(Nc)-H(Nc)]>0,$$

或者

$$c[G(Nc)-H(Nc)]<0.$$

则边值问题(1)和(2)至少有 1 个解.

为了得到这一结果, 我们首先给出几个引理.

引理 1 如果(H_1)成立, 则

(A1) $L:\mathrm{dom}L\subset X\to Y$ 是指数为 0 的 Fredholm 算子, 且线性算子 $Q:Y\to Y$ 可定义为

$$Qy=\frac{1}{\Delta}[G(y)-H(y)].$$

(A2) $L:\mathrm{dom}L\cap\mathrm{Ker}P\to\mathrm{Im}L$ 的逆 K_P 为:

$$K_Py=(-1)^n\int_0^t\int_{s_{2n-1}}^1\int_0^{s_{2n-2}}\cdots\int_0^{s_2}\int_{s_1}^1 y(r)\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}s_1\cdots\mathrm{d}s_{2n-1}.$$

(A3) 设 Ω 是 X 的有界开子集, 且 $\mathrm{dom}L\cap\Omega\neq\varnothing$, 则 N 在 Ω 上是 L 紧的.

证明 (A1) 易知

$$\mathrm{Ker}L=\left\{x\in\mathrm{dom}L\mid x=c,\ c\in R\right\}.$$

下面我们证明

$$\mathrm{Im}L=\left\{y\in Y\mid G(y)=H(y)\right\}.$$

为此, 只需证明 $x(t)$ 是方程

$$x^{(2n)}(t)=y(t),\qquad x\in\mathrm{dom}L,\ y\in Y\tag{3}$$

解的充要条件是 y 满足:

$$G(y)=H(y).\tag{4}$$

事实上, 如果 $x(t)$ 是方程(3)的解, 由(H_1)及边值条件(2)易得 y 满足(4)式. 另一方面, 如果 y 满足(4)式, 令

$$x(t)=(-1)^n\int_0^t\int_{s_{2n-1}}^1\int_0^{s_{2n-2}}\cdots\int_0^{s_2}\int_{s_1}^1 y(r)\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}s_1\cdots\mathrm{d}s_{2n-1}+c,$$

其中 c 为任意常数, 则 $x(t)$ 满足(3)式.

我们证明 $\mathrm{Im}L$ 是 Y 的闭子集.

对 $y_n \in \mathrm{Im}L \subset Y$, $y_n \to y \in Y$,

$$\begin{aligned}|G(y)-H(y)| &= |G(y-y_n)-H(y-y_n)| \leqslant \\ &G(|(y-y_n)|)+H(|(y-y_n)|) \leqslant \\ &\left(1+\sum_{i=1}^{m-2}\alpha_i\right)\|y-y_n\|_1 \to 0, \qquad n \to \infty.\end{aligned}$$

因此 $y(t) \in \mathrm{Im}L$, 即 $\mathrm{Im}L$ 是闭的.

对 $y \in Y$, 取投影算子 $Q: Y \to Y$ 为

$$Qy = \frac{1}{\Delta}[G(y)-H(y)].$$

显然 $Qy \in R$. 设 $y_1 = y - Qy$, 则 $Qy_1 = 0$, 因此 $y_1 \in \mathrm{Im}L$. 另外 $\mathrm{Im}L \cap R = \{0\}$. 所以我们有 $Y = \mathrm{Im}L \oplus \mathrm{Im}Q$, 从而

$$\dim \mathrm{Ker}L = \dim R = \operatorname{co\,dim} \mathrm{Im}L = 1.$$

故 L 是指数为 0 的 Fredholm 算子.

(A2) 定义 $P: X \to X$ 为

$$Px = x(0), \qquad x \in X,$$

则 $K_P: \mathrm{Im}L \to \mathrm{dom}L \cap \mathrm{Ker}P$ 可定义为

$$K_P y = (-1)^n \int_0^t \int_{s_{2n-1}}^1 \int_0^{s_{2n-2}} \cdots \int_0^{s_2} \int_{s_1}^1 y(r)\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}s_1 \cdots \mathrm{d}s_{2n-1}.$$

事实上, 设 $y \in \mathrm{Im}L$, 我们有

$$(LK_P)y = (K_P y)^{(2n)} = y.$$

另一方面, 如果 $x(t) = \mathrm{dom}L \cap \mathrm{Ker}P$, 则

$$(K_P L)x = K_P x^{(2n)} = (-1)^n \int_0^t \int_{s_{2n-1}}^1 \int_0^{s_{2n-2}} \cdots \int_0^{s_2} \int_{s_1}^1 x^{(2n)}(r)\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}s_1 \cdots \mathrm{d}s_{2n-1} = x(t).$$

因此, K_P 是 $L: \mathrm{dom}L \cap \mathrm{Ker}P \to \mathrm{Im}L$ 的逆.

(A3) 由 f 把有界集映为有界集, 易知 $QN(\Omega)$ 有界. 由 Arzela-Ascoli 定理, 可知 $K_P(I-Q)N: \Omega \to X$ 是紧的, 因此 N 在 Ω 上是 L 紧的.

引理 2 如果(H_2)、(H_3)的 1) 成立或(H_2)、(H_3) 的 2) 成立, 则集合

$$\Omega_1 = \{x \in \mathrm{dom}L \setminus \mathrm{Ker}L \mid \text{存在 } \lambda \in (0,1) \text{ 使 } Lx = \lambda Nx\}$$

有界.

证明 由 $x^{(2i)}(0) = 0$, $i = 1, 2, \cdots, n-1$, 可得

$$x^{(2i)}(t) = \int_0^t x^{(2i+1)}(s)\,\mathrm{d}s.$$

因此

$$\|x^{(2i)}\|_\infty \leqslant \|x^{(2i+1)}\|_1 \leqslant \|x^{(2i+1)}\|_\infty, \qquad i = 1, 2, \cdots, n-1. \tag{5}$$

由 $x^{(2i+1)}(1) = 0$, $i = 0, 1, 2, \cdots, n-1$, 可得

$$x^{(2i+1)}(t) = -\int_t^1 x^{(2i+2)}(s)\,\mathrm{d}s, \qquad i = 0, 1, 2, \cdots, n-1.$$

因此

$$\|x^{(2i+1)}\|_\infty \leqslant \|x^{(2i+2)}\|_1 \leqslant \|x^{(2i+2)}\|_\infty, \qquad i = 0, 1, 2, \cdots, n-2. \tag{6}$$

$$\|x^{(2n-1)}\|_\infty \leqslant \|x^{(2n)}\|_1. \tag{7}$$

由(5) 式至(7) 式, 得

$$\|x^{(i)}\|_\infty \leqslant \|x^{(2n)}\|_1, \qquad i = 1, 2, \cdots, 2n-1. \tag{8}$$

由 $Lx = \lambda Nx$, 我们有 $Nx \in \mathrm{Im}L$, 因此

$$G(Nx) = H(Nx).$$

由(H_2)知存在 $t_0 \in [0, 1]$ 使 $|x(t_0)| \leqslant M$. 又由 $x(t) = x(t_0) + \int_{t_0}^{t} x'(t)\mathrm{d}t$ 得

$$\|x\|_\infty \leqslant M + \|x'\|_1 \leqslant M + \|x'\|_\infty \leqslant M + \|x^{(2n)}\|_1. \tag{9}$$

假设(H_3) 的 1) 成立, 则

$$\|x^{(2n)}\|_1 \leqslant \int_0^1 |f(t, x(t), x'(t), \cdots, x^{(2n-1)}(t))| \mathrm{d}t \leqslant$$
$$\sum_{i=1}^{2n} \|a_i\|_1 \|x^{(i-1)}\|_\infty + \|b\|_1 \cdot \|x^{(k-1)}\|_\infty^\theta + \|r\|_1 \leqslant$$
$$\sum_{i=1}^{2n} \|a_i\|_1 \|x^{(2n)}\|_1 + \|b\|_1 \cdot \|x^{(2n)}\|_1^\theta + c_1.$$

因此

$$\|x^{(2n)}\|_1 \leqslant \frac{\|b\|_1}{1 - \sum_{i=1}^{2n} \|a_i\|_1} \|x^{(2n)}\|_1^\theta + c_1,$$

其中

$$c = \begin{cases} \|a_1\|_1 M + \|r\|_1, & k \neq 1, \\ \|a_1\|_1 M + \|b\|_1 M^\theta + \|r\|_1, & k = 1, \end{cases} \qquad c_1 = \frac{c}{1 - \sum_{i=1}^{2n} \|a_i\|_1}.$$

所以, 存在常数 $M_0 > 0$ 使得 $\|x^{(2n)}\|_1 \leqslant M_0$. 由(8) 式和(9) 式我们得到 Ω_1 有界.

如果(H_3) 的 2) 成立, 则对满足 $\sum_{i=1}^{2n}(r_i + \varepsilon) < 1$ 的 $\varepsilon > 0$, 存在常数 $\delta > 0$ 和 $M_1 > 0$ 使得当 $|x| > \delta$ 时有 $\sup_{t \in [0,1]} g_i(t, x) \leqslant (r_i + \varepsilon)|x|$, $i = 1, 2, \cdots, 2n$; 当 $|x| \leqslant \delta$ 时有 $\sup_{t \in [0,1]} g_i(t, x) \leqslant M_1$, $i = 1, 2, \cdots, 2n$. 因此

$$\|x^{(2n)}\|_1 \leqslant \int_0^1 |f(t, x(t), x'(t), \cdots, x^{(2n-1)}(t))| \mathrm{d}t \leqslant$$
$$\sum_{i=1}^{2n} \int_0^1 g_i(t, x^{(i-1)}(t))\mathrm{d}t + \|r\|_1 \leqslant$$
$$\sum_{i=1}^{2n} \left[\int_{\Delta i_1} g_i(t, x^{(i-1)}(t))\mathrm{d}t + \int_{\Delta i_2} g_i(t, x^{(i-1)}(t))\mathrm{d}t \right] + \|r\|_1,$$

其中 $\Delta i_1 = \left\{ t \mid |x^{(i-1)}(t)| > \delta \right\}$, $\Delta i_2 = [0, 1] \setminus \Delta i_1$.

考虑到(8) 式和(9) 式, 我们有

$$\|x^{(2n)}\|_1 \leqslant \sum_{i=1}^{2n} \left[(r_i + \varepsilon) \int_{\Delta i_1} |x^{(i-1)}(t)| \mathrm{d}t + M_1 \right] + \|r\|_1 \leqslant$$
$$\sum_{i=1}^{2n} (r_i + \varepsilon) \|x^{(i-1)}\|_1 + 2nM_1 + \|r\|_1 \leqslant$$
$$\sum_{i=1}^{2n} (r_i + \varepsilon) \|x^{(2n)}\|_1 + (r_1 + \varepsilon) M + 2nM_1 + \|r\|_1.$$

因此

$$\|x^{(2n)}\|_1 \leqslant \frac{(r_1+\varepsilon)M+2nM_1+\|r\|_1}{1-\sum_{i=1}^{2n}(r_1+\varepsilon)}.$$

由(8)式和(9)式,我们得到 Ω 有界.

引理 3 若(H_4)成立,则集合 $\Omega_2=\left\{x\in \mathrm{Ker}L \mid Nx\in \mathrm{Im}L\right\}$ 有界.

证明 设 $x\in\Omega_2$,则有 $x=c$ 且 $Nc\in \mathrm{Im}L$. 由此可得

$$G(Nc)=H(Nc).$$

由(H_4)我们有 $|c|\leqslant M^*$,即 Ω_2 有界.

引理 4 如果(H_4)第 1 部分成立且 $\Delta>0$;或者(H_4)第 2 部分成立且 $\Delta<0$,则集合 $\Omega_3=\left\{x\in \mathrm{Ker}L \mid \lambda Jx+(1-\lambda)QNx=0,\ \lambda\in[0,1]\right\}$ 有界.

如果(H_4)第 1 部分成立且 $\Delta<0$;或者(H_4)第 2 部分成立且 $\Delta>0$,则集合 $\Omega_3=\left\{x\in \mathrm{Ker}L \mid -\lambda Jx+(1-\lambda)QNx=0,\ \lambda\in[0,1]\right\}$ 有界,其中

$$J:\mathrm{Ker}L\to \mathrm{Im}Q,\ Jc=c,\ \forall c\in R.$$

证明 设(H_4)第 1 部分成立且 $\Delta>0$,并设 $x=c\in \mathrm{Ker}L$,$\lambda Jx+(1-\lambda)QNx=0$,则

$$\lambda c=-\frac{1-\lambda}{\Delta}[G(Nc)-H(Nc)]. \tag{10}$$

若 $\lambda=0$,由(H_4)可知 $|c|\leqslant M^*$. 若 $\lambda=1$,则 $c=0$. 对 $\lambda\in(0,1)$,如果 $|c|>M^*$,由上式和(H_4)的第 1 部分我们有

$$\lambda c^2=-c\frac{1-\lambda}{\Delta}[G(Nc)-H(Nc)]<0$$

矛盾. 所以 $|c|\leqslant M^*$,此即 Ω_3 有界.

在其他几个条件下类似可证 Ω_3 有界.

定理 2 的证明 设 Ω 是以 X 的零元为中心的有界开球,且 $\cup_{i=1}^{3}\overline{\Omega_i}\subset\Omega$. 由引理 1,$L$ 是指数为 0 的 Fredhold 算子,N 在 Ω 上是 L 紧的. 由引理 2,引理 3 及 $\overline{\Omega_1}\cup\overline{\Omega_2}\subset\Omega$,我们有 $Lx\neq\lambda Nx$,$x\in(\mathrm{dom}L\setminus \mathrm{Ker}L)\cap\partial\Omega$,$\lambda\in(0,1)$ 和 $Nx\notin \mathrm{Im}L$,$x\in \mathrm{Ker}L\cap\partial\Omega$.

设 $H(x,\lambda)=\pm\lambda Jx+(1-\lambda)QNx$. 由引理 4 和 $\overline{\Omega_3}\subset\Omega$,可知 $H(x,\lambda)\neq 0$,$x\in\partial\Omega\cap \mathrm{Ker}L$,$\lambda\in[0,1]$,由同伦不变性可得:

$$\deg(QN|_{\mathrm{Ker}L},\ \Omega\cap \mathrm{Ker}L,0)=\deg(H(\cdot,0),\ \Omega\cap \mathrm{Ker}L,0)=$$
$$\deg(H(\cdot,1),\ \Omega\cap \mathrm{Ker}L,0)=\deg(J,\ \Omega\cap \mathrm{Ker}L,0)\neq 0.$$

由定理 1 可知,$Lx=Nx$ 在 $\mathrm{dom}L\cap\Omega$ 上至少有一个解,此即为(1)式和(2)式的解.

3 例 子

例 考虑下面边值问题:

$$x^{(4)}(t)=(5-t)^2x^{1/3}(t)+t^2\varphi_2^{1/5}(x'(t))+t^3\varphi_3^{1/7}(x''(t))+$$
$$t^4\varphi_4^{1/9}(x'''(t))-4t^2,\qquad t\in(0,1), \tag{11}$$

$$x'(1)=x''(0)=x'''(1)=0,\ x(1)=x(1/2), \tag{12}$$

其中

$$\varphi_i(x)=\begin{cases}x, & |x|\leqslant 8,\\ 0, & |x|>8,\end{cases}\quad i=1,2,3.$$

相应于边值问题(1)和(2)有:

$$f(t,x_1,x_2,x_3,x_4)=(5-t)^2x_1^{1/3}+t^2\varphi_2^{1/5}(x_2)+t^3\varphi_3^{1/7}(x_3)+t^4\varphi_4^{1/9}(x_4)-4t^2,$$
$$n=2,\ m=3,\ \alpha_1=1,\ \Delta=23/384\neq 0,$$

因此(H_1)成立. 令 $M=M^*=8$, 则有

$$\int_{1/2}^1\int_{s_3}^1\int_0^{s_2}\int_{s_1}^1 f(r,x(r),x'(r),x''(r),x'''(r))\mathrm{d}r\mathrm{d}s_1\mathrm{d}s_2\mathrm{d}s_3\neq 0,$$
$$|x(t)|>M,\ t\in[0,1]$$

和

$$c\cdot\int_{1/2}^1\int_{s_3}^1\int_0^{s_2}\int_{s_1}^1 f(r,c,0,0,0)\mathrm{d}r\mathrm{d}s_1\mathrm{d}s_2\mathrm{d}s_3>0,\qquad |c|>M^*.$$

因此(H_2)、(H_4)成立.

取

$$g_1(t,x_1)=(5-t)^2|x_1|^{1/3},\ g_2(t,x_2)=t^2|x_2|^{1/5},$$
$$g_3(t,x_3)=t^3|x_3|^{1/7},\ g_4(t,x_4)=t^4|x_4|^{1/9},\ r(t)=4t^2,$$

则有

$$|f(t,x_1,x_2,x_3,x_4)|\leqslant\sum_{i=1}^4 g_i(t,x_i)+r(t),\ \lim_{|x|\to\infty}\sup_{t\in[0,1]}\frac{g_i(t,x)}{|x|}=0.$$

因此,(H_3)的2)成立.

由定理2可得问题(11)和问题(12)至少有一个解.

此例进一步验证了定理2的结论.

[参 考 文 献]

[1] Feng W, Webb J R L. Solvability of m-point boundary value problems with nonlinear growth[J]. J Math Anal Appl, 1997, **212**(2): 467-480.

[2] Feng W, Webb J R L. Solvability of three-point boundary value problems at resonance[J]. Nonlinear Anal Theory Meth Appl, 1997, **30**(6): 3227-3238.

[3] Liu B. Solvability of multi-point boundary value problem at resonance (Ⅱ)[J]. Appl Math Comput, 2003, **136**(2/3): 353-377.

[4] Gupta C P. Solvability of multi-point boundary value problem at resonance[J]. Results Math, 1995, **28**(1): 270-276.

[5] Gupta C P. A second order m-point boundary value problem at resonance[J]. Nonlinear Anal Theory Meth Appl, 1995, **24**(10): 1483-1489.

[6] Gupta C P. Existence theorems for a second order m-point boundary value problem at resonance [J]. Int J Math Sci, 1995, **18**(2): 705-710.

[7] Prezeradzki B, Stanczy R. Solvability of a multi-point boundary value problem at resonance[J]. J Math Anal Appl, 2001, **264**(2): 253-261.

[8] Ma R Y. Multiplicity results for a third order boundary value problem at resonance[J]. Nonlinear Anal Theory Meth Appl, 1998, **32**(4): 493-499.

[9] Gupta C P. On a third-order boundary value problem at resonance[J]. Differential Integral Equations, 1989, **2**(1): 1-12.

[10] Nagle R K, Pothoven K L. On a third-order nonlinear boundary value problem at resonance[J]. J Math Anal Appl, 1995, **195**(1): 148-159.

[11] Lu S, Ge W. On the existence of m-point boundary value problem at resonance for higher order dif-

ferential equation[J]. J Math Anal Appl, 2003, **287**(2): 522-539.

[12] Liu Y, Ge W. Solvability of nonlocal boundary value problems for ordinary differential equations of higher order[J]. Nonlinear Anal, 2004, **57**(3): 435-458.

[13] Mawhin J. Topological degree methods in nonlinear boundary value problems[A]. In: NSF-CBMS Regional Conference Series in Mathematics [C]. Vol **40**. Providence: American Mathematical Society, RI, 1979.

Solvability of $2n$-Order m-Point Boundary Value Problem at Resonance

JIANG Wei-hua[1,2], GUO Yan-ping[2], QIU Ji-qing[2]

(1. College of Mathematics and Science of Information, Hebei Normal University, Shijiazhuang, 050016, P.R.China;

2. College of Sciences, Hebei University of Science and Technology Shijiazhuang, 050018, P. R. China)

Abstract: The higher order multiple point boundary value problem at resonance is studied. Firstly, a Fredholm operator L with index zero and a projector operator P are defined in the subset of X and in X, respectively, such that L is invertible in the intersection of the domain of L and the kernel of P, where X is the space of functions whose $(2n-1)$th order derivatives are continuous. Secondly, a projector operator Q is defined in the Lebesgue integrable functions' space Y such that the composition of the inverse operator of L, $I-Q$ and the nonlinear term f is compact, where I is the identity mapping in Y. Finally, imposing growth conditions on f, the existence of at least one solution for the $2n$-order m-point boundary value problem at resonance is obtained by using coincidence degree theory of Mawhin. An example is given to demonstrate the result. The interest is that the nonlinear term f may be noncontinuous.

Key words: resonance; Fredholm operator; multi-point boundary value problem; coincidence degree theory