应用数学和力学, 第 28 卷 第 9 期
2007 年 9 月 15 日出版

Applied Mathematics and Mechanics
Vol. 28, No. 9, Sep. 15, 2007

文章编号: 1000-0887(2007) 09-1115-08

一类非对称各向同性张量函数导数的不变表示*

王志乔， 兑关锁

(北京交通大学 土建学院 工程力学研究所, 北京 100044)

(黄筑平推荐)

摘要： 将 Dui 和 Chen 于 2004 年提出的求解对称各向同性张量函数导数的方法推广到一类满足可交换条件的非对称各向同性张量函数情况, 此类函数比以往研究的更具一般性. 在有 3 个不同特征根时, 由可交换性引进张量函数相对应的标量函数, 进而求得此类非对称各向同性张量函数及其导数的不变表示形式. 在 2 或 3 重特征根时, 利用求极限的办法给出此类张量函数及其导数的表示形式.

关 键 词： 非对称张量； 张量函数导数； 标量函数； 四阶张量

中图分类号： O331; O183.2 文献标识码： A

引 言

非对称各向同性张量函数在连续介质力学和计算力学中的重要性, 最近几年逐渐受到人们的重视[1-3]. Balendran 和 Nemat-Nasser[4] 于 1996 年最早给出非对称各向同性多项式张量函数及其导数的不变表示形式. De Souza Neto[5] 直接计算了非对称张量指数函数的导数. Itskov 和 Aksel[6] 给出一种根据 Cayley-Hamilton 定理得到幂级数表示中系数的递归计算方法; 利用求极限的方法将此解推广到有重根的情况. 当为无限幂级数时, 收敛性的要求限制了许多各向同性张量函数的定义域. 为了避免这种情况, Itskov[7] 利用 Dunford-Taylor 积分给出了非对称各向同性张量函数及其导数的封闭表达形式. 进一步, Itskov[8] 对两种方法在数值计算方面进行比较. Lu[9] 利用标量函数微分的思想给出了张量幂级数及其导数的不变表示形式. Dui[10] 将 Dui 等[11] 求 Hill 应变率的方法应用于求解无重特征根时非对称张量函数的导数. 最近, Wang 和 Dui[12] 研究了满足下面可交换条件的一类非对称各向同性张量函数

$$\boldsymbol{F}(\boldsymbol{A})\boldsymbol{A} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{F}(\boldsymbol{A}). \tag{1}$$

此类张量函数比以往研究[4-10] 的范围要大很多; 通过求解张量方程, 给出了此类张量函数导数

* 收稿日期： 2006-11-03； 修订日期： 2007-03-30

基金项目： 国家自然科学基金委员会、二滩水电开发有限责任公司雅砻江水电开发联合研究基金资助项目(50539030)

作者简介： 王志乔(1978—), 男, 河北人, 博士;

兑关锁(1963—), 男, 河南人, 副教授(联系人. Tel: +86-10-51688437; Fax: +86-10-51682094; E-mail: gsdui@center.njtu.edu.cn).

的不变表示.

本文通过特征值的恒等关系,引进与文献[12]中不同的标量函数 $f(\lambda_i, I_1, I_3)$; 同时给出求解此类非对称张量函数导数的不变表示的另一种简便的方法,即推广 Dui 和 Chen[13] 的方法到有 3 个不同特征根的非对称情况; 当有重根时,采用求极限的办法给出张量函数及其导数的表达形式. 首先简单介绍所需的张量知识和非对称张量的谱表示形式;然后给出满足可交换条件的非对称张量函数的表示理论;在第 3 节给出此类非对称张量函数导数的不变表示形式.

1 张量运算及非对称二阶张量的广义谱分解

令 $\mathscr{L}$ 为所有二阶张量的集合,2 个二阶张量的双点积定义为

$$\boldsymbol{A}:\boldsymbol{B} = \mathrm{tr}(\boldsymbol{A}\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}) = \mathrm{tr}(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{B}), \qquad \forall \boldsymbol{A}, \boldsymbol{B} \in \mathscr{L}, \tag{2}$$

其中 $\mathrm{tr}(\cdot)$ 和 $(\cdot)^{\mathrm{T}}$ 分别为张量的迹和转置. 张量的并矢积($\otimes$)满足如下关系[14-15]

$$(\boldsymbol{A} \otimes \boldsymbol{B}):\boldsymbol{C} = (\boldsymbol{B}:\boldsymbol{C})\boldsymbol{A}, \qquad \forall \boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}, \boldsymbol{C} \in \mathscr{L}. \tag{3}$$

Del Piero[14] 定义另外一种张量积 $\boxtimes$, 其满足

$$(\boldsymbol{A} \boxtimes \boldsymbol{B}):\boldsymbol{C} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{C}\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}, \qquad \forall \boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}, \boldsymbol{C} \in \mathscr{L}. \tag{4}$$

特殊情况, $\boldsymbol{I} \boxtimes \boldsymbol{I}$ 为四阶单位张量,其中 $\boldsymbol{I}$ 为二阶单位张量.

令 $\boldsymbol{A}$ 为非对称二阶张量, λ_i 和 $\boldsymbol{N}_i (i = 1, 2, 3)$ 分别为 $\boldsymbol{A}$ 的特征值和特征向量. 因为 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$ 和 $\boldsymbol{A}$ 具有相同的特征方程,所以它们具有相同的特征值. 令 $\boldsymbol{N}_i$ 为与 λ_i 所对应 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$ 的特征向量,则

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{N}_i = \lambda_i \boldsymbol{N}_i, \quad \boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{N}_j = \lambda_j \boldsymbol{N}_j, \quad \boldsymbol{N}_i \cdot \boldsymbol{N}_j = \boldsymbol{0}, \qquad \text{当 } \lambda_i \neq \lambda_j. \tag{5}$$

引进 $\boldsymbol{A}$ 的对偶向量 $\tilde{\boldsymbol{N}}_i$, 其满足

$$\tilde{\boldsymbol{N}}_i = \boldsymbol{N}_i / (\boldsymbol{N}_i \cdot \boldsymbol{N}_i), \quad \boldsymbol{N}_i \cdot \tilde{\boldsymbol{N}}_j = \delta_{ij}, \qquad i, j = 1, 2, 3. \tag{6}$$

当 $\boldsymbol{A}$ 的 3 个特征根不相同时,它们可能均为实数或者 1 个实数 2 个复数. 本文只考虑 3 个特征根均为实数的情况,有复根的情况可以采用与文献[4]相似的方法求解. 则, $\boldsymbol{A}$ 有如下谱分解形式[4]

$$\boldsymbol{A} = \sum_{i=1}^{3} \lambda_i \boldsymbol{E}_i, \tag{7}$$

其中 $\boldsymbol{E}_i (i = 1, 2, 3)$ 为与 λ_i 所对应的特征投影. $\boldsymbol{E}_i$ 满足如下关系[4]

$$\boldsymbol{E}_i = \boldsymbol{N}_i \otimes \tilde{\boldsymbol{N}}_i = \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{3} \frac{\boldsymbol{A} - \lambda_j \boldsymbol{I}}{\lambda_i - \lambda_j}, \qquad i = 1, 2, 3. \tag{8}$$

当 $\boldsymbol{A}$ 有两重特征根时,特征根均为实数. 不失一般性,假设 $\lambda_1 \neq \lambda_2 \neq \lambda_3$. 当 $\Delta\lambda = \lambda_3 - \lambda_2 \to 0$, 则式(8)表示为

$$\begin{cases} \boldsymbol{E}_1 \to \dfrac{\boldsymbol{A} - \boldsymbol{H} - \lambda_2 \boldsymbol{I}}{\lambda_1 - \lambda_2} + \boldsymbol{o}(\Delta\lambda), \\[2ex] \boldsymbol{E}_2 \to -\dfrac{\boldsymbol{H}}{\Delta\lambda} + (\boldsymbol{I} - \boldsymbol{E}_1) + \dfrac{\boldsymbol{H}}{\lambda_2 - \lambda_1} + \boldsymbol{o}(\Delta\lambda), \\[2ex] \boldsymbol{E}_3 \to \dfrac{\boldsymbol{H}}{\Delta\lambda} - \dfrac{\boldsymbol{H}}{\lambda_2 - \lambda_1} + \boldsymbol{o}(\Delta\lambda), \end{cases} \tag{9}$$

其中

$$\boldsymbol{H} = \frac{1}{\lambda_2 - \lambda_1}[\boldsymbol{A}^2 - (\lambda_1 + \lambda_2)\boldsymbol{A} + \lambda_1\lambda_2 \boldsymbol{I}], \tag{10}$$

$\boldsymbol{o}(\Delta\lambda)$ 表示满足 $\boldsymbol{o}(\Delta\lambda)/(\Delta\lambda) \to 0$ 即 $\Delta\lambda \to 0$ 的任意张量函数. 将式(9)代入到式(7)中,取极限得

$$\boldsymbol{A} = \lambda_1 \boldsymbol{E}_1 + \lambda_2 (\boldsymbol{I} - \boldsymbol{E}_1) + \boldsymbol{H}. \tag{11}$$

当 $\boldsymbol{A}$ 的3个特征根都相同时，即 $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = \lambda$，取极限 $\Delta\lambda = \lambda_2 - \lambda_1 \to 0$，式(9)中的 $\boldsymbol{E}_1$ 和式(10)中的 $\boldsymbol{H}$ 可以写为

$$\boldsymbol{E}_1 \to \frac{(\boldsymbol{H}')^2}{\Delta\lambda^2} - \frac{2\boldsymbol{H}'}{\Delta\lambda} + \boldsymbol{I} + \boldsymbol{o}(\Delta\lambda), \quad \boldsymbol{H} \to \frac{(\boldsymbol{H}')^2}{\Delta\lambda} - \boldsymbol{H}' + \boldsymbol{o}(\Delta\lambda), \tag{12}$$

其中 $\boldsymbol{H}' = \boldsymbol{A} - \lambda\boldsymbol{I}$. 将式(12)代入式(11)并取极限，得

$$\boldsymbol{A} = \lambda\boldsymbol{I} + \boldsymbol{H}'. \tag{13}$$

2 满足可交换条件的非对称张量函数表示理论

本节主要研究满足可交换条件的非对称各向同性张量函数表示理论. 对于一般的实非对称张量 $\boldsymbol{A}$，可交换条件定义了一类张量值函数，包括张量幂级数、对数张量函数、三角张量函数等. 由可交换条件可得如下命题：

命题1 若各向同性张量值函数 $\boldsymbol{F}(\boldsymbol{A})$ 满足可交换条件(1)，则张量函数 $\boldsymbol{F}(\boldsymbol{A})$ 与 $\boldsymbol{A}$ 具有相同的特征向量.

证明 由可交换性得

$$\boldsymbol{F}\boldsymbol{A}\boldsymbol{N}_i = \boldsymbol{A}\boldsymbol{F}\boldsymbol{N}_i, \quad (\boldsymbol{F}\boldsymbol{A})^{\mathrm{T}}\boldsymbol{N}_i = (\boldsymbol{A}\boldsymbol{F})^{\mathrm{T}}\boldsymbol{N}_i. \tag{14}$$

根据式(5)，上式可化为

$$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{F}\boldsymbol{N}_i) = \lambda_i(\boldsymbol{F}\boldsymbol{N}_i), \quad \boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{F}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{N}_i) = \lambda_i(\boldsymbol{F}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{N}_i). \tag{15}$$

式(15)表明 $\boldsymbol{F}\boldsymbol{N}_i$ 和 $\boldsymbol{F}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{N}_i$ 分别为 $\boldsymbol{A}$ 和 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$ 与 λ_i 相对应的特征向量. 因此，存在标量 t_i，$i = 1, 2, 3$，使得

$$\boldsymbol{F}\boldsymbol{N}_i = t_i\boldsymbol{N}_i, \quad \boldsymbol{F}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{N}_i = t_i\boldsymbol{N}_i. \tag{16}$$

式(16)表明 $\boldsymbol{N}_i$ 和 $\boldsymbol{N}_i$ 分别为 $\boldsymbol{F}$ 和 $\boldsymbol{F}^{\mathrm{T}}$ 与 t_i 相对应的特征向量. □

从命题1，能够得到下面的命题2：

命题2 若各向同性张量值函数 $\boldsymbol{F}(\boldsymbol{A})$ 满足可交换条件(1)，则 $\boldsymbol{F}(\boldsymbol{A})$ 可表示为

$$\boldsymbol{F}(\boldsymbol{A}) = a_0\boldsymbol{I} + a_1\boldsymbol{A} + a_2\boldsymbol{A}^2, \tag{17}$$

其中 a_0、a_1 和 a_2 为 $\boldsymbol{A}$ 主不变量 I_1、I_2 和 I_3 的函数.

证明 分以下3种情况：

1) 若 $\boldsymbol{A}$ 的所有特征根不同，根据命题1，$\boldsymbol{F}(\boldsymbol{A})$ 可表示为

$$\boldsymbol{F}(\boldsymbol{A}) = \sum_{i=1}^{3} t_i(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)\boldsymbol{E}_i, \tag{18}$$

其中标量函数 t_i 并不彼此独立，满足如下关系[13],[16-17]

$$t_i(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) = t_1(\lambda_i, \lambda_j, \lambda_k) = t_1(\lambda_i, \lambda_k, \lambda_j), \tag{19}$$

其中 (i, j, k) 为 $(1, 2, 3)$ 的置换. 在对称各向同性二阶张量函数理论中标量函数 $t_1(\lambda_i, \lambda_j, \lambda_k)$ 广泛被采用[13],[16-17]. 将式(8)入式(18)中并整理，我们能够得到这样的结论，即存在标量 a_0、a_1 和 a_2 使得 $\boldsymbol{F}(\boldsymbol{A})$ 能够表示为式(17)的形式. 下面将给出 a_0、a_1 和 a_2 的具体表示形式.

利用恒等式[13],[16]

$$\lambda_i\lambda_j^2 + \lambda_i^2\lambda_j - I_1\lambda_i\lambda_j + I_3 = 0 \qquad (i \neq j), \tag{20}$$

若 λ_i、I_1 和 I_3 给定，则 λ_j 和 λ_k 为

$$\lambda_j, \lambda_k(\lambda_i, I_1, I_2) = (1/2)(I_1 - \lambda_i \pm \sqrt{\lambda_i^2 - 2I_1\lambda_i - 4I_3\lambda_i^{-1} + I_1^2}). \tag{21}$$

将式(21)代入式(19),从而方便地引进另外一个标量响应函数 $f(\lambda_i, I_1, I_3)$ 满足

$$f(\lambda_i, I_1, I_3) = t_1(\lambda_i, \lambda_j, \lambda_k). \tag{22}$$

那么,$\boldsymbol{F}(\boldsymbol{A})$ 可以表达为

$$\boldsymbol{F}(\boldsymbol{A}) = \sum_{i=1}^{3} f(\lambda_i, I_1, I_3)\boldsymbol{E}_i. \tag{23}$$

根据式(7),式(17)和式(23)得

$$a_0 + a_1\lambda_i + a_2\lambda_i^2 = f(\lambda_i, I_1, I_3), \qquad i = 1, 2, 3. \tag{24}$$

式(24)关于 a_0、a_1 和 a_2 的解为[13]

$$a_i = \frac{u_i}{(\lambda_1 - \lambda_2)(\lambda_2 - \lambda_3)(\lambda_3 - \lambda_1)}, \qquad i = 0, 1, 2, \tag{25}$$

其中

$$\begin{cases} u_0 = \sum_i f(\lambda_i, I_1, I_3)\lambda_j\lambda_k(\lambda_k - \lambda_j), \\ u_1 = \sum_i f(\lambda_i, I_1, I_3)(\lambda_j^2 - \lambda_k^2), \\ u_2 = \sum_i f(\lambda_i, I_1, I_3)(\lambda_k - \lambda_j). \end{cases} \tag{26}$$

2) 当 $\boldsymbol{A}$ 有两个相同特征根时,不失一般性假设 $\lambda_1 \neq \lambda_2 = \lambda_3$,对式(23)取极限 $\Delta\lambda = \lambda_3 - \lambda_2 \to 0$,得

$$\boldsymbol{F}(\boldsymbol{A}) = f(\lambda_1, I_1, I_3)\boldsymbol{E}_1 + f(\lambda_2, I_1, I_3)(\boldsymbol{I} - \boldsymbol{E}_1) + f^{(1)}(\lambda_2, I_1, I_3)\boldsymbol{H}, \tag{27}$$

其中 $f^{(n)} = (\partial^n f/\partial x_1^n)(x_1, x_2, x_3)$. 对式(25)和式(26)取极限 $\Delta\lambda \to 0$,得到有2个重根时系数 $a_i(i = 0, 1, 2)$ 的表达式

$$\begin{cases} a_0 = \dfrac{\lambda_1 f(\lambda_2, I_1, I_3) - \lambda_2 f(\lambda_1, I_1, I_3)}{\lambda_1 - \lambda_2} + a_2\lambda_1\lambda_2, \\ a_1 = \dfrac{f(\lambda_1, I_1, I_3) - f(\lambda_2, I_1, I_3)}{\lambda_1 - \lambda_2} - a_2(\lambda_1 + \lambda_2), \\ a_2 = \dfrac{f(\lambda_1, I_1, I_3) - f(\lambda_2, I_1, I_3) - (\lambda_1 - \lambda_2)f^{(1)}(\lambda_2, I_1, I_3)}{(\lambda_1 - \lambda_2)^2}. \end{cases} \tag{28}$$

3) 当 $\boldsymbol{A}$ 有3个特征根相同,即 $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = \lambda$ 时,对式(27)和式(28)分别取极限 $\Delta\lambda = \lambda_2 - \lambda_1 \to 0$,得

$$\boldsymbol{F}(\boldsymbol{A}) = f(\lambda, I_1, I_3)\boldsymbol{I} + f^{(1)}(\lambda, I_1, I_3)\boldsymbol{H}' + (1/2)f^{(2)}(\lambda, I_1, I_3)\boldsymbol{H}' \tag{29}$$

和

$$\begin{cases} a_0 = f(\lambda, I_1, I_3) - \lambda f^{(1)}(\lambda, I_1, I_3) + (1/2)\lambda^2 f^{(2)}(\lambda, I_1, I_3), \\ a_1 = f^{(1)}(\lambda, I_1, I_3) - \lambda f^{(2)}(\lambda, I_1, I_3), \\ a_2 = (1/2)f^{(2)}(\lambda, I_1, I_3). \end{cases} \tag{30}$$

到此证明了命题2. □

注记1 利用另外一个恒等式[13],[16]

$$\lambda_j^2 + \lambda_j\lambda_i + \lambda_i^2 - I_1(\lambda_j + \lambda_i) + I_2 = 0 \qquad (i \neq j), \tag{31}$$

可得到文献[12]中采用的标量响应函数 $f(\lambda_i, I_1, I_2)$,其满足

$$f(\lambda_i, I_1, I_2) = t_1(\lambda_i, \lambda_j, \lambda_k). \tag{32}$$

此时,文献[12]中张量函数 $\boldsymbol{F}(\boldsymbol{A})$ 的表示形式可以通过将式(23),式(27)和式(29)中的 $f(\lambda_i, I_1, I_3)$ 和 $f^{(n)}(\lambda_i, I_1, I_3)$ 分别用 $f(\lambda_i, I_1, I_2)$ 和 $f^{(n)}(\lambda_i, I_1, I_2)$ 代替而得到. 同样,通过替换式(25)、式(28)和式(30)中

的 $f(\lambda_i, I_1, I_3)$ 和 $f^{(1)}(\lambda_i, I_1, I_3)$, 可以得到表示式(17) 中的 a_0、a_1 和 a_2.

注记 2　实际问题中, 只需选择 $f(\lambda_i, I_1, I_2)$ 或 $f(\lambda_i, I_1, I_2)$ 中形式简单的并且容易确定的即可.

3　非对称张量函数的导数

本节, 我们将 Dui 和 Chen[13] 于 2004 年所提出的求解对称各向同性张量值函数导数的方法推广到满足可交换条件的非对称各向同性张量函数情况.

3.1　3 个不同特征根情况

设 $\dot{\boldsymbol{A}}$ 和 $\dot{\boldsymbol{F}}$ 在基矢量 $\boldsymbol{N}_i$ 和 $\hat{\boldsymbol{N}}_i$ 下的分量分别为 $\dot{A}_{ij}$ 和 $\dot{F}_{ij}$, 即

$$\dot{\boldsymbol{A}} = \sum_{i,j} \dot{A}_{ij} \boldsymbol{N}_i \otimes \hat{\boldsymbol{N}}_j, \quad \dot{\boldsymbol{F}} = \sum_{i,j} \dot{F}_{ij} \boldsymbol{N}_i \otimes \hat{\boldsymbol{N}}_j. \tag{33}$$

$\boldsymbol{N}_i$ 和 $\hat{\boldsymbol{N}}_i$ 分别关于时间 t 取导数, 因此引进旋率 Ω 和 $\hat{\Omega}$ 满足

$$\dot{\boldsymbol{N}}_i = \Omega \boldsymbol{N}_i = \sum_j \omega_{ji} \boldsymbol{N}_j, \quad \dot{\hat{\boldsymbol{N}}}_i = -\hat{\Omega}^{\mathrm{T}} \hat{\boldsymbol{N}}_i = \sum_j \hat{\omega}_{ij} \hat{\boldsymbol{N}}_j, \tag{34}$$

其中 $\omega_{ji} = \hat{\boldsymbol{N}}_j \cdot (\Omega \boldsymbol{N}_i)$, $\hat{\omega}_{ij} = \hat{\boldsymbol{N}}_i \cdot (\hat{\Omega} \boldsymbol{N}_j)$, 且满足 $\hat{\omega}_{ij} = -\omega_{ji}$. 则, 把谱表示形式(7) 和谱表示形式(23) 分别关于时间 t 取导数, 得

$$\dot{\boldsymbol{A}} = \sum_{i,j} [\dot{\lambda}_i \delta_{ij} + (\lambda_j - \lambda_i) \hat{\omega}_{ij}] \boldsymbol{N}_i \otimes \hat{\boldsymbol{N}}_j \tag{35}$$

和

$$\begin{aligned}\dot{\boldsymbol{F}} = {} & \sum_i [f^{(1)}(\lambda_i, I_1, I_3)\dot{\lambda}_i + g'(\lambda_i, I_1, I_3)\dot{I}_1 + h'(\lambda_i, I_1, I_3)\dot{I}_3] \boldsymbol{N}_i \otimes \hat{\boldsymbol{N}}_i + \\ & \sum_{i \neq j} \{[f(\lambda_j, I_1, I_3) - f(\lambda_i, I_1, I_3)]\hat{\omega}_{ij}\} \boldsymbol{N}_i \otimes \hat{\boldsymbol{N}}_j.\end{aligned} \tag{36}$$

其中　$g' = \partial f(x_1, x_2, x_3)/\partial x_2$, $h' = \partial f(x_1, x_2, x_3)/\partial x_3$.

综合考虑式(33)、式(35) 和式(36), 得

$$\dot{F}_{ij} = \begin{cases} f^{(1)}(\lambda_i, I_1, I_3)\mathrm{tr}(\dot{\boldsymbol{A}}\boldsymbol{E}_i) + g'(\lambda_i, I_1, I_3)\dot{I}_1 + h'(\lambda_i, I_1, I_3)\dot{I}_3, & i = j, \\ \dfrac{f(\lambda_j, I_1, I_3) - f(\lambda_i, I_1, I_3)}{(\lambda_j - \lambda_i)}\dot{A}_{ij}, & i \neq j. \end{cases} \tag{37}$$

将式(24) 和式(37) 代入式(36), 有

$$\begin{aligned}\dot{\boldsymbol{F}} = {} & \sum_i \{[f^{(1)}(\lambda_i, I_1, I_3) - a_1 - 2a_2\lambda_i]\mathrm{tr}(\dot{\boldsymbol{A}}\boldsymbol{E}_i) + \\ & g'(\lambda_i, I_1, I_3)\dot{I}_1 + h'(\lambda_i, I_1, I_3)\dot{I}_3\}\boldsymbol{E}_i + \\ & \sum_{i,j}[a_1 + a_2(\lambda_j + \lambda_i)]\dot{A}_{ij}\boldsymbol{N}_i \otimes \hat{\boldsymbol{N}}_j.\end{aligned} \tag{38}$$

$\dot{\boldsymbol{F}}$ 进一步可以表示为

$$\begin{aligned}\dot{\boldsymbol{F}} = {} & a_1\dot{\boldsymbol{A}} + a_2(\boldsymbol{A}\dot{\boldsymbol{A}} + \dot{\boldsymbol{A}}\boldsymbol{A}) + [\boldsymbol{f}^{(1)}(\boldsymbol{A}) - a_1\boldsymbol{I} - 2a_2\boldsymbol{A}] \cdot \sum_i \mathrm{tr}(\dot{\boldsymbol{A}}\boldsymbol{E}_i)\boldsymbol{E}_i + \\ & \boldsymbol{g}'(\boldsymbol{A})\dot{I}_1 + \boldsymbol{h}'(\boldsymbol{A})\dot{I}_3,\end{aligned} \tag{39}$$

其中

$$\begin{cases} \boldsymbol{f}^{(1)}(\boldsymbol{A}) = \sum_i f^{(1)}(\lambda_i, I_1, I_3)\boldsymbol{E}_i, \\ \boldsymbol{g}'(\boldsymbol{A}) = \sum_i g'(\lambda_i, I_1, I_3)\boldsymbol{E}_i, \\ \boldsymbol{h}'(\boldsymbol{A}) = \sum_i h'(\lambda_i, I_1, I_3)\boldsymbol{E}_i. \end{cases} \tag{40}$$

由式(39) 得

$$\frac{\partial \boldsymbol{F}}{\partial \boldsymbol{A}} = a_1 \boldsymbol{I} \boxtimes \boldsymbol{I} + a_2(\boldsymbol{A} \boxtimes \boldsymbol{I} + \boldsymbol{I} \boxtimes \boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}) + [\boldsymbol{f}^{(1)}(\boldsymbol{A}) - a_1 \boldsymbol{I} - 2a_2 \boldsymbol{A}] \times \sum_i \boldsymbol{E}_i \otimes \boldsymbol{E}_i^{\mathrm{T}} + \boldsymbol{g}'(\boldsymbol{A}) \otimes \boldsymbol{I} + \boldsymbol{h}'(\boldsymbol{A}) \otimes \boldsymbol{D}, \tag{41}$$

其中 $\boldsymbol{D} = \partial I_3 / \partial \boldsymbol{A} = I_2 \boldsymbol{I} - I_1 \boldsymbol{A}^{\mathrm{T}} + (\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}})^2$ (参见文献[18]).

3.2 2 个重根情况

将式(41) 取极限得到导数的表示形式. 注意 $\Delta\lambda = \lambda_3 - \lambda_2 \to 0$ 时, 有

$$\begin{cases} f^{(1)}(\lambda_1, I_1, I_3) - a_1 - 2a_2\lambda_1 \to f^{(1)}(\lambda_1, I_1, I_3) - a_1 - 2a_2\lambda_1 + o(\Delta\lambda), \\ f^{(1)}(\lambda_2, I_1, I_3) - a_1 - 2a_2\lambda_2 \to \Xi_1 \Delta\lambda + \Xi_2 \Delta\lambda^2 + o(\Delta\lambda^2), \\ f^{(1)}(\lambda_3, I_1, I_3) - a_1 - 2a_2\lambda_3 \to - \Xi_1 \Delta\lambda + \\ \qquad (- \Xi_2 + (1/6) f^{(3)}(\lambda_2, I_1, I_3)) \Delta\lambda^2 + o(\Delta\lambda^2), \end{cases} \tag{42}$$

其中

$$\begin{cases} \Xi_1 = \left\{ 2f(\lambda_1, I_1, I_3) - 2f(\lambda_2, I_1, I_3) + (\lambda_2 - \lambda_1)[2f^{(1)}(\lambda_2, I_1, I_3) - \right. \\ \qquad \left. (\lambda_2 - \lambda_1) f^{(2)}(\lambda_2, I_1, I_3)] \right\} / \left\{ 2(\lambda_2 - \lambda_1)^2 \right\}, \\ \Xi_2 = \dfrac{-6f(\lambda_1, I_1, I_3) + 6f(\lambda_2, I_1, I_3)}{6(\lambda_2 - \lambda_1)^3} - \\ \qquad \left\{ (\lambda_2 - \lambda_1) \left\{ 6f^{(1)}(\lambda_2, I_1, I_3) + (\lambda_2 - \lambda_1)[-3f^{(2)}(\lambda_2, I_1, I_3) + \right.\right. \\ \qquad \left.\left. (\lambda_2 - \lambda_1) f^{(3)}(\lambda_2, I_1, I_3)] \right\} \right\} / \left\{ 6(\lambda_2 - \lambda_1)^3 \right\}. \end{cases} \tag{43}$$

将式(9)、式(10) 和式(42) 代入式(41), 取极限得

$$\begin{aligned} \frac{\partial \boldsymbol{F}}{\partial \boldsymbol{A}} = {} & a_1 \boldsymbol{I} \boxtimes \boldsymbol{I} + a_2(\boldsymbol{A} \boxtimes \boldsymbol{I} + \boldsymbol{I} \boxtimes \boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}) + \\ & [f^{(1)}(\lambda_1, I_1, I_3) - a_1 - 2a_2\lambda_1](\boldsymbol{E}_1 \otimes \boldsymbol{E}_1^{\mathrm{T}}) + \\ & (1/2)[f^{(2)}(\lambda_2, I_1, I_3) - 2a_2][\boldsymbol{H} \otimes (\boldsymbol{I} - \boldsymbol{E}_1^{\mathrm{T}}) + (\boldsymbol{I} - \boldsymbol{E}_1) \otimes \boldsymbol{H}^{\mathrm{T}}] + \\ & (1/6) f^{(3)}(\lambda_2, I_1, I_3) \boldsymbol{H} \otimes \boldsymbol{H}^{\mathrm{T}} + \boldsymbol{g}^*(\boldsymbol{A}) \otimes \boldsymbol{I} + \boldsymbol{h}^*(\boldsymbol{A}) \otimes \boldsymbol{D}, \end{aligned} \tag{44}$$

其中

$$\begin{cases} \boldsymbol{g}^*(\boldsymbol{A}) = g'(\lambda_1, I_1, I_3) \boldsymbol{E}_1 + g'(\lambda_2, I_1, I_3)(\boldsymbol{I} - \boldsymbol{E}_1) + g^*(\lambda_2, I_1, I_3) \boldsymbol{H}, \\ \boldsymbol{h}^*(\boldsymbol{A}) = h'(\lambda_1, I_1, I_3) \boldsymbol{E}_1 + h'(\lambda_2, I_1, I_3)(\boldsymbol{I} - \boldsymbol{E}_1) + h^*(\lambda_2, I_1, I_3) \boldsymbol{H}, \end{cases} \tag{45}$$

其中 $g^* = \dfrac{\partial^2 f(x_1, x_2, x_3)}{\partial x_1 \partial x_2}$, $h^* = \dfrac{\partial^2 f(x_1, x_2, x_3)}{\partial x_1 \partial x_3}$.

3.3 三重特征根时

进一步, 对式(44) 取极限 $\Delta\lambda = \lambda_2 - \lambda_1 \to 0$. 注意当 $\Delta\lambda \to 0$ 时, 有

$$\begin{cases} f^{(1)}(\lambda_1, I_1, I_3) - a_1 - 2a_2\lambda_1 \to \\ \qquad \dfrac{\Delta\lambda^2}{6} f^{(3)}(\lambda, I_1, I_3) + \dfrac{\Delta\lambda^3}{12} f^{(4)}(\lambda, I_1, I_3) + \dfrac{\Delta\lambda^4}{40} f^{(5)}(\lambda, I_1, I_3) + o(\Delta\lambda^4), \\ f^{(2)}(\lambda_2, I_1, I_3) - 2a_2 \to \\ \qquad \dfrac{\Delta\lambda}{3} f^{(3)}(\lambda, I_1, I_3) + \dfrac{\Delta\lambda^2}{4} f^{(4)}(\lambda, I_1, I_3) + \dfrac{\Delta\lambda^3}{10} f^{(5)}(\lambda, I_1, I_3) + o(\Delta\lambda^3). \end{cases} \tag{46}$$

把式(12) 和式(46) 代入式(44) 中, 得

$$\frac{\partial \boldsymbol{F}}{\partial \boldsymbol{A}} = f^{(1)}(\lambda, I_1, I_3) \boldsymbol{I} \boxtimes \boldsymbol{I} + (1/2) f^{(2)}(\lambda, I_1, I_3)(\boldsymbol{H}' \boxtimes \boldsymbol{I} + \boldsymbol{I} \boxtimes \boldsymbol{H}'^{\mathrm{T}}) +$$

$$(1/6)f^{(3)}(\lambda, I_1, I_3)[\boldsymbol{I} \otimes (\boldsymbol{H}'^{\mathrm{T}})^2 + \boldsymbol{H}' \otimes \boldsymbol{H}'^{\mathrm{T}} + \boldsymbol{H}'^2 \otimes \boldsymbol{I}] +$$
$$(1/24)f^{(4)}(\lambda, I_1, I_3)[\boldsymbol{H}' \otimes (\boldsymbol{H}'^{\mathrm{T}})^2 + \boldsymbol{H}'^2 \otimes \boldsymbol{H}'^{\mathrm{T}}] +$$
$$(1/120)f^{(5)}(\lambda, I_1, I_3)\boldsymbol{H}'^2 \otimes (\boldsymbol{H}'^{\mathrm{T}})^2 + \boldsymbol{g}^{\#}(\boldsymbol{A}) \otimes \boldsymbol{I} + \boldsymbol{h}^{\#}(\boldsymbol{A}) \otimes \boldsymbol{D}, \tag{47}$$

其中

$$\begin{cases} \boldsymbol{g}^{\#}(\boldsymbol{A}) = g'(\lambda, I_1, I_3)\boldsymbol{E}_1 + (1/2)g^{\#}(\lambda, I_1, I_3)\boldsymbol{H}'^2, \\ \boldsymbol{h}^{\#}(\boldsymbol{A}) = h'(\lambda, I_1, I_3)\boldsymbol{E}_1 + (1/2)h^{\#}(\lambda, I_1, I_3)\boldsymbol{H}'^2, \end{cases} \tag{48}$$

其中 $g^{\#} = \dfrac{\partial^3 f(x_1, x_2, x_3)}{\partial^2 x_1 \partial x_2}, \quad h^{\#} = \dfrac{\partial^3 f(x_1, x_2, x_3)}{\partial^2 x_1 \partial x_3}.$

注记 3 当选取标量函数 $f(\lambda_i, I_1, I_2)$ 时,需要用到 $\partial I_2/\partial \boldsymbol{A}$. 则,令 $\boldsymbol{D} = \partial I_2/\partial \boldsymbol{A} = I_1\boldsymbol{I} - \boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$. 通过用 $f(\lambda_i, I_1, I_2)$ 和 $\boldsymbol{D}$ 替换张量函数导数表示式(41),式(44)和式(47)中的 $f(\lambda_i, I_1, I_3)$ 和 $\boldsymbol{D}$, 可以得到文献[12]中所表示的张量值函数导数.

注记 4 当 $\boldsymbol{g}'(\boldsymbol{A}) = \boldsymbol{g}^{*}(\boldsymbol{A}) = \boldsymbol{g}^{\#}(\boldsymbol{A}) = \boldsymbol{0}$, $\boldsymbol{h}'(\boldsymbol{A}) = \boldsymbol{h}^{*}(\boldsymbol{A}) = \boldsymbol{h}^{\#}(\boldsymbol{A}) = \boldsymbol{0}$ 时,非对称各向同性张量值函数导数的不变表达形式(41)、式(44)、式(47)退化为 Balendran 和 Nemat-Nasser[4] 的结果.

4 结　　论

本文给出求解非对称各向同性张量值函数及其导数的一种简便方法, 此方法具有如下特征:

1) 此方法能够研究满足可交换条件的非对称各向同性张量函数. 扩展了非对称张量函数的研究范围. 已有的非对称各向同性张量函数及其导数的研究结果只是本文的特殊情况.

2) 由特征值的恒等式,引进的标量函数 $f(\lambda_i, I_1, I_2)$ 或 $f(\lambda_i, I_1, I_2)$ 容易确定,并且使有相同特征根时求极限的过程变得容易.

3) 求解对称各向同性张量函数及其导数的方法适用于无重特征根时非对称情况,有相同特征根的结果可以通过极限的办法得到.

[参　考　文　献]

[1] Miehe C. Exponential map algorithm for stress updates in anisotropic multiplicative elasto-plasticity for single crystals[J]. International Journal for Numerical Methods in Engineering, 1996, **39**: 3367-3390.

[2] Sansour C, Kollmann F G. Large viscoplastic deformations of shells. Theory and finite element formulation[J]. Computational Mechanics, 1998, **21**: 512-525.

[3] Steinmann P, Stein E. On the numerical treatment and analysis of finite deformation ductile single crystal plasticity[J]. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 1996, **129**: 235-254.

[4] Balendran B, Nemat-Nasser S. Derivative of a function of a nonsymmetric second-order tensor[J]. Quarterly of Applied Mathematics, 1996, **54**: 583-600.

[5] De Souza Neto E A. The exact derivative of the exponential of a nonsymmetric tensor[J]. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 2001, **190**: 2377-2383.

[6] Itskov M, Aksel N. A closed-form representation for the derivative of non-symmetric tensor power series[J]. International Journal of Solids and Structures, 2002, **39**: 5963-5978.

[7] Itskov M. Application of the Dunford-Taylor integral to isotropic tensor functions and their derivatives[J]. Proceedings of the Royal Society of London. Ser A, Mathematical & Physical Sciences, 2003, **459**: 1449-1457.

[8] Itskov M. Computation of the exponential and other isotropic tensor functions and their derivatives [J]. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 2003, **192**: 3985-3999.

[9] Lu J. Exact expansions of arbitrary tensor functions $\boldsymbol{F}(\boldsymbol{A})$ and their derivatives[J]. International Journal of Solids and Structures, 2004, **41**: 337-349.

[10] Dui G S. Discussion on 'Exact expansions of arbitrary tensor functions $\boldsymbol{F}(\boldsymbol{A})$ and their derivatives' [J]. International Journal of Solids and Structures, 2005, **42**: 4514-4515.

[11] Dui G S, Ren Q, Shen Z. Time rates of Hill's strain tensors[J]. Journal of Elasticity, 1999, **54**: 129-140.

[12] WANG Zi-qiao, DIU Guan-sun. On the derivatives of a subclass of isotropic tensor functions of non-symmetric tensor[J]. International Journal of Solids and Structures, 2007.

[13] Dui G S, Chen Y C. Basis-free representations for the stress rate of isotopic materials[J]. International Journal of Solids and Structures, 2004, **41**: 4845-4860.

[14] Del Piero G. Some properties of the set of 4th-order tensors, with application to elasticity[J]. Journal of Elasticity, 1979, **9**: 245-261.

[15] Kintzel O, Basar Y. Fourth-order tensors- tensor differentiation with applications to continuum mechanics. Part I: classical tensor analysis[J]. Zeitschrift fur Angewandte Mathematik und Mechanik (ZAMM), 2006, **86**: 291-311.

[16] Dui G S, Wang Z D, Jin M. Derivatives on the isotropic tensor functions[J]. Science in China Ser G, Physics, Mechanics & Astronomy, 2006, **49**: 321-334.

[17] Ogden R. Non-linear Elastic Deformations[M]. Ellis Horwood: Chichester, 1984.

[18] 黄筑平. 连续介质力学基础[M]. 北京: 高等教育出版社, 2003.

Basis-Free Expressions for the Derivatives of a Subclass of Nonsymmetric Isotropic Tensor Functions

WANG Zhi-qiao, DUI Guan-suo

(Institute of Engineering Mechanics, Beijing Jiaotong University, Beijing 100044, P. R. China)

Abstract: The method for solving the derivatives of symmetric isotropic tensor-valued functions proposed by Dui and Chen was generalized to a subclass of nonsymmetric tensor functions satisfying the commutative condition. This subclass of tensor functions is more general than those investigated by the existing methods. In the case of three distinct eigenvalues, the commutativity makes it possible to introduce two scalar functions, which will be used to construct the general nonsymmetric tensor functions and their derivatives. In the cases of repeated eigenvalues, the results are acquired by taking limits.

Key words: nonsymmetric tensor; derivative of tensor function; scalar function; fourth-order tensor