文章编号: 1000-0887(2007) 11-1333-07

广义 H-矩阵的一组充分条件*

朱　砾,　刘建州

(湘潭大学 数学与计算科学学院, 湖南 湘潭 411105)

(郭兴明推荐)

摘要:　利用矩阵的连续过渡、子矩阵的谱半径估计等方法, 研究了正定条件下的广义 H-矩阵的判别法. 给出了判定正定条件下广义 H-矩阵的几个充分条件, 当块矩阵退化为点矩阵时, 这些条件即为非奇异 H-矩阵的充分条件.

关　键　词: H-矩阵;　广义 H-矩阵;　谱半径

中图分类号: O151.21　　文献标识码: A

引　　言

广义 M-矩阵和广义 H-矩阵的理论在许多实际问题的研究中有着非常重要的作用, 如 Euler 方程数值求解中出现的线性系统的块迭代法的收敛性问题, 以及动力系统的研究等. 国内外一些学者对广义 M-矩阵和广义 H-矩阵的性质、以及收敛的块迭代算法等方面的研究, 已取得了一些很有价值的成果[1-9], 这些理论在计算数学、流体动力学等方面有着重要的应用. 然而广义 H-矩阵的判定却比较困难. 本文得到了广义 H-矩阵的一些充分条件, 当块矩阵退化为点矩阵时, 这些充分条件即为非奇异 H-矩阵新判据.

令 $x \in C^n$, $\boldsymbol{A} = (\boldsymbol{A}_{ij}) \in C^{n\times n}$, 我们记 $\langle n\rangle$ 表示集合 $\{1, 2, \cdots, n\}$; R_+^n 表示 R^n 中正向量的集合; $\boldsymbol{A}^{\mathrm{H}}$ 表示 $\boldsymbol{A}$ 的共轭转置; $\mathrm{Re}(z)$ 表示 z 的实部, $\rho(\boldsymbol{A})$ 表示 $\boldsymbol{A}$ 的谱半径, $\boldsymbol{I}$ 表示单位矩阵.

若存在 $\langle n\rangle_1, \langle n\rangle_2, \cdots, \langle n\rangle_k \subset \langle n\rangle$, 满足 $\langle n\rangle_i \cap \langle n\rangle_j = \varnothing$, $\forall i, j \in \langle k\rangle$, $i \neq j$, $\bigcup_{j=1}^{k}\langle n\rangle_j = \langle n\rangle$, 则记 $\langle n\rangle = \langle n\rangle_1 \oplus \langle n\rangle_2 \oplus \cdots \oplus \langle n\rangle_k$. 称为对集合 $\langle n\rangle$ 的划分.

定义 1[1-3]　设 $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B} \in C^{n\times n}$, 如果对任意的 $0 \neq x \in C^n$, 都有 $\mathrm{Re}(x^{\mathrm{H}}\boldsymbol{A}x) > 0$, 称 $\boldsymbol{A}$ 为正定的, 记为 $\boldsymbol{A} > 0$; 如果对任意的 $x \in C^n$, 都有 $\mathrm{Re}(x^{\mathrm{H}}\boldsymbol{A}x) \geqslant 0$, 称 $\boldsymbol{A}$ 为半正定的, 记为 $\boldsymbol{A} \geqslant 0$. 类似地, 我们称 $\boldsymbol{A}$ 为负定的(半负定的), 记为 $\boldsymbol{A} < 0$ $(\boldsymbol{A} \leqslant 0)$, 如果 $-\boldsymbol{A} > 0$ $(-\boldsymbol{A} \geqslant 0)$. 且记 $\boldsymbol{A} > \boldsymbol{B}$, $\boldsymbol{A} \geqslant \boldsymbol{B}$, $\boldsymbol{A} < \boldsymbol{B}$, $\boldsymbol{A} \leqslant \boldsymbol{B}$, 如果 $\boldsymbol{A} - \boldsymbol{B} > 0$, $\boldsymbol{A} - \boldsymbol{B} \geqslant 0$, $\boldsymbol{A} - \boldsymbol{B} < 0$, $\boldsymbol{A} - \boldsymbol{B} \leqslant 0$. 显然, $\boldsymbol{A} > 0$ 当且仅当 $\boldsymbol{A} + \boldsymbol{A}^{\mathrm{H}} > 0$.

定义 2[1-3]　设 $\boldsymbol{A} \in C^{n\times n}$ 为半正定的Hermite矩阵, 则存在酉矩阵 $\boldsymbol{U}$, 使得 $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{U}^{\mathrm{H}}\Lambda\boldsymbol{U}$, 其中 $\Lambda = \mathrm{diag}\{\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n\} \in R^{n\times n}$, 记 $\boldsymbol{A}^{1/2} = \boldsymbol{U}^{\mathrm{H}}\Lambda\boldsymbol{U}$, 其中 $\Lambda = \mathrm{diag}\{\lambda_1^{1/2}, \lambda_2^{1/2}, \cdots, \lambda_n^{1/2}\}$;

* 收稿日期: 2007-01-15;　修订日期: 2007-09-21

基金项目: 国家自然科学基金资助项目(10671164); 湖南省科学工程计算与数值仿真重点实验室资助项目

作者简介: 朱砾(1965—), 男, 湖南双峰人, 副教授, 博士生(联系人. E-mail: zhuli@xtu.edu.cn).

设 $\boldsymbol{A} \in C^{n\times n}$, 且 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{H}} = \boldsymbol{A}$, 记 $|\boldsymbol{A}| = (\boldsymbol{A}\boldsymbol{A})^{1/2}$• 易知, 当 $\boldsymbol{A}$ 为半正定时, 有 $|\boldsymbol{A}| = \boldsymbol{A}$, 当 $\boldsymbol{A}$ 为半负定时, 有 $|\boldsymbol{A}| = -\boldsymbol{A}$•

定义 3[1-3]　记 $Z_m^k := \left\{\boldsymbol{A} = (\boldsymbol{A}_{ij}) \in C^{mk\times mk} \mid \boldsymbol{A}_{ij} \in C^{k\times k}\right.$ 是Hermite矩阵, $\forall i, j \in \langle m\rangle$, 且 $\left.\boldsymbol{A}_{ij} \leqslant 0,\ i \neq j,\ \forall i, j \in \langle m\rangle\right\}$, 如果 $\boldsymbol{A} \in Z_m^k$, 称 $\boldsymbol{A}$ 为广义 Z-矩阵;

记 $\overline{Z}_m^k := \left\{\boldsymbol{A} = (\boldsymbol{A}_{ij}) \in Z_m^k \mid \boldsymbol{A}_{ii} > 0,\ \forall i \in \langle m\rangle\right\}$;

记 $D_m^k := \left\{\boldsymbol{A} = (\boldsymbol{A}_{ij}) \in C^{mk\times mk} \mid \boldsymbol{A}_{ij} \in C^{k\times k}\right.$ 是Hermite矩阵, $\forall i, j \in \langle m\rangle$, 且 $\boldsymbol{A}_{ii} > 0$, $\left.\forall i \in \langle m\rangle\right\}$;

记 $M_m^k := \left\{\boldsymbol{A} = (\boldsymbol{A}_{ij}) \in \overline{Z}_m^k \mid\right.$ 存在 $\boldsymbol{u} = (u_1, u_2, \cdots, u_m)^{\mathrm{T}} \in R_+^m$, 使得 $\sum_{j=1}^m u_j \boldsymbol{A}_{ij} > 0,\ \forall i \in \left.\langle m\rangle\right\}$, 如果 $\boldsymbol{A} \in M_m^k$, 称 $\boldsymbol{A}$ 为广义 M-矩阵;

记 $H_m^k := \left\{\boldsymbol{A} = (\boldsymbol{A}_{ij}) \in D_m^k \mid\right.$ 存在 $\boldsymbol{u} = (u_1, u_2, \cdots, u_m)^{\mathrm{T}} \in R_+^m$, 使得 $u_i |\boldsymbol{A}_{ii}| - \sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^m u_j |\boldsymbol{A}_{ij}| > 0,\ \forall i \in \left.\langle m\rangle\right\}$, 如果 $\boldsymbol{A} \in H_m^k$, 称 $\boldsymbol{A}$ 为广义 H-矩阵•

易知, $\overline{Z}_m^k \subset D_m^k$, $M_m^k \subset H_m^k$•

定义 4[1-3]　设 $\boldsymbol{A} = (\boldsymbol{A}_{ij}) \in D_m^k$, 称 $\mu(\boldsymbol{A}) = (\overline{\boldsymbol{A}}_{ij}) \in C^{mk\times mk}$ 为 $\boldsymbol{A}$ 的块比较矩阵, 其元素定义为

$$\overline{\boldsymbol{A}}_{ij} = \begin{cases} -|\boldsymbol{A}_{ij}|, & i \neq j,\ \forall i, j \in \langle m\rangle, \\ |\boldsymbol{A}_{ii}|, & i = j,\ \forall i \in \langle m\rangle\text{•} \end{cases}$$

易知, $\boldsymbol{A} \in H_m^k$ 当且仅当 $\mu(\boldsymbol{A}) \in M_m^k$•

设 $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B} \in C^{m\times n}$, 记号 $\boldsymbol{A}\circ\boldsymbol{B}$ 表示 $\boldsymbol{A}$、$\boldsymbol{B}$ 的Hadamard积•

1　主要结论

引理 1　设 $\boldsymbol{A}$、$\boldsymbol{B}$ 为 n 阶Hermite矩阵, $\boldsymbol{A} > 0$、$\boldsymbol{B} \geqslant 0$, 则

$$\rho(\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{B})\boldsymbol{A} - \boldsymbol{B} \geqslant 0\text{•}$$

证明　因 $\boldsymbol{A}$ 和 $\boldsymbol{B}$ 为Hermite矩阵, 且 $\boldsymbol{A} > 0$, $\boldsymbol{B} \geqslant 0$, 则 $\boldsymbol{A}^{-1/2}\boldsymbol{B}\boldsymbol{A}^{-1/2}$ 为Hermite矩阵, 则存在酉矩阵 $\boldsymbol{U}$, 使得

$$\boldsymbol{U}\boldsymbol{A}^{-1/2}\boldsymbol{B}\boldsymbol{A}^{-1/2}\boldsymbol{U}^{\mathrm{H}} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{pmatrix},$$

其中　$0 \leqslant \lambda_n \leqslant \lambda_{n-1} \leqslant \cdots \leqslant \lambda_1 = \rho(\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{B})$•

则

$$\rho(\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{B})\boldsymbol{I} - \boldsymbol{U}\boldsymbol{A}^{-1/2}\boldsymbol{B}\boldsymbol{A}^{-1/2}\boldsymbol{U}^{\mathrm{H}} = \lambda_1\boldsymbol{I} - \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{pmatrix} \geqslant 0,$$

因此 $\boldsymbol{U}(\lambda_1\boldsymbol{I} - \boldsymbol{A}^{-1/2}\boldsymbol{B}\boldsymbol{A}^{-1/2})\boldsymbol{U}^{\mathrm{H}} \geqslant 0$, 则 $\rho(\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{B})\boldsymbol{I} - \boldsymbol{A}^{-1/2}\boldsymbol{B}\boldsymbol{A}^{-1/2} \geqslant 0$, 即

$$A^{-1/2}[\rho(A^{-1}B)A^{1/2}A^{1/2}-B]A^{-1/2}\geqslant 0,$$

因此 $\rho(A^{-1}B)A-B\geqslant 0$.

引理2[4] 设 A_i、B_i 为正定Hermite矩阵,则

$$\sum_{i=1}^{k}(A_i\circ B_i)\leqslant\left\{\sum_{i=1}^{k}A_i^p\right\}^{1/p}\circ\left\{\sum_{i=1}^{k}B_i^q\right\}^{1/q},$$

其中 $p,q>1$ 且 $1/p+1/q=1$.

由 A 半正定,则对任意 $\varepsilon>0$, $A+\varepsilon I$ 正定,利用连续过渡方法,我们易得:

推论1 设 A_i、B_i 为半正定Hermite矩阵,则

$$\sum_{i=1}^{k}(A_i\circ B_i)\leqslant\left\{\sum_{i=1}^{k}A_i^p\right\}^{1/p}\circ\left\{\sum_{i=1}^{k}B_i^q\right\}^{1/q},$$

其中 $p,q>1$ 且 $1/p+1/q=1$.

定理1 设 $A\in D_m^k$,如果存在 $\langle m\rangle=\langle m\rangle_1\oplus\langle m\rangle_2$,使得

$$\sum_{i\in\langle m\rangle_1}\rho\left[\left(|A_{ii}|+\sum_{j\in\langle m\rangle_1,j\neq i}|A_{ij}|\right)^{-1}\left(\sum_{j\in\langle m\rangle,j\neq i}|A_{ij}|\right)\right]<1;$$

$$\sum_{i\in\langle m\rangle_2}\rho\left[\left(|A_{ii}|+\sum_{j\in\langle m\rangle_2,j\neq i}|A_{ij}|\right)^{-1}\left(\sum_{j\in\langle m\rangle,j\neq i}|A_{ij}|\right)\right]<1.$$

则 $A\in H_m^k$.

证明 由于

$$\sum_{i\in\langle m\rangle_1}\rho\left[\left(|A_{ii}|+\sum_{j\in\langle m\rangle_1,j\neq i}|A_{ij}|\right)^{-1}\left(\sum_{j\in\langle m\rangle,j\neq i}|A_{ij}|\right)\right]<1;$$

$$\sum_{i\in\langle m\rangle_2}\rho\left[\left(|A_{ii}|+\sum_{j\in\langle m\rangle_2,j\neq i}|A_{ij}|\right)^{-1}\left(\sum_{j\in\langle m\rangle,j\neq i}|A_{ij}|\right)\right]<1.$$

可取足够小的正数 ε,记

$$u_i=\begin{cases}\rho\left[\left(|A_{ii}|+\sum_{j\in\langle m\rangle_1,j\neq i}|A_{ij}|\right)^{-1}\left(\sum_{j\in\langle m\rangle,j\neq i}|A_{ij}|+\varepsilon I\right)\right], & i\in\langle m\rangle_1,\\ \rho\left[\left(|A_{ii}|+\sum_{j\in\langle m\rangle_2,j\neq i}|A_{ij}|\right)^{-1}\left(\sum_{j\in\langle m\rangle,j\neq i}|A_{ij}|+\varepsilon I\right)\right], & i\in\langle m\rangle_2,\end{cases}$$

使得 $\sum_{i\in\langle m\rangle_1}u_i<1$, $\sum_{i\in\langle m\rangle_2}u_i<1$,由 $A\in D_m^k$,且 $|A_{ij}|+\varepsilon I>0$,我们有 $u_i>0$, $\forall i\in\langle m\rangle$. 而对任意的 $i\in\langle m\rangle$,或者 $i\in\langle m\rangle_1$,或者 $i\in\langle m\rangle_2$. 当 $i\in\langle m\rangle_1$ 时,我们有

$$\begin{aligned}&u_i|A_{ii}|-\sum_{j\neq i}u_j|A_{ij}|=\\&u_i|A_{ii}|-\sum_{j\in\langle m\rangle_1,j\neq i}u_j|A_{ij}|-\sum_{j\in\langle m\rangle_2}u_j|A_{ij}|\geqslant\\&u_i|A_{ii}|-\left(\sum_{j\in\langle m\rangle_1,j\neq i}|A_{ij}|\right)\left(\sum_{j\in\langle m\rangle_1,j\neq i}u_j\right)-\left(\sum_{j\in\langle m\rangle_2}|A_{ij}|\right)\left(\sum_{j\in\langle m\rangle_2}u_j\right)=\\&u_i\left(|A_{ii}|+\sum_{j\in\langle m\rangle_1,j\neq i}|A_{ij}|\right)-\left(\sum_{j\in\langle m\rangle_1,j\neq i}|A_{ij}|\right)\left(\sum_{j\in\langle m\rangle_1}u_j\right)-\\&\left(\sum_{j\in\langle m\rangle_2}|A_{ij}|\right)\left(\sum_{j\in\langle m\rangle_2}u_j\right)\geqslant\\&u_i\left(|A_{ii}|+\sum_{j\in\langle m\rangle_1,j\neq i}|A_{ij}|\right)-\sum_{j\in\langle m\rangle,j\neq i}|A_{ij}|.\end{aligned}$$

由引理1,我们有

$$\rho\left[\left(|A_{ii}|+\sum_{j\in\langle m\rangle_1,j\neq i}|A_{ij}|\right)^{-1}\left(\sum_{j\in\langle m\rangle,j\neq i}|A_{ij}|+\varepsilon I\right)\right]\left(|A_{ii}|+\sum_{j\in\langle m\rangle_1,j\neq i}|A_{ij}|\right)-\sum_{j\in\langle m\rangle,j\neq i}|A_{ij}|>$$

$$\rho\left[\left(|A_{ii}|+\sum_{j\in\langle m\rangle_1,j\neq i}|A_{ij}|\right)^{-1}\left(\sum_{j\in\langle m\rangle,j\neq i}|A_{ij}|+\varepsilon I\right)\right]\left(|A_{ii}|+\sum_{j\in\langle m\rangle_1,j\neq i}|A_{ij}|\right)-\left(\sum_{j\in\langle m\rangle,j\neq i}|A_{ij}|+\varepsilon I\right)\geqslant 0.$$

当 $i\in\langle m\rangle_2$ 时, 类似可得.

因此, 对任意 $i\in\langle m\rangle$, 存在正向量 $\boldsymbol{u}=(u_1,u_2,\cdots,u_m)^{\mathrm T}\in R_m^+$, 使得 $u_i|A_{ii}|-\sum_{j\neq i}u_j|A_{ij}|>0$, 对任意 $i\in\langle m\rangle$, 则 $A\in H_m^k$.

推论 2 设 $A\in Z_m^k$, 且存在 $\langle m\rangle=\langle m\rangle_1\oplus\langle m\rangle_2$, 使得

$$\sum_{i\in\langle m\rangle_1}\rho\left[\left(A_{ii}-\sum_{j\in\langle m\rangle_1,j\neq i}A_{ij}\right)^{-1}\left(\sum_{j\in\langle m\rangle,j\neq i}A_{ij}\right)\right]<1;$$

$$\sum_{i\in\langle m\rangle_2}\rho\left[\left(A_{ii}-\sum_{j\in\langle m\rangle_2,j\neq i}A_{ij}\right)^{-1}\left(\sum_{j\in\langle m\rangle,j\neq i}A_{ij}\right)\right]<1.$$

则 $A\in M_m^k$.

证明 因为 $A\in Z_m^k$, 则 $|A_{ii}|=A_{ii}$, $|A_{ij}|=-A_{ij}$, $i\neq j$, 对任意 $i,j\in\langle m\rangle$.

定理 2 设 $A\in D_m^k$, 如果存在 $\langle m\rangle=\langle m\rangle_1\oplus\langle m\rangle_2$, 及 $q>1$ 使得

$$\sum_{i\in\langle m\rangle_1}\rho\left\{\left[\left(A_{ii}+\sum_{j\in\langle m\rangle_1,j\neq i}|A_{ij}|^q\right)^{1/q}\right]^{-1}\left[\left(\sum_{j\in\langle m\rangle_1,j\neq i}|A_{ij}|^q\right)^{1/q}+\left(\sum_{j\in\langle m\rangle_2,j\neq i}|A_{ij}|^q\right)^{1/q}\right]\right\}<1;$$

$$\sum_{i\in\langle m\rangle_2}\rho\left\{\left[\left(|A_{ii}|+\sum_{j\in\langle m\rangle_2,j\neq i}|A_{ij}|^q\right)^{1/q}\right]^{-1}\left[\left(\sum_{j\in\langle m\rangle_1,j\neq i}|A_{ij}|^q\right)^{1/q}+\left(\sum_{j\in\langle m\rangle_2,j\neq i}|A_{ij}|^q\right)^{1/q}\right]\right\}<1.$$

则 $A\in H_m^k$.

证明 记

$$u_i=\begin{cases}\rho\left\{\left[|A_{ii}|+\left(\sum_{j\in\langle m\rangle_1,j\neq i}|A_{ij}|^q\right)^{1/q}\right]^{-1}\left[\left(\sum_{j\in\langle m\rangle_1,j\neq i}|A_{ij}|^q\right)^{1/q}+\left(\sum_{j\in\langle m\rangle_2,j\neq i}|A_{ij}|^q\right)^{1/q}+\varepsilon I\right]\right\}, & i\in\langle m\rangle_1,\\ \rho\left\{\left[|A_{ii}|+\left(\sum_{j\in\langle m\rangle_2,j\neq i}|A_{ij}|^q\right)^{1/q}\right]^{-1}\left[\left(\sum_{j\in\langle m\rangle_1,j\neq i}|A_{ij}|^q\right)^{1/q}+\left(\sum_{j\in\langle m\rangle_2,j\neq i}|A_{ij}|^q\right)^{1/q}+\varepsilon I\right]\right\}, & i\in\langle m\rangle_2,\end{cases}$$

其中 ε 为足够小的正数, 使得对任意 $i\in\langle m\rangle$, $u_i>0$ 且 $\sum_{i\in\langle m\rangle_1}u_i<1$, $\sum_{i\in\langle m\rangle_2}u_i<1$. 令

$$E=\begin{pmatrix}1&\cdots&1\\ \vdots&\ddots&\vdots\\ 1&\cdots&1\end{pmatrix}\in R^{k\times k}.$$

注意到 $E\circ|A_{ij}|=|A_{ij}|$, 对任意 $q>1$, 有 $1/p+1/q=1$, 且对任意 $i\in\langle m\rangle$, 或者 $i\in\langle m\rangle_1$, 或者 $i\in\langle m\rangle_2$. 当 $i\in\langle m\rangle_1$ 时, 由推论 1, 我们有

$$
\begin{aligned}
&u_i|A_{ii}|-\sum_{j\neq i}u_j|A_{ij}|=\\
&\quad u_i|A_{ii}|-\sum_{j\in\langle m\rangle_1,j\neq i}u_j|A_{ij}|-\sum_{j\in\langle m\rangle_2}u_j|A_{ij}|=\\
&\quad u_i|A_{ii}|-\sum_{j\in\langle m\rangle_1,j\neq i}u_jE\circ|A_{ij}|-\sum_{j\in\langle m\rangle_2}u_jE\circ|A_{ij}|\geqslant\\
&\quad u_i|A_{ii}|-\Big[\sum_{j\in\langle m\rangle_1,j\neq i}(u_jE)^p\Big]^{1/p}\circ\Big(\sum_{j\in\langle m\rangle_1,j\neq i}|A_{ij}|^q\Big)^{1/q}-\\
&\quad \Big[\sum_{j\in\langle m\rangle_2}(u_jE)^p\Big]^{1/p}\circ\Big(\sum_{j\in\langle m\rangle_2}|A_{ij}|^q\Big)^{1/q}=\\
&\quad u_i|A_{ii}|-\Big[E^p\sum_{j\in\langle m\rangle_1,j\neq i}(u_j)^p\Big]^{1/p}\circ\Big(\sum_{j\in\langle m\rangle_1,j\neq i}|A_{ij}|^q\Big)^{1/q}-\\
&\quad \Big[E^p\sum_{j\in\langle m\rangle_2}(u_j)^p\Big]^{1/p}\circ\Big(\sum_{j\in\langle m\rangle_2}|A_{ij}|^q\Big)^{1/q}=\\
&\quad u_i|A_{ii}|-\Big[\sum_{j\in\langle m\rangle_1,j\neq i}(u_j)^p\Big]^{1/p}\Big(\sum_{j\in\langle m\rangle_1,j\neq i}|A_{ij}|^q\Big)^{1/q}-\\
&\quad \Big[\sum_{j\in\langle m\rangle_2}(u_j)^p\Big]^{1/p}\Big(\sum_{j\in\langle m\rangle_2}|A_{ij}|^q\Big)^{1/q}=\\
&\quad u_i\Big[|A_{ii}|+\Big(\sum_{j\in\langle m\rangle_1,j\neq i}|A_{ij}|^q\Big)^{1/q}\Big]-\\
&\quad \Big[\Big(\sum_{j\in\langle m\rangle_1,j\neq i}u_j^p\Big)^{1/p}+u_i\Big]\Big(\sum_{j\in\langle m\rangle_1,j\neq i}|A_{ij}|^q\Big)^{1/q}-\\
&\quad \Big[\sum_{j\in\langle m\rangle_2}(u_j)^p\Big]^{1/p}\Big(\sum_{j\in\langle m\rangle_2}|A_{ij}|^q\Big)^{1/q}.
\end{aligned}
$$

由于 $p>1, 0<u_i<1$, 我们有

$$
\Big(\sum_{j\in\langle m\rangle_1,j\neq i}u_j^p\Big)^{1/p}+u_i<\Big(\sum_{j\in\langle m\rangle_1}u_j^p\Big)^{1/p}<\sum_{j\in\langle m\rangle_1}u_j<1,
$$

$$
\Big(\sum_{j\in\langle m\rangle_2}u_j^p\Big)^{1/p}<\sum_{j\in\langle m\rangle_2}u_j<1,
$$

则

$$
\begin{aligned}
&u_i|A_{ii}|-\sum_{j\neq i}u_j|A_{ij}|\geqslant\\
&\quad u_i\Big[|A_{ii}|+\Big(\sum_{j\in\langle m\rangle_1,j\neq i}|A_{ij}|^q\Big)^{1/q}\Big]-\Big(\sum_{j\in\langle m\rangle_1,j\neq i}|A_{ij}|^q\Big)^{1/q}-\Big(\sum_{j\in\langle m\rangle_2}|A_{ij}|^q\Big)^{1/q}=\\
&\quad u_i\Big[|A_{ii}|+\Big(\sum_{j\in\langle m\rangle_1,j\neq i}|A_{ij}|^q\Big)^{1/q}\Big]-\\
&\quad \Big[\Big(\sum_{j\in\langle m\rangle_1,j\neq i}|A_{ij}|^q\Big)^{1/q}+\Big(\sum_{j\in\langle m\rangle_2}|A_{ij}|^q\Big)^{1/q}\Big]>\\
&\quad u_i\Big[|A_{ii}|+\Big(\sum_{j\in\langle m\rangle_1,j\neq i}|A_{ij}|^q\Big)^{1/q}\Big]-\\
&\quad \Big[\Big(\sum_{j\in\langle m\rangle_1,j\neq i}|A_{ij}|^q\Big)^{1/q}+\Big(\sum_{j\in\langle m\rangle_2}|A_{ij}|^q\Big)^{1/q}+\varepsilon I\Big].
\end{aligned}
$$

由于

$$u_i = \rho\left\{\left[|A_{ii}| + \left(\sum_{j\in\langle m\rangle_1, j\neq i} |A_{ij}|^q\right)^{1/q}\right]^{-1} \times \right.$$
$$\left.\left[\left(\sum_{j\in\langle m\rangle_1, j\neq i} |A_{ij}|^q\right)^{1/q} + \left(\sum_{j\in\langle m\rangle_2, j\neq i} |A_{ij}|^q\right)^{1/q} + \varepsilon I\right]\right\}.$$

由引理1, 我们有

$$u_i |A_{ii}| - \sum_{j\neq i} u_j |A_{ij}| > 0.$$

当 $i\in\langle m\rangle_2$ 时, 类似可得.

因此, 对任意 $i\in\langle m\rangle$, 存在 $\boldsymbol{u} = (u_1, u_2, \cdots, u_m)^{\mathrm{T}} \in R_m^+$, 使得 $u_i |A_{ii}| - \sum_{j\neq i} u_j |A_{ij}| > 0$, 则 $A\in H_m^k$.

推论3 设 $A = (a_{ij}) \in C^{m\times m}$, $a_{ii}\neq 0$, $i\in\langle m\rangle$, 如果存在 $\langle m\rangle = \langle m\rangle_1 \oplus \langle m\rangle_2$, 及 $q\geqslant 1$, 使得

$$\sum_{i\in\langle m\rangle_1}\left\{\left[|a_{ii}| + \left(\sum_{j\in\langle m\rangle_1, j\neq i} |a_{ij}|^q\right)^{1/q}\right]^{-1}\left[\left(\sum_{j\in\langle m\rangle_1, j\neq i} |a_{ij}|^q\right)^{1/q} + \left(\sum_{j\in\langle m\rangle_2, j\neq i} |a_{ij}|^q\right)^{1/q}\right]\right\} < 1;$$

$$\sum_{i\in\langle m\rangle_2}\left\{\left[|a_{ii}| + \left(\sum_{j\in\langle m\rangle_2, j\neq i} |a_{ij}|^q\right)^{1/q}\right]^{-1}\left[\left(\sum_{j\in\langle m\rangle_1, j\neq i} |a_{ij}|^q\right)^{1/q} + \left(\sum_{j\in\langle m\rangle_2, j\neq i} |a_{ij}|^q\right)^{1/q}\right]\right\} < 1.$$

则 A 为 H-矩阵.

注 若 $\langle m\rangle = \langle m\rangle_1 \oplus \langle m\rangle_2 \oplus \cdots \oplus \langle m\rangle_k$, 则上述定理及推论亦成立.

2 数值实例

例1 设

$$A = \begin{pmatrix} 6 & 3 & 4 & 1 & \sqrt{3} \\ 1 & 19 & 2\sqrt{2} & \sqrt{2} & \sqrt{2} \\ \sqrt{2} & \sqrt{2} & 20 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 1 & 7 & 8 \\ 1 & 1 & 1 & 3 & 12 \end{pmatrix},$$

取 $q = 2$, $\langle m\rangle_1 = \{1, 2, 3\}$, $\langle m\rangle_2 = \{4, 5\}$, 则

$$\sum_{i\in\langle m\rangle_1}\left\{\left[|a_{ii}| + \left(\sum_{j\in\langle m\rangle_1, j\neq i} |a_{ij}|^2\right)^{1/2}\right]^{-1}\left[\left(\sum_{j\in\langle m\rangle_1, j\neq i} |a_{ij}|^2\right)^{1/2} + \left(\sum_{j\in\langle m\rangle_2} |a_{ij}|^2\right)^{1/2}\right]\right\} = \frac{21}{22} < 1,$$

$$\sum_{i\in\langle m\rangle_2}\left\{\left[|a_{ii}| + \left(\sum_{j\in\langle m\rangle_2, j\neq i} |a_{ij}|^2\right)^{1/2}\right]^{-1}\left[\left(\sum_{j\in\langle m\rangle_1} |a_{ij}|^2\right)^{1/2} + \left(\sum_{j\in\langle m\rangle_2, j\neq i} |a_{ij}|^2\right)^{1/2}\right]\right\} = \frac{13+\sqrt{3}}{15} < 1.$$

则由推论3知, A 是 H-矩阵.

例2 设

$$A=\begin{pmatrix} 3 & 0 & -2 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0\\ 0 & 3 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0\\ -1 & 0 & 9 & 0 & -1 & 0 & -1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 4 & 0 & -6 & 0\\ 0 & -1 & 0 & -1 & 0 & 4 & 0 & 0\\ -1 & 0 & 0 & 0 & -2 & 0 & 8 & 0\\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & -2 & 0 & 8 \end{pmatrix}\in Z_4^2,$$

取 $\langle m\rangle_1=\{1,2\}$, $\langle m\rangle_2=\{3,4\}$, 有

$$\sum_{i\in\langle m\rangle_1}\rho\Big[\Big(\|A_{ii}\|+\sum_{j\in\langle m\rangle_1,j\neq i}\|A_{ij}\|\Big)^{-1}\Big(\sum_{j\neq i}\|A_{ij}\|\Big)\Big]=\frac{3}{5}+\frac{3}{10}=\frac{9}{10}<1,$$

$$\sum_{i\in\langle m\rangle_2}\rho\Big[\Big(\|A_{ii}\|+\sum_{j\in\langle m\rangle_2,j\neq i}\|A_{ij}\|\Big)^{-1}\Big(\sum_{j\neq i}\|A_{ij}\|\Big)\Big]=\frac{3}{10}+\frac{3}{5}=\frac{9}{10}<1,$$

由推论2, 知 $A\in M_4^2$.

[参 考 文 献]

[1] Elsner L, Mehrmann V. Convergence of block iterative methods for linear systems arising in the numerical solution of Euler Euations[J]. Numer Math, 1991, (59): 541-559.

[2] Nabben R. On a class of matrices which arise in the numerical solution of Euler equations[J]. Numer Math, 1992, (63): 411-431.

[3] HUANG Ting-zhu, SHEN Shu-qian, LI Hou-biao. On Generalized H-matrices[J]. Linear Algebra and Its Applications, 2005, (396): 81-90.

[4] Ando T. Concavity of certain maps on positive definite matrices and applications to hadamard products[J]. Linear Algebra and Its Applications, 1979, (26): 203-241.

[5] Horn R A, Johnson C A. Matrix Analysis[M]. Cambridge: Cambridge University Press, 1985.

[6] Berman A, Hershkowiz D. Characterization of acyclic D-stable matrices[J]. Linear Algebra and Its Applications, 1984, (58): 17-32.

[7] Mehrmann V. On class of matrices containing M-matrices and Hermitian positive semi-definite matrices[J]. Linear Algebra and Its Applications, 1984, (58): 217-234.

[8] Varga R S. Matrix Iterative Analysis[M]. 2nd Ed. Berlin, Heidelberg: Springer-Verlag, 2000.

[9] Varga R S. On recurring theorems on diagonal dominance[J]. Linear Algebra and Its Applications, 1976, (13): 1-9.

Some New Conditions for Generalized H-matrices

ZHU Li, LIU Jian-zhou

(School of Mathematics and Computational Science, Xiangtan University, Xiangtan, Hunan 411105, P. R. China)

Abstract: By using a matrix' continuous transition method and the sub-matrix' estimate of spectral radius methods etc., some decision methods for a generalized H-matrix under positive definite matrix conditions were researched. Some new sufficient conditions for generalized H-matrices are obtained. When a block matrix degenerates a point matrix, these conditions then become H-matrix's sufficient conditions.

Key words: H-matrix; generalized H-matrix; spectral radius