应用数学和力学, 第 28 卷 第 11 期
2007 年 11 月 15 日出版

Applied Mathematics and Mechanics
Vol. 28, No. 11, Nov. 15, 2007

文章编号: 1000-0887(2007) 11-1363-07

渐近上半紧的多值随机半流的随机吸引子*

李　挺

(苏州大学 数学科学学院, 江苏 苏州 215006)

(李继彬推荐)

摘要: 该文研究多值随机半流的随机吸引子的存在性. 首先证明在拉回渐近上半紧及吸收的条件下, 关于极限集的一个抽象结果, 然后证明了随机的吸引子的存在性.

关 键 词: 随机吸引子; 渐近上半紧; 吸收集

中图分类号: O175.1　　文献标识码: A

引　言

理解半流的渐近性态是现代数学物理中的最重要的问题之一. 处理具有耗散性质的系统的一种方法是分析它的整体吸引子的存在性及其结构, 在自治情况, 整体吸引子是一个紧的不变集, 它一致吸引在有界集上的所有轨道. 然而在自然科学的许多应用中, 非自治系统及随机系统是非常重要的且是有趣的.

扩展整体吸引子的概念到非自治情况及随机情况导致了所谓的拉回吸引子(或上链)吸引子理论的概念, 这些概念已经在非自治及随机动力系统中得到发展[1-4], 同时表明它们在理解非自治及随机动力系统的动力学时非常有用.

然而, 困难出现在我们处理系统的解不具有唯一性或者模型是由微分包含来描述的系统. 对于这些情况, 多值流被证明可以有效地处理这些微分方程及微分包含的渐近性态. 如果在确定性系统中添加随机项, 则又出现新的困难, 因而对应的随机微分方程就必须用不同的方法来处理.

为了证明在非自治及随机多值半流中吸引子的存在性, 最简单也是最强的假设是紧吸收集的存在性[5-6], 但是这种假设一般不成立, 作为它的替代, 我们通常用某种渐近紧性, 在文献[7-8]作者分别考虑了具有拉回渐近紧非的自治单值及多值半流, 证明了拉回吸引子的存在性, 在文献[6]中作者也考虑了具有拉回渐近上半紧的非自治多值半流, 证明了整体拉回吸引子的存在性, 但是在他们文中的整体拉回吸引子既不是紧的也不是不变的.

本文我们考虑某些多值随机半流, 通过引进随机吸引子的概念来研究它们的渐近性态. 我们证明在拉回渐近上半紧的假设下, 多值随机半流吸引子的存在性, 且这个随机吸引子是紧的不变的. 进一步, 如果有遍历性, 那么这个随机吸引子是某个决定性有界集的极限集.

在第 1 节我们推广了文献[1]中的随机动力系统概念到多值映射情况, 多值随机动力系统

* 收稿日期: 2006-07-18; 修订日期: 2007-08-28
基金项目: 国家自然科学基金资助项目(10571130)
作者简介: 李挺(1967—) 女, 江苏启东人, 讲师(E-mail: liting@suda.edu.cn).

是一个满足上链性质的多值可测映射, 在这个框架下, 我们引进不变性、吸收性、吸引性等概念, 这些概念导致我们得到多值随机半流的随机吸引子存在性的一般结果. 在第 2 节我们给出主要定理的证明.

1 多值随机半流的随机吸引子

X 是一个具有度量 d 的完备的度量空间, $\mathscr{F}(\mathscr{X})$ 是 Borel σ- 代数. 用 $(\Omega, \mathscr{F}, \boldsymbol{P})$ 表示一个概率空间, $\theta_t: \Omega \to \Omega$ 是 Ω 上的保测变换群, 满足映射 $(t, \omega) \mapsto \theta_t\omega$ 是可测的以及

i) $\theta_0\omega = \omega$ 对所有 $\omega \in \Omega$;

ii) $\theta_t(\theta_\tau\omega) = \theta_{t+\tau}\omega$ 对所有 $\omega \in \Omega$, $t, \tau \in \mathbf{R}$.

参数 $t \in \mathbf{R}$, $\mathbf{R}$ 赋予 Borel σ- 代数 $\mathscr{B}(\mathbf{R})$.

记 $P(X)$ 是 X 的所有非空子集组成的集合, 记

$$\mathscr{B}(X) = \left\{A \in P(X): A \text{ 是有界的}\right\},$$
$$C(X) = \left\{A \in P(X): A \text{ 是有界的}\right\},$$
$$K(X) = \left\{A \in P(X): A \text{ 是紧的}\right\}.$$

用 $\mathrm{dist}(C_1, C_2)$ 表示集合 C_1、C_2 之间的 Hausdorff 半距离, 它定义为

$$\mathrm{dist}(C_1, C_2) = \sup_{x \in C_1} \inf_{y \in C_2} d(x, y), \qquad \text{对 } C_1、C_2 \subset X.$$

定义 1.1 一个集值映射 $G: \mathbf{R}^+ \times \Omega \times X \to P(X)$ 称为是多值随机半流, 如果它满足

(i) $G(0, \omega) = Id$ 在 X 上;

(ii) $G(t+s, \omega)x = G(t, \theta_s\omega)G(s, \omega)x$ (上链性质) 对所有 $t, s \in \mathbf{R}^+$, $x \in X$, $\omega \in \Omega$.

一个随机集是一个集值映射 $C: \Omega \to 2^X$ (2^X 是 X 的所有子集), 满足对于所有 x, 映射 $\omega \mapsto d(x, C(\omega))$ 是可测的. 如果一个随机集 C 满足对于 $\boldsymbol{P}$ 几乎所有的 ω 及所有 $t \in \mathbf{R}^+$ 有

$$G(t, \omega)C(\omega) \subset C(\theta_t\omega),$$

则称它是正向不变的, 如果对于 $\boldsymbol{P}$ 几乎所有的 ω 及所有 $t \in \mathbf{R}^+$ 有

$$G(t, \omega)C(\omega) = C(\theta_t\omega),$$

则称它是不变的.

一个随机有界集 $\mathscr{C} = \left\{C(\omega)\right\}$ 是一个随机集 $\mathscr{C}$ 且满足对于 $\boldsymbol{P}$ 几乎所有的 ω, $C(\omega) \in \mathscr{B}(X)$. 用 $\hat{\mathscr{B}}(X)$ 表示所有的随机有界集的集合. 一个随机紧集 $\mathscr{C} = \left\{C(\omega)\right\}$ 是一个随机集, 且对于 $\boldsymbol{P}$ 几乎所有的 ω, $C(\omega)$ 是紧子集.

定义 1.2 多值随机半流 G 称为上半连续的, 如果对于所有的 $t \in \mathbf{R}^+$, $\boldsymbol{P}$ 几乎所有的 ω, 对于任意给定的 $x \in X$ 及 $G(t, \omega)x$ 的一个邻域 $\mathscr{O}$, 存在 $\delta > 0$, 只要 $d(x, y) < \delta$ 那么

$$G(t, \omega)y \subset \mathscr{O}.$$

另一方面, G 称为下半连续的, 如果对于所有的 $t \in \mathbf{R}^+$, $\boldsymbol{P}$ 几乎所有的 ω, 给定 $x_n \to x$ $(n \to \infty)$, 及 $y \in G(t, \omega)x$, 存在 $y_n \in G(t, \omega)x_n$ 使得 $y_n \to y$. 如果 G 是上半连续的又是下半连续的, 则称 G 为连续的.

对于随机有界集 $\mathscr{D} \in \hat{\mathscr{B}}(X)$, $\omega \in \Omega$ 及 $t \in \mathbf{R}^+$, 记

$$\gamma^t(\omega, \mathscr{D}) = \bigcup_{s \geqslant t} G(s, \theta_{-s}\omega)D(\theta_{-s}\omega).$$

定义 1.3 一个多值随机半流 G 称为拉回上半紧的, 如果对于任意的随机有界集 $\mathscr{D}$, $\boldsymbol{P}$ 几乎所有的 $\omega \in \Omega$, 存在 $t_0 \geqslant 0$, 使得 $\gamma^{t_0}(\omega, \mathscr{D}) \in \mathscr{B}(X)$, 对于任意 $s_n \to +\infty$, 任何序列 $\xi^n \in$

$G(s_n, \theta_{-s_n}\omega)D(\theta_{-s_n}\omega)$ 是预紧的.

定义 1.4 如果一个随机集 $\{A(\omega)\}$ 满足对确定的有界集 D, $\boldsymbol{P}$ 几乎所有的 ω

$$\lim_{s\to\infty} \mathrm{dist}(G(s, \theta_{-s}\omega)D, A(\omega)) = 0,$$

则称它是吸引确定的有界集.

定义 1.5 一个随机集 $B = \{B(\omega)\}$ 称为相对于 $\mathscr{B}(X)$ 是吸收的, 如果对任何确定的有界集 $D \in \mathscr{B}(X)$, $\boldsymbol{P}$ 几乎所有的 $\omega \in \Omega$, 存在 $t_0(\omega, D) \geqslant 0$ 使得当 $t \geqslant t_0(\omega, D)$ 时

$$G(t, \theta_{-t}\omega)D \subset B(\omega).$$

定义 1.6 族 $\{A(\omega)\}$ 称为是随机多值半流 G 的随机吸引子, 如果它满足

1) $\mathscr{A} = \{A(\omega)\}$ 是一个随机紧集;

2) $\mathscr{A} = \{A(\omega)\}$ 吸引所有决定性有界集 $D \in \mathscr{B}(X)$;

3) 它是不变的.

对于一个决定性有界集 D, 它的极限集 $\Lambda(D, \omega) = \Lambda_D(\omega)$ 定义为

$$\Lambda_D(\omega) = \bigcap_{T\geqslant 0} \overline{\bigcup_{t\geqslant T} G(t, \theta_{-t}\omega)D},$$

另外, 对于一个随机有界集 $\mathscr{D} = \{\mathscr{D}(\omega)\}$, 它的极限集 $\Omega_{\mathscr{D}}(\omega)$ 定义为

$$\Omega_{\mathscr{D}}(\omega) = \bigcap_{T\geqslant 0} \overline{\bigcup_{t\geqslant T} G(t, \theta_{-t}\omega)D(\theta_{-t}\omega)}.$$

定理 假定多值半流 G 是连续的, 拉回渐近上半紧的, 并且存在一个相对于 $\mathscr{B}(X)$ 是吸收的随机有界集 $\mathscr{B} = \{B(\omega)\} \in \hat{\mathscr{B}}(X)$, 则 $\mathscr{A} = \{A(\omega)\}$ 是随机多值半流 G 的随机吸引子, 其中 $A(\omega) = \overline{\bigcup_{D\in\mathscr{B}(X)} \Lambda_D(\omega)}$.

2 定理的证明

为了证明定理, 我们首先证明下面的结果:

引理 2.1 $y \in \Lambda_D(\omega)$ 当且仅当存在序列 $t_n \to +\infty$, $x_n \in D$ 及 $y_n \in G(t_n, \theta_{-t_n}\omega)x_n$ 满足 $\lim_{n\to+\infty} y_n = y$.

证明 假设 $y \in \Lambda_D(\omega)$, 那么对于所有 $n \in \mathbf{N}$, $y \in \overline{\bigcup_{t\geqslant n} G(t, \theta_{-t}\omega)D}$, 因而存在 $y_n \in \bigcup_{t\geqslant n} G(t, \theta_{-t}\omega)D$, 满足 $|y - y_n| < 1/n$. 因而存在序列 $t_n \geqslant n$, $x_n \in D$ 使得 $y_n \in G(t_n, \theta_{-t_n}\omega)x_n$ 且 $\lim_{n\to+\infty} y_n = y$.

另一方面, 如果存在 $t_n \to +\infty$, $x_n \in D$ 及 $y_n \in G(t_n, \theta_{-t_n}\omega)x_n$ 使得 $\lim_{n\to+\infty} y_n = y$, 那么对 $\forall T \in \mathbf{R}^+$, 如果 $t_n \geqslant T$, 我们有

$$y_n \in G(t_n, \theta_{-t_n}\omega)x_n \subset \bigcup_{t\geqslant T} G(t, \theta_{-t}\omega)D.$$

这蕴含着

$$y \in \overline{\bigcup_{t\geqslant T} G(t, \theta_{-t}\omega)D}.$$

因而 $y \in \Lambda_D(\omega)$. □

引理 2.2 如果 G 是拉回渐近上半紧的, 且存在一个相对于 $\mathscr{B}(X)$ 是拉回吸收的随机有界集 $\mathscr{B} = \{B(\omega)\}$, 那么对 $D \in \mathscr{B}(X)$ 及 $\boldsymbol{P}$ 几乎所有的 $\omega \in \Omega$, 集合 $\Lambda_D(\omega)$ 是非空、紧的, 且

$$\lim_{t\to+\infty} \mathrm{dist}(G(t, \theta_{-t}\omega)D, \Lambda_D(\omega)) = 0. \tag{1}$$

进一步, 如果 G 是下半连续的, 则 $\{\Lambda_D(\omega)\}$ 是不变的.

证明 固定 $D \in \mathscr{B}(X)$, 因为随机有界集 $\mathscr{B} = \{B(\omega)\}$ 相对于 $\mathscr{B}(X)$ 是拉回吸收的, 因

而对 P 几乎所有的 $\omega\in\Omega$, 存在 $t_0\geqslant 0$ 使得对于所有 $t\geqslant t_0$,

$$G(t,\theta_{-t}\omega)D\subset B(\omega)$$

因此 $\gamma^{t_0}(\omega,D)\in\mathscr{B}(X)$. 因而如果我们考虑序列 $t_n\to+\infty$, 序列 $x_n\in G(t_n,\theta_{-t_n}\omega)D$; 那么由拉回渐近上半紧性, 我们能够找到子列收敛到 y. 由它的构造可知 $y\in\Lambda_D(\omega)$, 因而对 P 几乎所有的 ω, 这个集合是非空的.

我们知道 $\Lambda_D(\omega)$ 是闭的, 因此为了证明它的紧性, 只要证明对于给定的序列 $\{y_n\}\in\Lambda_D(\omega)$, 存在收敛子列. 首先观察到, 因为 $y_n\in\Lambda_D(\omega)$, 存在 $t_n\geqslant n$ 及 $x_n\in G(t_n,\theta_{-t_n}\omega)D$ 使得

$$d(x_n,y_n)\leqslant\frac{1}{n}$$

因为 G 是拉回渐近上半紧的, 存在 x_n 的子列 x_{n_k} 收敛到 y, 因而我们有 $y_{n_k}\to y,(k\to\infty)$.

如果 1) 不真, 则存在 $\epsilon>0$, 序列 $t_n\to+\infty$, 及序列 $x_n\in G(t_n,\theta_{-t_n}\omega)D$, 使得对所有 $y\in\Lambda_D(\omega)$

$$d(x_n,y)\geqslant\epsilon$$

对于序列 x_n, 由拉回渐近上半紧可知存在收敛子列 $x_{n_k}\to y\in\Lambda_D(\omega)$, 引出矛盾.

接下来证明 $\Lambda_D(\omega)$ 是不变的. 固定 $(t,\omega)\in\mathbf{R}^+\times\Omega$, 我们要证明如果 $y\in\Lambda_D(\omega)$, 那么 $G(t,\omega)y\in\Lambda_D(\theta_t\omega)$. 因而我们有

$$G(t,\omega)\Lambda_D(\omega)\subset\Lambda_D(\theta_t\omega)$$

事实上, 如果 $y\in\Lambda_D(\omega)$, 那么存在 $t_n\to+\infty$, 序列 $x_n\in D$ 及 $y_n\in G(t_n,\theta_{-t_n}\omega,x_n)$ 使得

$$y_n\to y$$

G 的下半连续性蕴含着对于 $\forall z\in G(t,\omega)y$, 存在序列 $z_m\in G(t,\omega)y_m$ 使得 $z_m\to z\ (m\to\infty)$. 于是

$$z_m\in G(t,\omega)y_m\subset G(t+t_m,\theta_{-(t+t_m)}(\theta_t\omega),x_m)\subset G(t+t_m,\theta_{-(t+t_m)}(\theta_t\omega))D$$

且 $t+t_m\to+\infty$, $x_m\in D$. 因而 $z\in\Lambda_D(\theta_t\omega)$.

现在我们证明 $\Lambda_D(\theta_t\omega)\subset G(t,\omega)\Lambda_D(\omega)$.

对于 $y\in\Lambda_D(\theta_t\omega)$ 存在序列 $t_n\to\infty$, 及序列 $x_n\in D$, $y_n\in G(t_n,\theta_{-t_n}\omega)x_n$ 使得

$$y_n\to y$$

如果 $t_n\geqslant t$, 那么

$$G(t_n,\theta_{-t_n}\omega)x_n=G(t,\omega)G(t_n-t,\theta_{-(t_n-t)}\omega)x_n$$

因为 G 是拉回渐近上半紧的, $t_n-t\to+\infty$, $x_n\in D$, 所以存在序列 $z_{n_k}\in G(t_{n_k}-t,\theta_{-(t_{n_k}-t)}\omega)x_{n_k}$ 收敛到 $z\in\Lambda_D(\omega)$, 且有 $y_{n_k}\in G(t,\omega)z_{n_k}$. G 的上半连续性保证了

$$y\in G(t,\omega)z\subset G(t,\omega)\Lambda_D(\omega)$$

引理 2.3 如果 $\mathscr{B}=\{B(\omega)\}$ 是一个随机有界紧, 那么 $\{\Omega_{\mathscr{B}}(\omega)\}$ 是非空紧.

证明 $\mathscr{B}=\{B(\omega)\}$ 是一个随机有界集, 因而如果考虑序列 $t_n\to+\infty$, 序列 $x_n\in G(t_n,\theta_{-t_n}\omega)B(\theta_{-t_n}\omega)$, 那么由拉回渐近上半紧性, 可知存在子列收敛到 y. 根据构造可知 $y\in\Omega_{\mathscr{B}}(\omega)$, 因此 $\Omega_{\mathscr{B}}(\omega)$ 非空.

我们知道 $\Omega_{\mathscr{B}}(\omega)$ 是闭的, 因而为了证明 $\Omega_{\mathscr{B}}(\omega)$ 是紧的, 只要证明对任何给定的序列 $\{y_n\}\in\Omega_{\mathscr{B}}(\omega)$, 我们能够找到收敛的子序列, 首先由 $y_n\in\Omega_{\mathscr{B}}(\omega)$ 可知存在 $t_n\geqslant n$ 及 $x_n\in$

$G(t_n, \theta_{-t_n}\omega)B(\theta_{-t_n}\omega)$ 使得

$$d(x_n, y_n) \leqslant \frac{1}{n}.$$

又因为 G 是拉回渐近上半紧的,所以存在 x_n 的子序列 x_{n_k} 收敛到 y,因而我们有 $y_{n_k} \to y\ (k \to \infty)$.

命题 2.1　如果 $\mathscr{B}$ 是拉回吸收族,那么对所有 $D \in \mathscr{B}(X)$,$\boldsymbol{P}$ 几乎所有的 ω,

$$\Lambda_D(\omega) \subset \Omega_{\mathscr{B}}(\omega).$$

证明　固定 $D \in \mathscr{B}(X)$ 及 $y \in \Lambda_D(\omega)$,则存在序列 $t_n \to +\infty$,序列 $x_n \in D$ 及 $y_n \in G(t_n, \theta_{-t_n}\omega)x_n$,使得

$$\lim_{n\to\infty} y_n = y.$$

由于 $\mathscr{B} = \left\{B(\omega)\right\}$ 是拉回吸收的,因而对每个 $k \in \mathbf{N}$,存在 $t_{n_k} \in \left\{t_n\right\}$ 使得 $t_{n_k} \geqslant k$ 及

$$G(t_{n_k} - k, \theta_{-(t_{n_k}-k)}(\theta_{-k}\omega))D \subset B(\theta_{-k}\omega).$$

$x_{n_k} \in D$ 蕴含

$$G(t_{n_k} - k, \theta_{-(t_{n_k}-k)}(\theta_{-k}\omega))x_{n_k} \subset B(\theta_{-k}\omega).$$

因为

$$y_{n_k} \in G(t_{n_k}, \theta_{-t_{n_k}}\omega)x_{n_k} = G(k, \theta_{-k}\omega)G(t_{n_k} - k, \theta_{-(t_{n_k}-k)}(\theta_{-k}\omega))x_{n_k},$$

所以可取 $z_k \in B(\theta_{-k}\omega)$ 使得 $y_{n_k} \in G(k, \theta_{-k}\omega)z_k$.　由

$$\lim_{k\to+\infty} y_{n_k} = y,$$

可得 $y \in \Omega_{\mathscr{B}}(\omega)$.

定理的证明　固定一点 $x_0 \in X$,对于 $n \in \mathbf{N}$ 记 $D_n = \left\{x \mid d(x, x_0) \leqslant n\right\}$.　对于任何有界集 D,存在 n 使得 $D \subset D_n$.　由命题 2.1 可知对于每一个固定的 n,$\boldsymbol{P}$ 几乎所有的 ω

$$\Lambda_{D_n}(\omega) \subset \Omega_{\mathscr{B}}(\omega).$$

于是对于 $\boldsymbol{P}$ 几乎所有的 ω,有

$$\bigcup_{n\in\mathbf{N}} \Lambda_{D_n}(\omega) \subset \Omega_{\mathscr{B}}(\omega).$$

由 $\Omega_{\mathscr{B}}(\omega)$ 的紧性可知,对于 $\boldsymbol{P}$ 几乎所有的 ω

$$\overline{\bigcup_{n\in\mathbf{N}} \Lambda_{D_n}(\omega)} \subset \Omega_{\mathscr{B}}(\omega),$$

且 $A(\omega) = \overline{\bigcup_{n\in\mathbf{N}} \Lambda_{D_n}(\omega)}$ 是紧集.　另一方面,对于 $\boldsymbol{P}$ 几乎所有的 ω,

$$\overline{\bigcup_{n\in\mathbf{N}} \Lambda_{D_n}(\omega)} = \overline{\bigcup_{D\in\mathscr{B}(X)} \Lambda_D(\omega)},$$

且 $\mathscr{A} = \left\{A(\omega)\right\}$ 是一个随机紧集.

下证随机紧集 $\mathscr{A} = \left\{A(\omega)\right\}$ 是不变的,由引理 2.2 可知对于任意有界集 D,$\left\{\Lambda_D(\omega)\right\}$ 是不变的,因而 $G(t, \omega)\Lambda_{D_n}(\omega) = \Lambda_{D_n}(\theta_t\omega)$.　于是对于 $\forall x \in A(\omega)$,存在序列 $\left\{x_n\right\} \subset \bigcup_{n\in\mathbf{N}} \Lambda_{D_n}(\omega)$,使得 $\lim_{n\to\infty} x_n = x$,由 G 的下半连续性可知,对于 $\forall y \in G(t, \omega)x$ 存在 $y_n \in G(t, \omega)x_n$ 使得 $\lim_{n\to\infty} y_n = y$.　因为

$$y_n \in G(t, \omega)x_n \subset G(t, \omega)\bigcup_{n\in\mathbf{N}} \Lambda_{D_n}(\omega),$$

所以

$$y \in \overline{\bigcup_{n\in\mathbf{N}} G(t, \omega)\Lambda_{D_n}(\omega)} = \overline{\bigcup_{n\in\mathbf{N}} \Lambda_{D_n}(\theta_t\omega)} = A(\theta_t\omega).$$

因此

$$G(t,\omega)A(\omega)\subset A(\theta_t\omega).$$

另一方面

$$A(\theta_t\omega)=\overline{\bigcup_{n\in\mathbf{N}}\Lambda_{D_n}(\theta_t\omega)}=\overline{\bigcup_{n\in\mathbf{N}}G(t,\omega)\Lambda_{D_n}(\omega)}=\overline{G(t,\omega)\bigcup_{n\in\mathbf{N}}\Lambda_{D_n}(\omega)}.$$

给定 $y\in\overline{G(t,\omega)\bigcup_{n\in\mathbf{N}}\Lambda_{D_n}(\omega)}$, 存在序列 $\{x_k\}\subset\bigcup_{n\in\mathbf{N}}\Lambda_{D_n}(\omega)$ 使得 $G(t,\omega)x_k\to y\ (k\to\infty)$. 由 $\overline{\bigcup_{n\in\mathbf{N}}\Lambda_{D_n}(\omega)}$ 的紧性可知存在 x_{k_l} 使得 $\lim_{l\to\infty}x_{k_l}=x\in\overline{\bigcup_{n\in\mathbf{N}}\Lambda_{D_n}(\omega)}$. 又 G 是上半连续的, 所以 $\lim_{l\to\infty}\mathrm{dist}(G(t,\omega)x_{k_l},G(t,\omega)x)=0$. 因而我们有

$$y\in G(t,\omega)x\subset G(t,\omega)\overline{\bigcup_{n\in\mathbf{N}}\Lambda_{D_n}(\omega)}.$$

于是

$$A(\theta_t\omega)\subset G(t,\omega)\overline{\bigcup_{n\in\mathbf{N}}\Lambda_{D_n}(\omega)}=G(t,\omega)A(\omega).$$

接下来我们证明随机紧集 $\mathscr{A}$吸引任意确定性有界集. 由引理2.2可知, 对于任何确定性有界集 D,

$$\lim_{t\to+\infty}\mathrm{dist}(G(t,\theta_{-t}\omega)D,\Lambda_D(\omega))=0,$$

且 $\Lambda_D(\omega)\subset A(\omega)$. 因而我们有

$$\lim_{t\to+\infty}\mathrm{dist}(G(t,\theta_{-t}\omega)D,A(\omega))=0.$$

因此定理得证.

注 在定理的条件下, 如果进一步假定随机有界集 $\{B(\omega)\}$ 是一致有界的, 也即如果存在一个确定性有界集 U, 使得对 $\omega\in\Omega$, $B(\omega)\subset U$, 则对于 $\boldsymbol{P}$ 几乎所有的 ω

$$A(\omega)=\Omega_{\mathscr{B}}(\omega).$$

这很容易由命题 2.1 及事实 $\Omega_{\mathscr{B}}(\omega)\subset\Lambda_U(\omega)$ 推得.

命题 2.2 在定理的条件下, 如果我们进一步假定 θ_t 是遍历的, 那么存在一个确定的有界集合 U, 使得对 $\boldsymbol{P}$ 几乎所有的 ω,

$$A(\omega)=\Lambda_U(\omega).$$

证明 命题证明的想法来自于 Crauel[9] 文中. 为了完备性起见, 我们给出它的证明.

记 $R(\omega)=\inf\{r\in\mathbf{R}\mid A(\omega)\subset B(x_0,r)\}$,

其中 x_0 是 X 中固定的点. 函数 $R(\omega)$ 是可测的, 于是存在 $R_0>0$ 使得

$$\boldsymbol{P}(\{\omega\mid R(\omega)\leqslant R_0\})>0.$$

令 $U=B(x_0,R_0)$. θ_t 的遍历性蕴含对几乎所有的 ω, 存在序列 $t_n\to\infty$ 使得

$$R(\theta_{-t_n}\omega)\leqslant R_0.$$

对于 $x\in A(\omega)$ 及上面的 t_n, 由 $\mathscr{A}$的不变性可知, 对 $\forall n\in\mathbf{N}$, 存在 $x_n\in A(\theta_{-t_n}\omega)$ 使得

$$x\in G(t_n,\theta_{-t_n}\omega)x_n.$$

因为 $A(\theta_{-t_n}\omega)\subset B(x_0,R_0)$, 根据 $\Lambda_U(\omega)$ 的定义可知 $x\in\Lambda_U(\omega)$, 所以

$$A(\omega)\subset\Lambda_U(\omega).$$

由 $A(\omega)$ 的定义可知

$$\Lambda_U(\omega)\subset A(\omega),$$

所以

$$A(\omega)=\Lambda_U(\omega).$$

致谢　感谢曹永罗教授对命题 2.2 的建议·

[参　考　文　献]

[1] Crauel H, Debussche A, Flandoli F. Random attractors[J]. Journal of Dynamics and Differential Equation, 1995, **9**(2): 307-341.

[2] Kloeden P E, Schmalfuss B. Asymptotic behaviour of nonautonomous difference inclusions[J]. Systems Control Letter, 1998, **33**(4): 275-280.

[3] Langa J A, Schmalfuss B. Finite dimensionality of attractors for nonautonomous dynamical systems given by partial differential equations[J]. Stochastics and Dynamics, 2004, **4**(3): 385-404.

[4] Schmalfuss B. Attractors for nonautonomous dynamical systems[A]. In: Fiedler B, Greger K, Sprekels J, Eds. Proc Equadi 99[C]. Berlin: World Scientific, 2000, 684-689.

[5] Caraballo T, Langa J, Valero J. Global attractors for multivalued random dynamical systems[J]. Nonlinear Analysis, 2002, **48**(6): 805-829.

[6] Caraballo T, Langa J, Melnik V, et al. Pullback Attractors of Nonautonomous and Stochastic Multivalued Dynamical Systems[J]. Set-Valued Analysis, 2003, **11**(3): 153-201.

[7] Caraballo T, Lukaszewicz G, Real J. Pullback attractors for asymptotically compact nonautonomous dynamical systems[J]. Nonlinear Analysis, 2006, **64**(3): 484-498.

[8] Caraballo T, Marin-Rubio P, Valero J. Autonomous and non-autonomous attractors for differential equations with delays[J]. Journal of Differential Equations, 2005, **208**(1): 9-41.

[9] Crauel H. Global random attractors are uniquely determined by attracting deterministic compact sets [J]. Annali di Matematica Pura ed Applicata, 1999, **176**(4): 57-72.

Random Attractors for Asymptotically Upper Semicompact Multivalue Random Semiflows

LI Ting

(Department of Mathematics, Suzhou Universuty, Suzhou, Jiangsu 215006, P.R.China)

Abstract: The existence of random attractors for multi-value random semiflows was studied. First an abstract result on the existence of limit sets under the assumptions of pullback asymptotically upper semi-compact and absorbing is proved. Then the existence of random attractors is proved.

Key words: random attractor; asymptotically upper semicompact; absorbing set