

短论 · 学术争鸣

关于《关于修正的功的互等定理的讨论》的讨论^{*}

付宝连

(燕山大学 建筑工程与力学学院, 河北 秦皇岛 066004)

阅读完《关于修正的功的互等定理的讨论》(以下简称《讨论》)之后,对《讨论》有下述两个主要判断:①《讨论》作者对 Betti 功的互等定理的命题的理解是不完整和不准确的;②《讨论》作者认为“修正的功的互等定理实际上是 Betti 功的互等定理另一种表现形式”这一判断是错误的。

——题记

On Discussion of *Discussion on the Modified Reciprocal Theorem of Works*

FU Baolian

(School of Civil Engineering and Mechanics, Yanshan University,
Qinhuangdao, Hebei 066004, P.R.China)

Notes: After reading *Discussion on the Modified Reciprocal Theorem of Works* (*Discussion* for short), there are 2 main judgments about *Discussion*: ① the understanding of the proposition for the reciprocal theorem of Betti's works is incomplete and inaccurate; ② the assertion that the corrected reciprocal theorem of works is actually another manifestation of Betti's reciprocal theorem, is wrong.

0 引 言

文献[1-16]研究指出,Betti 功的互等定理的命题为,一直梁受两组力的作用处于真实状态,则有两组力的倒易功相等.其中“一直梁”和“两组力的作用”是相互矛盾的两个前提,因为两组力中的任意一组力都是任意的和独立的,它们都可以把一直梁变成另一个不相同的直梁.为解决这一矛盾,提出如下两种方案.

第一种方案是“一直梁”保持不变,“两组力的作用”不再是任意和独立的,而是应满足“一直梁”的存在,即满足一直梁的固有位移边界条件.为更清楚地说明问题,现引入线性相关力的概念.在这样的力作用下,一直梁的位移边界条件保持不变.因此,第一修正的功的互等定理可以表述为:一直梁在两组线性相关的外力作用下处于真实状态,则有该两组外力的倒易功相等.

解决“一直梁”和“两组力的作用”矛盾的第二种方案是,保证“两组力的作用”的任意性和独立性.因此,

* 收稿日期: 2023-06-19; 修订日期: 2023-07-03

作者简介: 付宝连(1934—),男,教授(E-mail: ysufubaolian@163.com).

“一直梁”不再保持不变,而变成两个不相同的直梁.在这种情况下,直梁第二修正的功的互等定理可以表述为:两不相同的直梁在各自任意的和独立的外力作用下处于真实状态,则有两组外力的倒易功相等.

比较第一修正的功的互等定理和 Betti 功的互等定理可以看出,前者是一个具有正确命题的定理,而后者是一有逻辑错误的定理.如果在 Betti 功的互等定理的命题中,“两组力的作用”改成“两组线性相关力的作用”,则 Betti 功的互等定理和第一修正的功的互等定理相一致,成为命题正确的功的互等定理.这里应强调指出,在 Betti 功的互等定理中,“两组力的作用”是指两组力的任意一组力都是任意和独立的,它们不可能保证“一直梁”的存在性.只有在第一修正的功的互等定理中保持“两组力的作用”是线性相关的,“一直梁的存在”才能得到保证.

比较第二修正的功的互等定理和 Betti 功的互等定理可以看出,第二修正的功的互等定理是一个命题正确的定理,而 Betti 功的互等定理是一个有逻辑错误的定理.如果在 Betti 的功的互等定理中,“一直梁”被“两个不相同的直梁”所代替,则 Betti 功的互等定理与第二修正的功的互等定理相一致,成为命题正确的功的互等定理.

比较第一修正的功的互等定理和第二修正的功的互等定理可以看出,两者的命题都是正确的,前者是后者的特殊情况.前者只适用于两个相同的线弹性体,而后者适用于两个不相同的线弹性体,因而成为“功的互等法”的理论基础.如果在第二修正的功的互等定理命题中,“两个不相同的直梁”变成相同的“一直梁”,前两组任意的和独立的力变成两组线性相关的力,则第二修正的功的互等定理蜕化为第一修正的功的互等定理.在这种情况下仍不能说第二修正的功的互等定理与第一修正的功的互等定理等价,只能说第一修正的功的互等定理是第二修正的功的互等定理的特殊情况.第一修正的功的互等定理只适用于两组力的作用是线性相关的情况,不适用于两组力的作用是任意的和独立的,而第二修正的功的互等定理适用于后者.第二修正的功的互等定理是“功的互等法”的理论基础,它极大地开发出功的互等定理的固有风险.而第一修正的功的互等定理却不能.

1 关于《讨论》作者对 Betti 功的互等定理命题的认知

《讨论》第2节^[17]在“2 位移和力的边界条件与功的互等定理”中写道:“Betti 功的互等定理可以阐述为相同的直梁系统在两组不同的外力作用下倒易功相等,其中‘相同的直梁’指的是杆件材料、尺寸和截面形状以及位移、力的边界条件都相同的直梁.”《讨论》作者的这一认识是不正确的.实际上,Betti 功的互等定理并不要求静力边界条件也相同,例如,图1所示悬臂梁和图2所示悬臂梁具有不相同的静力边界条件,但也有 Betti 功的互等定理的存在.

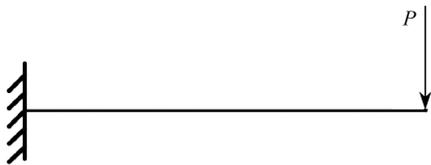


图1 悬臂梁1

Fig. 1 Cantilever beam1

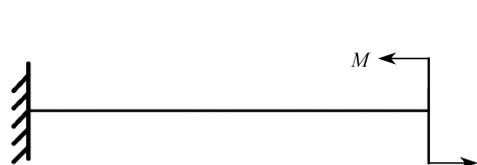


图2 悬臂梁2

Fig. 2 Cantilever beam2

其次,如两直梁上述条件全部相同,它们就成为同一直梁,在同一直梁上应用 Betti 功的互等定理毫无意义.再次,既要求两直梁静力边界条件相同,又允许不同外力作用,这两者前后矛盾,思绪混乱.最后,《讨论》在 Betti 功的互等定理命题中写道:“相同的直梁在两不同的外力作用下倒易功相等.”实际上,“相同的直梁”和“两不同外力的作用”可能是矛盾的,一组外力的作用可能把“相同的直梁”改变成另一个不相同的直梁,如是等等.综上所述,《讨论》作者对 Betti 功的互等定理命题的认知是不完整的和不准确的.

2 关于《讨论》作者对修正的功的互等定理命题的理解

《讨论》在式(14)中写道成:第一简支梁系统对第二简支梁系统的倒易功为

$$W_{12} = \bar{M}_{10}\bar{\theta}_{20} - \bar{M}_{1l}\bar{\theta}_{2l} + \bar{Q}_{1l}\bar{w}_{2l} - \bar{Q}_{10}\bar{w}_{20} + \int_0^l q_1 w_2 dx = \bar{W}_{12}. \quad (1)$$

这表明,第二简支梁系统的边界转角和边界挠度分别为 $\bar{\theta}_{20}, \bar{\theta}_{2l}$ 和 $\bar{w}_{2l}, \bar{w}_{20}$ 。

而《讨论》在式(15)中写成:

$$W_{21} = \bar{M}_{20}\bar{\theta}_{10} - \bar{M}_{2l}\bar{\theta}_{1l} - \bar{Q}_{20}\bar{w}_{10} + \bar{Q}_{2l}\bar{w}_{1l} + \int_0^l q_2 w_1 dx = \bar{W}_{21}. \quad (2)$$

这表明,第一简支梁系统的边界转角和边界挠度分别为 $\bar{\theta}_{10}, \bar{\theta}_{1l}$ 和 $\bar{w}_{1l}, \bar{w}_{10}$ 。

式(1)、(2)表明,第二简支梁系统的边界转角和边界挠度不同于第一简支梁系统的边界转角和边界挠度。Betti 功的互等定理要求两直梁的边界转角和边界挠度相同才能被应用,边界转角和边界挠度不相同只能被应用于修正的功的互等定理。因此,《讨论》在边界转角和边界挠度不同的两直梁之间应用 Betti 功的互等定理是错误的。他们得出的修正的功的互等定理是 Betti 功的互等定理的另一种表现形式当然也是错误的。

3 结 论

《讨论》对 Betti 功的互等定理的认知是不完整和不准确的;《讨论》导出的式(14)、(15)是两个位移边界条件不相同的两直梁,在此两直梁只能应用修正的功的互等定理而不能应用 Betti 功的互等定理,《讨论》在此两直梁之间应用 Betti 功的互等定理是错误的。因此,《讨论》作者认为“修正的功的互等定理是 Betti 功的互等定理的另一种表现形式”也是错误的。

参考文献(References):

- [1] 付宝连. 弯曲薄板功的互等新理论[M]. 北京: 科学出版社, 2003. (FU Baolian. *A New Theory of Reciprocal Work for Bending Thin Plates* [M]. Beijing: Science Press, 2003. (in Chinese))
- [2] 付宝连. 弹性力学中的能量原理及其应用[M]. 北京: 科学出版社, 2004. (FU Baolian. *The Principle of Energy in Elasticity and Its Application* [M]. Beijing: Science Press, 2004. (in Chinese))
- [3] 付宝连. 弯曲矩形板的广义位移原理[M]. 北京: 科学出版社, 2006. (FU Baolian. *The Generalized Displacement Principle of Bending Rectangular Plate* [M]. Beijing: Science Press, 2006. (in Chinese))
- [4] 付宝连. 功的互等理论及其应用[M]. 北京: 科学出版社, 2007. (FU Baolian. *The Reciprocal Theory of Work and Its Application* [M]. Beijing: Science Press, 2007. (in Chinese))
- [5] 付宝连. 弹性力学混合变量的变分原理及其应用[M]. 北京: 科学出版社, 2010. (FU Baolian. *The Variational Principle of Mixed Variables in Elasticity and Its Application* [M]. Beijing: Science Press, 2010. (in Chinese))
- [6] 付宝连. 弯曲厚矩形板功的互等定理及其应用[M]. 北京: 科学出版社, 2014. (FU Baolian. *Reciprocity Theorem of Bending Thick Rectangular Plate Work and Its Application* [M]. Beijing: Science Press, 2014. (in Chinese))
- [7] 钟万勰. 弹性力学求解新体系[M]. 大连: 大连理工大学出版社, 1995. (ZHONG Wanxie. *New System for Solving Elastic Mechanics* [M]. Dalian: Dalian University of Technology Press, 1995. (in Chinese))
- [8] 付宝连. 有限位移理论线弹性动力学二类和三类混合变量的最小势作用量原理和驻值余作用量原理及其应用[J]. 应用数学和力学, 2017, 38(12): 1359-1376. (FU Baolian. Principles of minimum potential action and stationary complementary action with dual and triple mixed variables for linear elastodynamics of finite displacement theory and the application[J]. *Applied Mathematics and Mechanics*, 2017, 38(12): 1359-1376. (in Chinese))

- [9] 付宝连. 有限位移理论线弹性力学二类和三类混合变量的变分原理及其应用[J]. 应用数学和力学, 2017, **38**(11): 1251-1268. (FU Baolian. Variational principles for dual and triple mixed variables of linear elasticity with finite displacements and the application[J]. *Applied Mathematics and Mechanics*, 2017, **38**(11): 1251-1268. (in Chinese))
- [10] 付宝连. 有限位移理论的功的互等定理及其应用[J]. 应用数学和力学, 2015, **36**(10): 1019-1034. (FU Baolian. The reciprocal theorem for the finite displacement theory and its application[J]. *Applied Mathematics and Mechanics*, 2015, **36**(10): 1019-1034. (in Chinese))
- [11] 付宝连. 三维线弹性力学修正的功的互等定理及其应用[J]. 应用数学和力学, 2015, **36**(5): 523-538. (FU Baolian. Corrected reciprocal theorem for 3D linear elasticity and its application[J]. *Applied Mathematics and Mechanics*, 2015, **36**(5): 523-538. (in Chinese))
- [12] 付宝连. 弯曲薄板的修正的功的互等定理及其应用[J]. 应用数学和力学, 2014, **35**(11): 1197-1209. (FU Baolian. Corrected reciprocal theorem of works for bending thin plates and its application[J]. *Applied Mathematics and Mechanics*, 2014, **35**(11): 1197-1209. (in Chinese))
- [13] 付宝连. 修正的功的互等定理[J]. 燕山大学学报, 2005, **29**(3): 189-195. (FU Baolian. Modified theorem of reciprocal works[J]. *Journal of Yanshan University*, 2005, **29**(3): 189-195. (in Chinese))
- [14] 付宝连. 有限变形非线性的变形能原理及功的互等定理与变分原理的关系[J]. 燕山大学学报, 2002, **26**(1): 4-6. (FU Baolian. Relations between deformation energy theorem and reciprocal theorem and variational principles in non-linear elasticity with finite displacements[J]. *Journal of Yanshan University*, 2002, **26**(1): 4-6. (in Chinese))
- [15] 付宝连. 应用功的互等定理法求解立方体的位移解[J]. 应用数学和力学, 1989, **10**(4): 297-308. (FU Baolian. Application of the method of the reciprocal theorem to finding displacement solutions of cubes[J]. *Applied Mathematics and Mechanics*, 1989, **10**(4): 297-308. (in Chinese))
- [16] 付宝连. 应用功的互等定理求解具有复杂边界条件的矩形板的挠曲面方程[J]. 应用数学和力学, 1982, **3**(3): 315-325. (FU Baolian. Applications of reciprocal theorem to solving the equations of deflection surface of rectangular plates with various edge conditions[J]. *Applied Mathematics and Mechanics*, 1982, **3**(3): 315-325. (in Chinese))
- [17] 徐小明, 杨迪雄. 关于修正的功的互等定理的讨论[J]. 应用数学和力学, 2016, **37**(9): 993-998. (XU Xiaoming, YANG Dixiong. Discussion on the modified reciprocal theorem of works[J]. *Applied Mathematics and Mechanics*, 2016, **37**(9): 993-998. (in Chinese))